



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 4

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} x$ ;  $bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} y$ ;  $ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} z$ , где  $x, y, z \in \mathbb{N}$

Тогда:  $\begin{cases} ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} x & (1) \\ bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} y & (2) \\ ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} z & (3) \end{cases}$  умножим (1), (2) и (3):

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} x y z$$

Т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , то  $a \cdot b \cdot c \in \mathbb{N} \Rightarrow$  в произведении  $2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} x y z$  какое-то множитель должно быть в чётной степени.  $59 \div 2 \Rightarrow$  либо  $x$ , либо  $y$ , либо  $z$  кратно 3, то есть хотя бы 3.

Предположим, что какое-то из чисел  $x, y, z$  равно 3, а остальные равны 1. Тогда в произведении  $ab$  ~~степень 5~~ равна 1, а  $bc = 3 \cdot 6 \cdot 28$ .

Пусть  $b = 3^k \cdot f$  и  $f$  входит в степени  $k, 2k, 3k, 4k, 5k$  в степени  $f$ ,  $b = 3^k \cdot f$  ~~все степени~~

Тогда:

(второй способ):

Пусть  $p = 3$   
Тогда:  $ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$

Пусть  $a = 2^d \cdot 3^e \cdot 5^f$ ;  $b = 2^k \cdot 3^l \cdot 5^m$ ;  $c = 2^r \cdot 3^s \cdot 5^t$

т.к. ровно одно из  $x, y, z$  равно 3, то в произведениях  $ab, bc, ac$  степени вхождения 2 и 5 не поменялись. Получается система:

$$\begin{cases} d+k=6 & (4) \\ k+r=14 & (5) \\ d+r=16 & (6) \end{cases}$$

$$(4)-(5): \begin{cases} d-r=-8 \\ d+r=16 \end{cases} \Rightarrow d=-4 \Rightarrow r=12 \Rightarrow k=2$$

(Такая тройка подходит)

$$\begin{cases} -4+f+p=11 & (7) \\ p+i=13 & (8) \\ f+i=28 & (9) \end{cases}$$

$$(7)-(8): \begin{cases} f-i=-2 \\ f+i=28 \end{cases} \Rightarrow f=13 \Rightarrow i=15 \Rightarrow p=-2$$

Тогда  $b = 2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^{-2}$ . Но тут получается, что  $b \notin \mathbb{N}$ .

Противоречие. Получается, что  $x, y, z \neq 3$  (т.к. степень ~~занесена~~ неётся в  $a^2 b^2 c^2$  неётся).

Если  $x=5$  и  $y=5$ :  $\begin{cases} f+p=12 & (10) \\ p+i=14 & (11) \\ f+i=28 & (12) \end{cases}$

$$(10)-(11): \begin{cases} f-i=-2 \\ f+i=28 \end{cases} \Rightarrow f=13$$

$$p=-1$$

$b$  - снова меняется

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \quad x=25: \begin{cases} f+p=13 \\ p+i=13 \\ f+i=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f-i=0 \\ f+i=28 \end{cases} \Rightarrow f=14 \Rightarrow p=-1 \Rightarrow b \notin \mathbb{N}$$

$$\textcircled{3} \quad y=25: \begin{cases} f+p=11 \\ p+i=15 \\ f+i=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f-i=-4 \\ f+i=28 \end{cases} \Rightarrow f=12 \Rightarrow p=-1 \Rightarrow b \notin \mathbb{N}$$

Если  $x=5$  или  $y=25$  получим, что  $p$  не натуральным

$$\textcircled{4} \quad z=25: \begin{cases} f+p=11 \\ p+i=13 \\ f+i=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f-i=-2 \\ f+i=30 \end{cases} \Rightarrow f=14 \Rightarrow p=-3 \Rightarrow b \notin \mathbb{N}$$

$$\textcircled{5} \quad z=5 \text{ и } x=5: \begin{cases} f+p=12 \\ p+i=13 \\ f+i=29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f-i=-1 \\ f+i=29 \end{cases} \Rightarrow f=14 \Rightarrow p=-2 \Rightarrow b \notin \mathbb{N}$$

$$\textcircled{6} \quad z=5 \text{ и } y=5: \begin{cases} f+p=11 \\ p+i=14 \\ f+i=29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f-i=-3 \\ f+i=29 \end{cases} \Rightarrow f=13 \Rightarrow p=-2 \Rightarrow b \notin \mathbb{N}$$

Получается, что  $xyz$  не может быть кратно только  $5^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow xyz : 5^4$  (т.к.  $b$  входит в чет. степени)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow xyz : 5^4 \cdot 3$ .  $\Rightarrow xyz$  хотя бы  $5^4 \cdot 3$ .

