



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - Найдите произведение длины медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1.

$$ab : 2^9 \cdot 3^{19} \cdot 5^{10}$$

$$bc : 2^{19} \cdot 3^{12} \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$(a \cdot b \cdot c)^2 : 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

$$(a \cdot b \cdot c)_{\min} : 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

Докажем, что меньше быть не может

Рассуждаем, что макс. степень 2, на которую делится abc, равна 21

аб : ~~2<sup>10</sup>~~, т.е. макс. степень 2, на которую делится с, равна 11

bc : 2<sup>14</sup>, т.е. макс. степень 2, на которую может делиться а, равна 6

$$11 + 6 = 17 < 19 \Rightarrow abc : 2^{19} - \text{не может быть}$$

$$\text{abc abc : } 2^{21} :$$

$$ab : 2^9 \Rightarrow c : 2^{12}$$

$$bc : 2^{14} \Rightarrow a : 2^7$$

$$12 + 7 = 19 \Rightarrow abc : 2^{19}$$

Аналогично для степеней 3 и 5

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

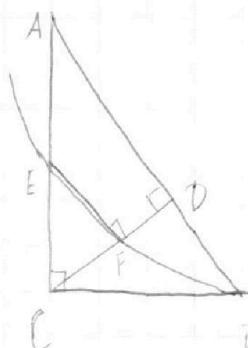
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.



$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{7}, \text{ Тогда } AD = 3x, DB = x$$

$$CD^2 = AD \cdot DB \Rightarrow CD = x\sqrt{3}$$

$$BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = 2x \quad AB = 4x$$

$$AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = 2\sqrt{3}x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

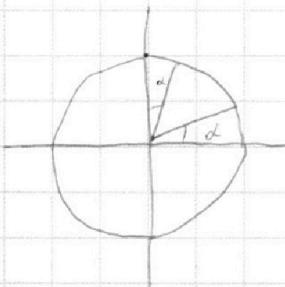
N3.

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

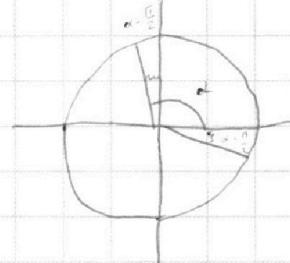
$$5 \arcsin(\cos x) \in [-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$$

$$x \in [-3\pi; 2\pi]$$



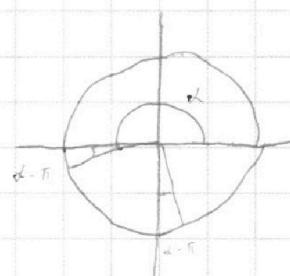
I ref:

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$



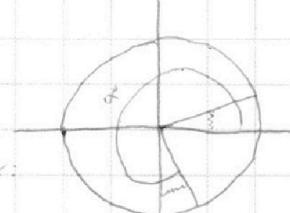
II ref:

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$



III ref:

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$$



IV ref:

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

Рассмотрим уравнение на реальном отрезке  $x$ :

$$x \in [-3\pi; -2\pi] \quad (\text{III и IV ref})$$

$$3\pi/2 < x < 3\pi/2$$

$$5 \arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5x + \frac{25\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = -12\pi$$

$$x = -3\pi$$

$$x \in [-2\pi; -\pi] \quad (\text{I и II ref})$$

$$x \in [0, \pi] \quad (\text{I и II ref})$$

$$x \in [0, \pi] \quad (\text{I и II ref})$$

$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = 2\pi; x = \frac{\pi}{3}$$

$$5 \arcsin(\sin(-\frac{3\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$8x - \frac{15\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = -8\pi; x = -\frac{4\pi}{3}$$

$$x \in [-\pi, 0] \quad (\text{III и IV ref})$$

$$5 \arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5(x + \frac{\pi}{2}) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{2} = 0; x = -\frac{\pi}{2}$$

$$x \in [\pi; 2\pi] \quad (\text{III и IV ref})$$

$$5 \arcsin(\sin(x - \frac{3\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5x - \frac{15\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = 8\pi; x = 2\pi$$

$$\text{Общ: } \{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4. (начало)

$$\begin{cases} x^2 + 2y - 36 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$
$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