Пример:  $a = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^{11}$ ;  $b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^{10}$ ;  $c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{17}$

Заметим, что он удовлетворяет условию. Тогда

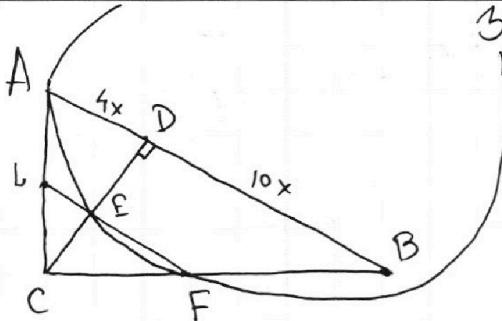
$$\min(a, b, c) = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$



- 1    2    3    4    5    6    7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2

$$\frac{AB}{BD} = \frac{14}{10} \Rightarrow AD = 4x, DB = 10x$$

$$AC^2 = AD \cdot AB \\ AC = \sqrt{4x \cdot 14x} = 2x\sqrt{14}$$

$$CD^2 = AD \cdot DB \Rightarrow CD = \sqrt{4x \cdot 10x} = 2x\sqrt{10}$$

$EF \parallel AB$ ;  $ED$ -секущая  $\Rightarrow \angle CEF = \angle CDB = 90^\circ$  (не ~~ко~~ ошибка)

Пусть  $BC = a \Rightarrow AC = 2x\sqrt{14} - a$

$$\triangle CBE \sim \triangle CAD \Rightarrow \frac{4x}{LE} = \frac{a}{2x\sqrt{14}} \Rightarrow LE = \frac{4x a}{2x\sqrt{14}} = \frac{2a}{\sqrt{14}}$$

$$\triangle LEC - \text{r.} \Rightarrow \text{no T. Pythagora: } CE = \sqrt{a^2 - \frac{4a^2}{14}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} a$$

$$\triangle CEF \sim \triangle CDB: \frac{EF}{10x} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} a}{2x\sqrt{10}} \Rightarrow EF = \frac{10\sqrt{5}a}{2\sqrt{7} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5a}{\sqrt{14}}$$

$$LF = \frac{7a}{\sqrt{14}}$$

$$AL^2 = LE \cdot LF \quad (\text{T.k. } AC \text{-касат.}); \quad A-\text{т. касан, } LF \text{- секущая}$$

$$4x^2 \cdot 14 - 4x\sqrt{14} \cdot a + a^2 = \frac{49a^2}{14} \quad \cancel{\frac{49a^2}{14}} \quad \frac{2a}{\sqrt{14}} \cdot \frac{7a}{\sqrt{14}}$$

$$4x^2 \cdot 14 - 4x\sqrt{14} a + a^2 - a^4 = 0$$

$$D = 16 \cdot 14a^2 \quad \cancel{4 \cdot 4 \cdot 16(a^2 - a^4)} = 16 \cdot 14a^2 - 16 \cdot 14a^2 + 16 \cdot 14a^4 = 16 \cdot 14a^4$$

$$x = \frac{4a\sqrt{14} + a^2\sqrt{14}}{28} = \frac{a\sqrt{14} + a^2\sqrt{14}}{28}$$

$$S_{ADC} = \frac{4x \cdot 2x\sqrt{10}}{2} = 4x^2\sqrt{10} = 4x\sqrt{10}x$$

$$4x^2 \cdot 14 - 4x\sqrt{14} \cdot a = 0$$

$$x(4 \cdot 14x - 4a\sqrt{14}) = 0$$

$$x = \frac{4a\sqrt{14}}{4 \cdot 14} = \frac{a\sqrt{14}}{14}$$

$$S_{ADC} = 4x^2\sqrt{10} = \frac{4 \cdot a^2 \cdot 14 \cdot \sqrt{10}}{14^2} = \frac{4\sqrt{10}a^2}{14} = \frac{2\sqrt{10}a^2}{7}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$S_{CEF} = \frac{\sqrt{5}a}{\sqrt{7}} \cdot \frac{5a}{\sqrt{14}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5 \cdot \sqrt{5} a^2}{2 \cdot 7 \cdot \sqrt{2}} = \frac{5 \sqrt{10} a^2}{2 \cdot 14}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{2 \sqrt{10} a^2}{7} \cdot \frac{5 \sqrt{10} a^2}{14} = \frac{2 \cdot 14}{7 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 2}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{2 \sqrt{10} a^2}{7} : \frac{5 \sqrt{10} a^2}{28} = \frac{2 \cdot 28}{7 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 4}{5} = \frac{8}{5} =$$

$$= \frac{16}{10} = 1,6$$

Ответ: 1,6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 9\pi - 2x$$

$$10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 5x = 9\pi - 2x$$

$$-4\pi = 7x$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = 2\pi k + \beta, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, \beta \in [0; 2\pi)$$

$$10 \arccos(\sin(2\pi k + \beta)) = 9\pi - 4\pi k - 2\beta$$

$$10 \arccos(\sin \beta) = 9\pi - 4\pi k - 2\beta$$

$$10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - \beta)) = 9\pi - 4\pi k - 2\beta$$

$$10(\frac{\pi}{2} - \beta) = 9\pi - 4\pi k - 2\beta$$

$$5\pi - 10\beta = 9\pi - 4\pi k - 2\beta$$

$$8\beta = -4\pi + 4\pi k$$

$$\beta = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2} \quad \text{Получается, } \sin x = 0, \text{ либо } \sin x = 1, \text{ либо } \sin x = -1$$

①  $\sin x = 0$

②  $\sin x = 1$

$$10 \arccos 0 = 9\pi - 2x$$

$$10 \arccos 1 = 9\pi - 2x$$

$$5\pi = 9\pi - 2x$$

$$10 \cdot 0 = 9\pi - 2x$$

$$2x = 4\pi$$

$$x = \frac{9\pi}{2} \quad \text{⊕}$$

$$x = 2\pi \quad \text{⊕}$$

③  $\sin x = -1$

$$10 \arccos -1 = 9\pi - 2x$$

$$10\pi = 9\pi - 2x$$

$$2x = -\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{⊕}$$

Ответ:  $x = \left\{-\frac{\pi}{2}; 2\pi, \frac{9\pi}{2}\right\}$



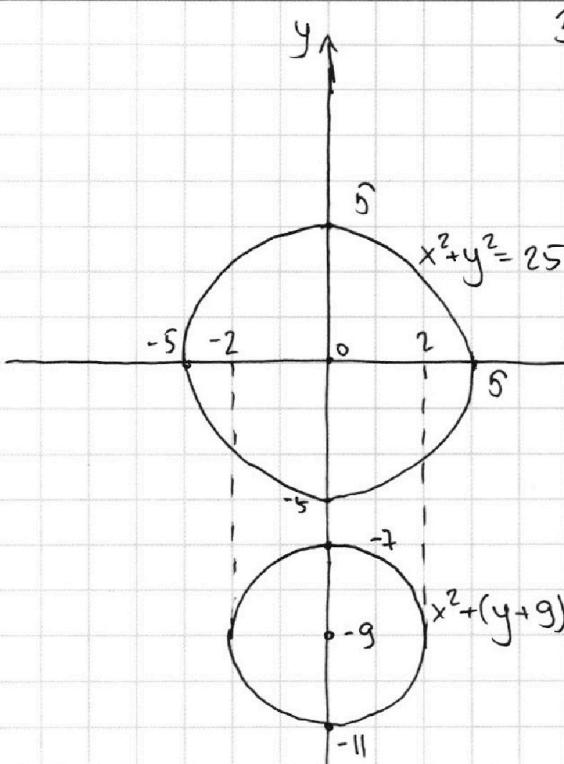
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 4