Рассмотрим второе уравнение системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad x^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

Пр-е окр-ти с центром  $(0, 0)$  и радиусом 3

$$(2) \quad x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$$

$$(x-6)^2 + y^2 - 36 + 32 = 0$$

Пр-е окр-ти с центром  $(6, 0)$  и радиусом 2

$$x^2 + 2y - 36 = 0$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{36}{2}$$

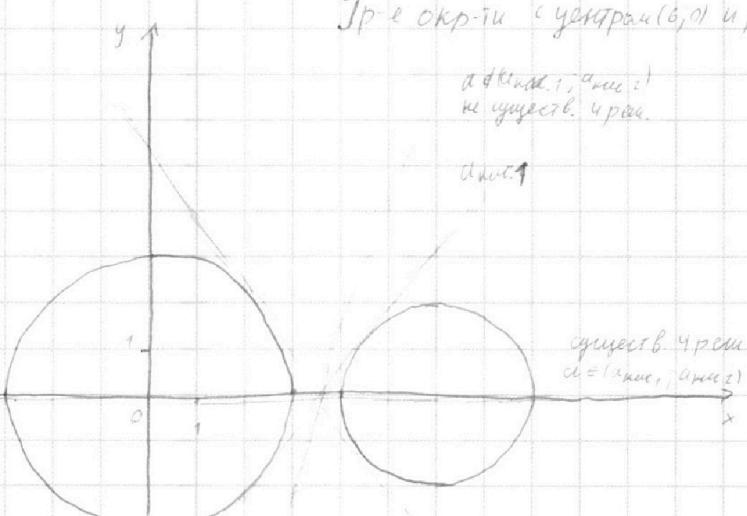
Граф. проходит с угл. кофр  $-\frac{a}{2}$   
и сеч.  $\frac{36}{2}$

Для  $a$ , при которых  
система имеет 4 решения:

Существует 2 правильных решения:

общие внеш. касательные окр-ти

$$d \in (a_{\text{кос1}}, a_{\text{кос2}})$$



существует 4 решения.  
 $a = (a_{\text{кос1}}, a_{\text{кос2}})$

$a_{\text{кос2}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4 (про доказательство)

Найдём сколько

Данная прямая касается первой окружности сверху, а второй - сверху

$$g: \frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} = -\sqrt{9-x^2} \quad (3)$$

$$g: \frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} = \sqrt{4-(x-6)^2} \quad (4)$$

$$(3) \quad \frac{a^2}{4}x^2 - \frac{3ab}{2}x + \frac{9b^2}{4} = 9-x^2$$

$$\left(\frac{a^2}{4}+1\right)x^2 - \frac{3ab}{2}x + \left(\frac{9b^2}{4}-9\right) = 0$$

$$D = \frac{9a^2b^2}{4} - 4\left(\frac{a^2}{4}+1\right)\left(\frac{9b^2}{4}-9\right) = \frac{9a^2b^2}{4} - \frac{9a^2b^2}{16} - 9b^2 + 9a^2 + 36 = 9(a^2 - b^2 + 4)$$

Угловые касания:  $D=0$ .  $a^2 - b^2 + 4 = 0$   $x = \frac{\frac{3ab}{2}}{2\left(\frac{a^2}{4}+1\right)} = \frac{3ab}{a^2+4}$

$$(4) \quad \frac{a^2}{4}x^2 - \frac{3ab}{2}x + \frac{9b^2}{4} = 14 - x^2 + 12x - 32$$

$$\left(\frac{a^2}{4}+1\right)x^2 - \left(\frac{3ab}{2}+12\right)x + \left(\frac{9b^2}{4}+32\right) = 0$$