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

$$(2) (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0$$

$$x^2 + y^2 = 25 \quad x^2 + (y+9)^2 = 4$$

$$5x + 6ay - b = 0$$

$$\textcircled{1} \quad a=0. \text{ Имеет } b=0 \Rightarrow 5x=0$$

$$x \stackrel{!}{=} 0$$

Это прямая, которая не пересекает окр. из (2) в четырех точках  $\Rightarrow$  при  $a=0$  такая  $b$  существует.  
Есть 4 реш.

$$\textcircled{2} \quad \text{для } a \neq 0$$

$$5x + 6ay - b = 0$$

$y = \frac{b-5x}{6a}$  — это прямая, она должна пересекать окружности в четырех точках.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3 121} \frac{1}{5} \quad \text{Задача 5} \quad \text{ОДЗ: } x > 0, x \neq 1$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = -\frac{2}{3} \log_x 11 - 5 \quad \log_{11} x = a, a \neq 0, \text{т.к. } x \neq 1$$

$$a^4 - \cancel{\frac{6}{a}} = -\frac{2}{3a} - 5$$

$$a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0$$

$$\frac{3a^5 + 15a - 16}{3a} = 0 \quad | \cdot a \neq 0$$

$$3a^5 + 15a - 16 = 0 \quad f(a) = 3a^5 + 15a - 16 \Rightarrow f'(a) = 15a^4 + 15$$

$$15a^4 + 15 = 0$$

Таких  $a$  нет  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(a) \uparrow \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3a^5 + 15a - 16 = 0$  имеет ~~одно~~ 1 решение (при  $a \in \mathbb{R}$ )

$$f(0) = -16, f(1) = 2 \Rightarrow \text{он же то достигается)} \quad \text{ОДЗ: } y > 0, y \neq 2$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^3) - 5 \quad \log_{11} 0,5y = b, b \neq 0, \text{т.к. } y \neq 2$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{38} - 5$$

$$b^4 + \frac{16}{38} + 5 = 0 \quad | \cdot 38, b \neq 0$$

$$3b^5 + 15b + 16 = 0 \quad g(b) = 3b^5 + 15b + 16, g'(b) = 15b^4 + 15$$

$$15b^4 + 15 = 0$$

Таких  $b$  нет  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow g(b) \uparrow \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3b^5 + 15b + 16 = 0$  имеет ~~одно~~ одно решение

( $f(0) = 16, f(-1) = -2 \Rightarrow$  он же то достигается).

Получается, что  $a+b$  определено однозначно.

$$\begin{cases} 3a^5 + 15a - 16 = 0 & (1) \\ 3b^5 + 15b + 16 = 0 & (2) \end{cases} \quad (1)+(2): 3(a^5 + b^5) + 15(a+b) = 0$$

$$\begin{cases} 3a^5 + 15a - 16 = 0 & (1) \\ 3b^5 + 15b + 16 = 0 & (2) \end{cases} \quad 3(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 5) = 0$$

$$a+b = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1      2      3      4      5      6      7

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{10} x = a \quad \log_{10} 0.5y = b$$

$$\log_{10} 0.5xy = a + b$$

$$0.5xy = \cancel{0.5}^{(a+b)} 10^{a+b}$$

$$xy = 2 \cdot 10^a$$

$$xy = 2 \cdot 10^a$$

$$xy = 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11} x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} 11^{-2} - 5$$

$$a^4 - \frac{b}{a} = -\frac{2}{3a}$$

$$a^4 + \frac{b}{a} + \frac{2}{3a} = 0$$

$$a^4 + \frac{-18+2}{3a} = 0$$

$$a^4 - \frac{16}{3a} = 0$$

$$\frac{3a^5 - 16}{3a} = 0$$

$$10 \frac{\pi}{2} = 9\pi - 2x$$

$$\sin \frac{9\pi}{3}$$

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{3} \right)$$

$$\cos \left( \frac{3\pi}{6} - \frac{9\pi}{6} \right) = \cos -\frac{5}{3}\pi$$

$$\frac{\pi}{2} - 3\pi$$

$$\frac{\pi}{2} -$$

$$\frac{3\pi}{6} - \frac{7\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$$

$$\sin \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin \frac{7\pi}{6}$$

$$\frac{3\pi}{6} - \frac{4\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{3\pi}{6} - \frac{7\pi}{6} = -\frac{4\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$$

$$x > 0$$

$$x \neq 1$$

$$a = \log_{11} x$$

$$b = \log_{11} y$$

$$a+b = \log_{11} xy$$

$$xy = 11$$

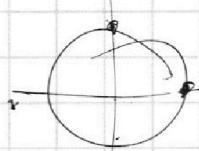
$$\log_{11}(0.5y) + \log_{0.5y} 11 = \log_{(0.5y)^3} 11^{-13} - 5$$

$$b = \log_{11} 0.5y$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5$$

$$b^4 + \frac{3}{3b} - \frac{13}{3b} + 5 = 0$$

$$b^4 + \frac{16}{3b} + 5 = 0$$



$\frac{15}{3}$

$$\sin \frac{3\pi}{4}$$

$$\sin \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} - 3\pi$$

$$\frac{\pi}{2} -$$

$$\therefore$$

$$x = 2\pi n + b$$

$$10 \arccos(\sin(2\pi n + b)) = 9\pi - \frac{\pi}{2} - 4\pi n - 2b$$

$$10 \arccos(\sin b) = 9\pi - 4\pi n - 2b$$

$$10 \left( \frac{\pi}{2} - b \right)$$

$$\frac{m\sqrt{m}}{a}$$



$\frac{\pi}{2}$



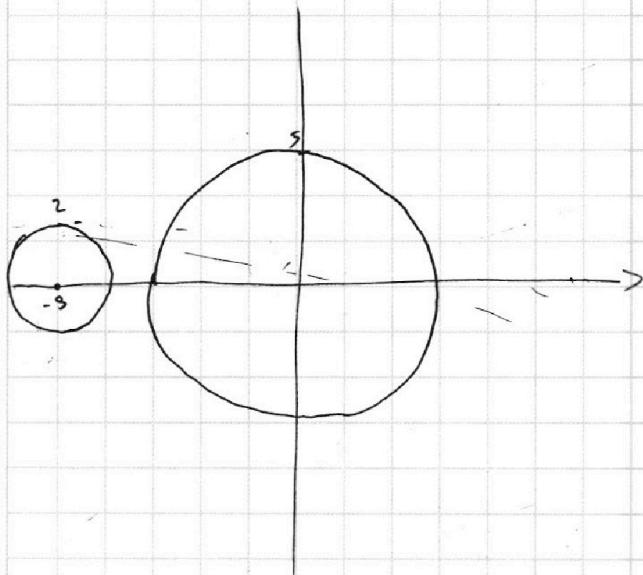
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} & \text{усл.} \\ & x^2 + y^2 = 5^2 \\ & x^2 + (y+3)^2 = 2^2 \end{aligned}$$

$$6ay - b + 5x = 0$$

$$y = \frac{-5x + b}{6a}$$

$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a}$$

$$-b + 5x = 0$$

$$5x = b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 < \frac{5 \cdot 9}{6a} + \frac{b}{6a} < 2 \\ -5 < \frac{b}{6a} < 5 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} & -5x + b = 0 \\ & x = \frac{b}{5} \end{aligned}$$

$$b \frac{\pi/2}{r}$$

$$-2 < \frac{45}{6a} + \frac{b}{6a}$$

$$45 + b < 12a$$

$$b < 12a - 45$$

$$a < 0$$

$$-2 < \frac{45}{6a} + \frac{b}{6a} < 2$$

$$-12a > 45 + b > 12a$$

$$-12a - 45 > b > 12a - 45$$

$$\begin{aligned} & \text{① } a > 0 \quad -12a < 45 + b \\ & -45 - 12a < b < 12a - 45 \quad \text{уравнение} \end{aligned}$$

$$-30a < b < 30a$$

$$30a < 45 - 12a$$

$$30a < -45 - 12a$$

$$42a < -45$$

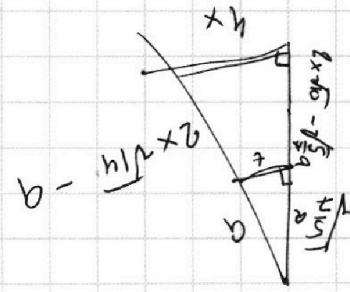
$$a < -\frac{45}{42}$$

$$12a - 45 < -30a$$

$$48a < 45$$

$$a < \frac{45}{48}$$

$$\begin{aligned} & 2a \frac{t}{s} = \frac{14}{14a - 4a} = \frac{14}{10a} = \frac{a}{5} \\ & \frac{2a}{5} = \frac{4a}{2 \times 14} = \frac{2a}{14} = x \\ & a = \frac{2 \times 14}{4} = \frac{28}{4} = 7 \end{aligned}$$