$$D = \frac{9a^2b^2}{4} + 36ab + 144 - 4\left(\frac{a^2}{4}+1\right)\left(\frac{9b^2}{4}+32\right) = \frac{9a^2b^2}{4} + 36ab + 144 - \frac{9a^2b^2}{4} - 9b^2 - 32a^2 - 128 = -32a^2 - 9b^2 + 36ab + 16 = 0$$

$$\left\{ a^2 - b^2 + 4 = 0 ; b^2 = a^2 + 4 \right.$$

$$\left. -32a^2 - 9b^2 + 36ab + 16 = 0 \right.$$

$$385a^2 - 9448a^2 + 26104 = 0$$

$$\frac{D}{4} =$$

$$-32a^2 - 9a^2 - 36 + 36a\sqrt{a^2+4} + 16 = 0$$

$$-41a^2 + 52 + 36a\sqrt{a^2+4} = 0$$

$$36a\sqrt{a^2+4} = 41a^2 - 52$$

$$a^2 > \frac{52}{36}$$

$$1296a^4 + 5184a^2 = 168 + 4a^2 - 4264a^2 + 26104$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4 (продолжение 2)

$$\begin{cases} b^2 = a^2 + 4 \\ 32a^2 + 9b^2 - 36ab - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a = b \\ 6a = 5b, b = \frac{6}{5}a \end{cases}$$

$$(9b^2 - 36ab + 36a^2) - 4a^2 - 16 = 0$$

$$\begin{cases} 36a^2 = a^2 + 4, a = \pm \frac{2}{\sqrt{35}} \\ \frac{36}{25}a^2 = a^2 + 4, a = \pm \frac{10}{\sqrt{11}} \end{cases}$$

$$(3b - 6a)^2 - 4b^2 = 0$$

$$d_{\text{кас.}}: -\frac{a}{2} > 0 \Rightarrow a < 0$$

$$(3b - 6a - 2b)(3b + 6a + 2b) = 0$$

$$\begin{cases} a = -\frac{2}{\sqrt{35}} \text{ или } a = -\frac{10}{\sqrt{11}} \\ b = -\frac{12}{\sqrt{35}} \end{cases}$$

$a_{\text{кас.}}$  должно соответствовать вну. касательной, т.е.  $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$

$$y = 0 : x \in (3, 4)$$

$$\frac{x}{\sqrt{35}} - \frac{18}{\sqrt{35}} = 0 \quad \frac{5x}{\sqrt{11}} - \frac{18}{\sqrt{11}} = 0$$

$$x = 18 \notin (3, 4) \quad x = 3.6 \in (3, 4)$$

$$a_{\text{кас. 1}} = -\frac{10}{\sqrt{11}}$$

Как можно заметить по графику, обе касательные симметричны  
относительно оси  $Ox$  (т.к. центры окружностей лежат на этой оси), а

это значит, что  $a_{\text{кас. 2}} = -a_{\text{кас. 1}} = \frac{10}{\sqrt{11}}$

$$a \in \left[-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}}\right]$$

$$\text{Отв.}: \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} - 8$$

Замена  $\log_3 x = t \neq 0$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2}t - 8$$

$$t^4 + \frac{7}{2t} + 8 = 0$$

$$(t^4 - s^4) + \frac{7}{2} \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{s} \right) = 0$$

$$(t^4 - s^4) + \frac{7(t+s)}{2ts} = 0$$

$$(t^2 + s^2)(t^2 - s^2) + \frac{7(t+s)}{2ts} = 0$$

$$(t+s)(t-s)(t^2 + s^2) + \frac{7}{2ts} = 0$$

$$\begin{cases} t+s=0 \\ 2ts(t^2 + s^2)(t-s) + 7=0 \end{cases}$$

$$2t^4s - 2t^3s^2 + 2t^2s^3 - 2ts^4 + 7=0$$

нет решения

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_3 3 = \log_3 (3^2) - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + \frac{2}{\log_3 (5y)} = 168 \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 (5y)} - 8$$