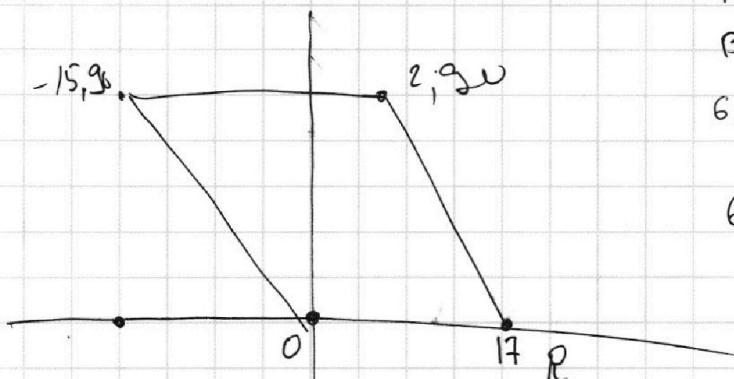
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



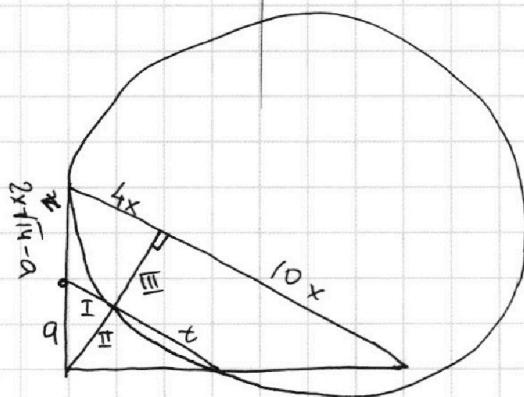
$$A(x_1, y_1)$$

$$B(x_2, y_2)$$

$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$6x + y \leftarrow 6x_1 + y_1 = 48$$

$$y = -6x + 48 - 6x_1 - y_1$$



$$4x \cdot 14y$$

$$2 \times \sqrt{14}$$

$$4x \cdot 10y$$

$$\textcircled{III} 2 \times \sqrt{10} - \sqrt{\frac{5}{7}} a$$

$$\textcircled{I} \frac{a}{48} = \frac{a}{2\sqrt{14}}$$

$$\boxed{\textcircled{I} \frac{a}{2\sqrt{14}} = \frac{2a}{\sqrt{14}}}$$

$$\textcircled{II} = \sqrt{a^2 - \frac{4a^2}{14}} = \sqrt{\frac{10a^2}{14}} = \sqrt{\frac{5}{7}} a$$

$$\frac{t}{10} = \frac{\sqrt{\frac{5}{7}} a}{2\sqrt{10}}$$

$$t = \frac{10\sqrt{\frac{5}{7}} a}{2\sqrt{7} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5a}{\sqrt{14}}$$

$$k \times \sqrt{10}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} a$$

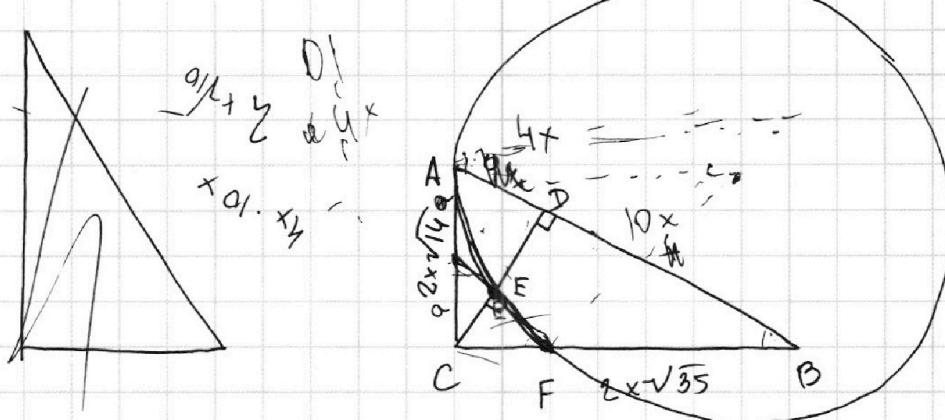
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = \log_{10} x \quad b = \log_{10} 0.5y \quad \text{to find}$$