Замена  $\log_3 (5y) = s \neq 0$

$$s^4 + \frac{2}{s} = \frac{11}{25} - 8$$

$$s^4 - \frac{7}{25} + 8 = 0$$

$$t+s=0 ; \log_3 (5y)=0$$

$$5+y=1 ; xy=\frac{1}{5}$$

Ответ:  $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

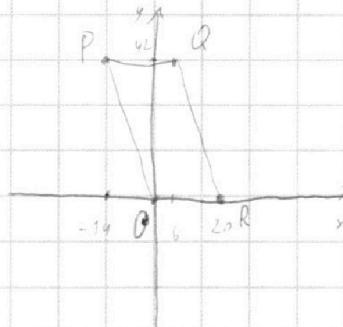


- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6.



$$\text{tg } \angle DRQ = \frac{42}{29-6} = 3$$

т.е. на стороных  $PA$  и  $QB$  расстояние

на оси  $OY$  между соседними  $z$  точками

с целочисленными координатами равно 3

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 11 & \text{когда } y=0: x_{\min} = 0 \quad x_{\max} = 20 \\ & h = \underbrace{(20-11+1)}_{10} + \underbrace{(14-11+1)}_{3} + \underbrace{(19-14+1)}_{3} = 28 \\ & + 120 - 11 + 1 = 28 + 10 = 38 \\ y_2 - y_1 = 0 & \text{когда } y=1: x_{\min} = 0 \quad x_{\max} = 19 \\ & + 120 - 11 + 1 = 28 + 9 = 37 \\ & + 10 = 37 \\ & = 38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 10 & \text{когда } y=0: x_{\min A} = 0 \quad x_{\max B} = 14 \\ & h = \underbrace{(14-10+1)}_{4} + \underbrace{(18-10+1)}_{8} + \underbrace{(18-10+1)}_{8} = 42 \\ & + 149 - 10 + 1 = 374 \\ y_2 - y_1 = 3 & \text{когда } y=1: x_{\min A} = 7 \quad x_{\max B} = 18 \\ & + 149 - 10 + 1 = 374 \\ & + 10 = 384 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 0 & \text{когда } y=0: x_{\min A} = 0 \quad x_{\max B} = 9 \\ & h = \underbrace{(9-0+1)}_{10} + \underbrace{(8-0+1)}_{8} + \underbrace{(8-0+1)}_{8} = 28 \\ & + 149 - 10 + 1 = 99 \\ y_2 - y_1 = 33 & \text{когда } y=1: x_{\min A} = 0 \quad x_{\max B} = 8 \\ & + 149 - 10 + 1 = 99 \end{cases}$$

Найдя закономерность, получаем:  $h = 28 \cdot (14 - k) + 10$ , где  $k = \frac{y_2 - y_1}{3}$

$$k \in [0; 14], k \in \mathbb{Z}$$

$$N_{\text{общ}} = 28 \cdot 14 \cdot 12 - 28 \cdot \frac{11-12}{2} + 10 \cdot 12 = 12(392 - 154 + 10) = 12 \cdot 248 = 2976$$

кор. с. пар А и В

Ответ: 2976.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

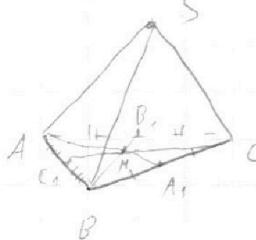
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

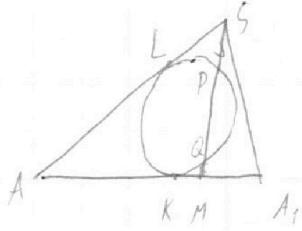
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 7



Рассмотрим плоскость ( $ASA_1$ ):



$AL = AK$  как касательные к окружности из  
одной точки

$$LS^2 = SP \cdot (SP + PQ)$$

$$KM^2 = MQ \cdot (MQ + PQ) \quad (\text{по теореме о нач. и окр.})$$

$$SP = MQ \Rightarrow LS = KM$$

$$AS = AM = 12$$

$$\frac{AM}{MA_1} = \frac{2}{3} (\text{по СВ-у } \cancel{\text{медианы}}) \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} \cdot 12 = 18$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

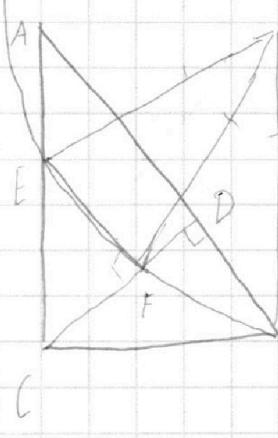


- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

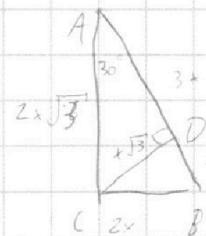
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}$$



$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$x_{\max} - x_{\min} = 34$$

$$y_{\max} - y_{\min} = 42 \quad (x_{\max} - x_{\min})$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 11 \\ y_2 - y_1 = 0 \end{cases} \quad h = (20 \cdot 11 + 1) \cdot 42 = 950$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 10 \\ y_2 - y_1 = 1 \end{cases} \quad h = 20$$

$$432a^3 + 96a^2 + 36a + 6 = 0$$

$$g(88^\circ - 2a)^2 - 4a^2 - 16 = 0$$

$$g(8 - 2a)^2 - 4b^2 = 0$$

$$(36 - 6a - b)(36 + 6a + b) = 0$$

$$\begin{cases} 6a - b = 0 \\ 6a + b = \frac{36}{2} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} y & 24 \\ 4 & 24 \\ 6 & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} y & 24 \\ 4 & \end{matrix}$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4$$

$$\begin{matrix} \frac{a}{2} + \frac{3b}{2} = 0 \\ \end{matrix}$$

$$x \in (3, 4)$$

$$9a^2 = a^2 + 4$$

$$\frac{9a^2}{4} = a^2 + 4$$

$$\begin{cases} a^2 = \frac{1}{2}, 4 = -\frac{\sqrt{5}}{2} \\ a^2 = \frac{16}{9}, a = -\frac{4\sqrt{5}}{9} \end{cases}$$

$$a < 0$$

$$1) ax^2 + by^2 = 2b =$$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} = \sqrt{9 - x^2} \\ -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} = \sqrt{4 - (x+6)^2} \end{cases}$$

D = 0 беззр

между

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}, b < 3, a < 0$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}, b < 3, a < 0$$

$$(0, \frac{3b}{2})$$

$$2 < \sqrt{5} < 3, 75$$

$$7.5 < 3 < 7.22$$

$$x = \frac{3b}{a}$$

$$\frac{3b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$b = \frac{2\sqrt{5}}{3}a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

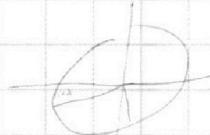
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\sqrt{1} \quad (abc) = 2^7 \cdot 3^{42} \cdot 5^{41} \cdot 7^{53}$$

$$(abc)_{\min} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

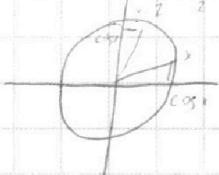
1 2 3 4 5 6 7



1/3.

$$\operatorname{arccosh}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$\arcsin a \in [-\pi; \pi]$



$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$y = \frac{\pi}{3}$$

$$\left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{s^4}\right) + \frac{7}{2}(s-t) = 0$$



$$\operatorname{arccosh}(\cos y) = y + \frac{\pi}{2}$$

$y \in [0; \pi] : 5\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = y + \frac{\pi}{2}$