$$a+b = \log_{10} 0.5xy$$

$$0.5xy = 11 \quad a+b \\ xy = 11 \quad .2$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = \frac{-2}{3a} - 5$$

$$a^4 - \frac{16}{3a} = -5 \quad b^4 + \frac{1}{b} = \frac{-13}{3b} - 5$$

$$\frac{3a^5 - 16}{3a} = -5$$

$$\frac{3b^5 + 16}{3b} = -5$$

$$3a^5 + 15a - 16 = 0$$

$$3b^5 + 15b + 16 = 0$$

$$3a^5 + 3b^5 + 15(a+b) = 0$$

$$3(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 15(a+b) = 0$$

$$3(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 5) = 0$$

$$a+b=0$$

$$3a^5 + 15a - 16 = f(x) \\ f'(x) = 15a^4 \\ 15a^4 + 15 = 0 \\ a^4 = -1 \quad \text{No solution}$$

$$\frac{2a}{3a} - \frac{18}{3a} \\ -\frac{16}{3a}$$

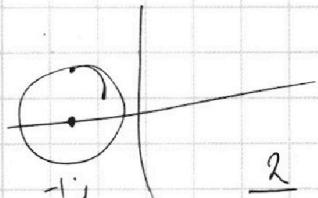
$$-\frac{2}{3} \log_{10} x \quad \frac{-b}{5x} = \frac{b}{5}$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = \frac{-13}{3b} - 5 \\ 4x \cdot 14x$$

$$10x \cdot 14x$$

$$4 \cdot 5x \cdot 7x$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 1$$



$$\frac{2}{3a} - \frac{18}{a}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4x^2 \cdot 14 - 4x a \sqrt{14} + a^2 = \frac{4a^2}{14} \cdot \frac{4g_9^2}{14}$$

$$\cancel{\frac{4a^2}{14}} \quad \cancel{\frac{4g_9^2}{14}} \quad 4x^2 \cdot 14 - 4x a \sqrt{14} + a^2 - a^4 = 0$$

$$D = 16a^2 \cdot 14 - 4 \cdot 4 \cdot 14(a^2 - a^4) =$$

$$= 16a^2 \cancel{14} - 16 \cdot 14 a^2 + 16 \cdot 14 a^4$$

$$x = \frac{4a\sqrt{14} + 4a^2\sqrt{14}}{8 \cdot 14} = \frac{a\sqrt{14} + a^2\sqrt{14}}{28}$$

$$\boxed{\frac{4x \cdot 2x\sqrt{10}}{2} = 4x^2\sqrt{10}}$$

$$\sqrt{\frac{5}{7}} a \cdot \frac{5a}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{5}a \cdot 5a}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{14}} = 5\sqrt{5}a$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos x = y \quad \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\cos y = x$$

$$\sqrt{1-x^2}$$

$$\cos y$$

$$\arccos(\sin x) = y$$

$$\cos y = \sin x$$

$$\arccos(\cos x) = \boxed{x}$$

$$\cos y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\cos^2 y = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 y + \cos^2 x = 1$$

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\cos(10 \arccos(\sin x)) = \cos(9\pi - 2x)$$

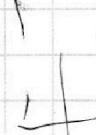
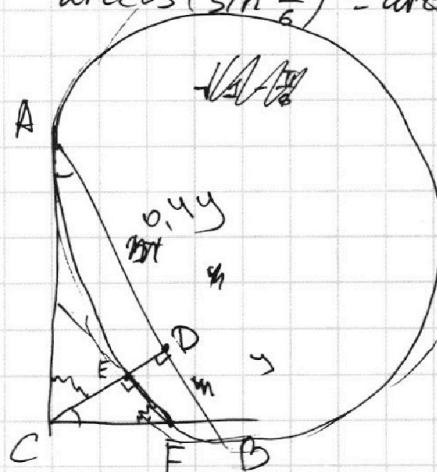
$$x =$$

$$\arccos(\sin \frac{\pi}{6}) = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\arccos(\sin \frac{\pi}{6}) = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