$y \in [-\pi; 0] : 5\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = y + \frac{\pi}{2}$

$$\log_3 x + 6/\log_3 x = \log_x 243 - 8$$

$$\log_3 x + 2/\log_3 x = \log_{243} x - 8$$

1/5

$$\log_3 x + 6/\log_3 x = \log_x 243 - 8$$

$$\log_3 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \log_3 x - 8$$

$$\log_3 x = t \neq 0$$

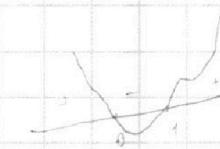
$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2}t - 8 \quad | \cdot t$$

$$t^5 - 6t^3 + 8t = 9t^2$$

$$2t^5 + 16t - 7t^2 = 0$$

$$t^2(2t^3 - 7t) = 0$$

$$256t^5 - 16t^3 = 0$$



$$\log_3 x = 5 \neq 0 \quad \begin{cases} y \in [0; \pi], \\ y \in [-\pi; 0] \end{cases}$$

$$s^4 + \frac{2}{s} = \frac{11}{2s} - 8$$

$$s^5 - \frac{7}{2s} + 8 = 0 \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$$

$$(t^4 - s^4) + \frac{7}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{s}\right) = 0$$

$$(t^4 - s^4) + \frac{7}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{s}\right) = 0$$

$$(t-s)(t+s)(t^2+s^2)$$

$$(t-s)(t^2+s^2)(t+s) + \frac{7}{2} \cdot \frac{(t+s)}{ts} = 0$$

$$t^4 + \frac{9}{2t} + 8 = 0 \quad | \cdot t$$

$$t^5 + 5t^3 + 8t = 0$$

$$(t-s)(t^2+s^2)(t+s) + \frac{7}{2} \cdot \frac{(t+s)}{ts} = 0$$

$$t^4 - a^3 \cdot a^2 - a + \frac{7}{2s} = 0$$

$$(t-s)(t^2+s^2) + \frac{7}{2s} = 0$$

$$(t-s)(t^2+s^2)(t+s) + \frac{7}{2} \cdot \frac{(t+s)}{ts} = 0$$

$$a^4 - a^3 \cdot a^2 - a + \frac{7}{2s} = 0$$

$$(t-s)(t^2+s^2) + \frac{7}{2s} = 0$$

$$(t-s)(t^2+s^2)(t+s) + \frac{7}{2} \cdot \frac{(t+s)}{ts} = 0$$

$$a(a-1)(a^2+1) = -\frac{7}{2s}$$

$$t^3 - t^2s + ts^2 - s^3 = -\frac{7}{2s}$$

$$(t-s)(t^2+s^2)(t+s) + \frac{7}{2} \cdot \frac{(t+s)}{ts} = 0$$

$$a(a-1)(a^2+1) = -\frac{7}{2s}$$

$$t^3 - t^2s + ts^2 - s^3 = -\frac{7}{2s}$$

$$(t-s)(t^2+s^2)(t+s) + \frac{7}{2} \cdot \frac{(t+s)}{ts} = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

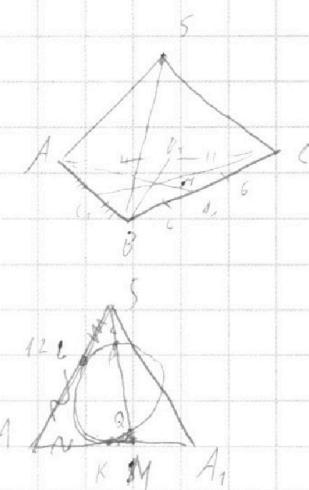
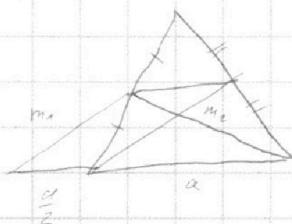
$$2ts(t^2+s^2)(t-s)+7=0$$

$$2t^4s - 2t^3s^2 + 2t^2s^3 - 2ts^4 + 7 = 0 \quad | : s^5$$

$$2\left(\frac{t}{s}\right)^4 - 2\left(\frac{t}{s}\right)^3 + 2\left(\frac{t}{s}\right)^2 - 2\left(\frac{t}{s}\right) + \frac{7}{s^5} = 0$$

Замена:  $\frac{t}{s} = k \neq 0$ ,  $\frac{7}{s^5} = a$

$$2k^4 - 2k^3 + 2k^2 - 2k + a = 0$$



$$AM = 12$$

$$AA_1 = 18 \quad \frac{1}{2} \cdot 18 = 6 \text{ см}$$