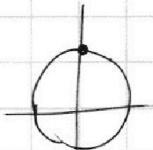
$$\frac{3\pi}{6}$$



$$\frac{x+y}{y} = 1,4$$

$$\begin{aligned} x+y &= 1,4y \\ x &= 0,4y \end{aligned}$$

$$?$$



$$\begin{aligned} \arccos \sqrt{1 - \cos^2 x} &= y \\ 1 - \cos^2 x &= \cos y \\ \sin x &= \cos(\frac{\pi}{2} - x) \end{aligned}$$

$$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\arccos(\sin x) =$$

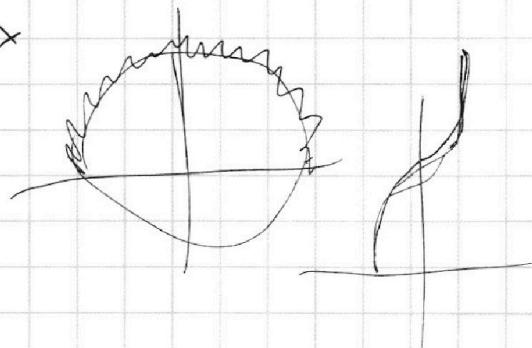
$$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$10 \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$8x = -4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot k \quad \cancel{25} \quad \cancel{21 \cdot 25}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot p \quad \cancel{8} \quad \frac{21}{25}$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \checkmark$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \quad \cancel{kpv} \quad \frac{13}{59}$$

$$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

$$k=3$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 24 \\ 28 \\ \hline 52 \end{array}$$

$$ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^6$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$a = 5^f \quad b = 5^k \quad c = 5^l$$

$$f+k=11$$

$$k+l=13$$

$$f+l=28$$

$$f-l=-2$$

$$2f=26$$

$$f=13$$

$$k=-2$$

$$l=15$$

$$f+k=13 \quad ||$$

$$k+l=15$$

$$\cancel{f+k+l=28}$$

$$f-l=0$$

$$2f=$$

$$f=$$

$$f-l=-4$$

$$f+l=28$$

$$2f=24$$

$$f=12$$

$$a = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$$

$$b = 2^p \cdot 3^q \cdot 5^r$$

$$c = 2^v \cdot 3^d \cdot 5^t$$

$$x+p=6 \quad p+q=14 \quad q+r=16$$

$$y+k=14 \quad k+d=21 \quad y+d=25$$

$$z+l=11 \quad l+f=13 \quad z+f=28$$

$$\begin{cases} x-y=-8 \\ x+y=16 \end{cases}$$

$$y-d=-7$$

$$y+d=25$$

$$2y=18$$

$$y=9 \Rightarrow d=16$$

$$\Downarrow$$

$$k=5$$

$$f+k=11$$

$$k+l=19$$

$$f+l=28$$

$$f-l=-8$$

$$2f=20$$

$$f=10 \Rightarrow l=9$$

$$\Downarrow$$

$$k=8$$

$$b = 2^p \cdot 3^q \cdot 5^r$$

$$c = 2^v \cdot 3^d \cdot 5^t$$

$$x+p=6 \quad p+q=14 \quad q+r=16$$

$$y+k=14 \quad k+d=21 \quad y+d=25$$

$$z+l=11 \quad l+f=13 \quad z+f=28$$

$$\Downarrow$$

$$p=2$$

$$y-f=-2$$

$$y+f=28$$

$$2y=26$$

$$y=13 \Rightarrow f=15$$

$$\Downarrow$$

$$l=-2$$

$$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^2$$

$$b = 4 \cdot 3^5 \cdot 0,25$$

$$b = 4 \cdot 3^5 \cdot 0,04$$

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{-2}$$

$$a = 16 \cdot 3^9 \cdot 5^{-2}$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{-15}$$

$$y-f=-6$$

$$y+f=28$$

$$\Rightarrow y=11$$

$$\Downarrow$$

$$l=0$$

$$\Downarrow$$

$$f=17$$

$$\begin{array}{l} y+b=11 \\ l+f=17 \\ y+f=28 \\ \hline 1 \\ 25 \end{array}$$