



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

т.к. $a^6: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{17}$, $b^6: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$
 $a^6: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$, то $a^6 \geq 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$, $b^6 \geq 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$
 $a^6 \geq 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$ ЗНАЧИТ $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = a^6 \cdot b^6 \cdot a^6$
 $\Rightarrow 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$. ЗАМЕТИМ, ЧТО СЛЕВА СТОИТ
КВАДРАТ, А СПРАВА НЕТ Т.К. 3 СТОИТ
В НЕЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ, ПРИ ЭТОМ Т.К.
~~КАЖДОЕ~~ КАЖДОЕ ИЗ ТРЕХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ
ДЕЛИТСЯ НА 3 В ОПРЕДЕЛЕННОЙ СТЕПЕНИ, ТО
 $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$ ДЕЛИТСЯ НА 3^{59} ~~СЛЕВА~~ НАИМЕНЬШИЙ
КВАДРАТ БОЛЬШИЙ $2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$ И ДЕЛЯЩИЙСЯ
НА ЭТО ЧИСЛО $(a^2 \cdot b^2 \cdot c^2)$ ДЕЛИТСЯ НА НЕГО, Т.К.
ИЗ-ЗА ТОГО ЧТО ЭТО ПРОИЗВЕДЕНИЕ $(a^6, b^6 \text{ И } a^6)$
ЭТО ЧИСЛО $2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$, А ТОГДА НАИМЕ
НЬШЕЕ ВОЗМОЖНОЕ ЗНАЧЕНИЕ $a^6 \cdot b^6 \cdot a^6 =$
 $= 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$
ОТВЕТ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

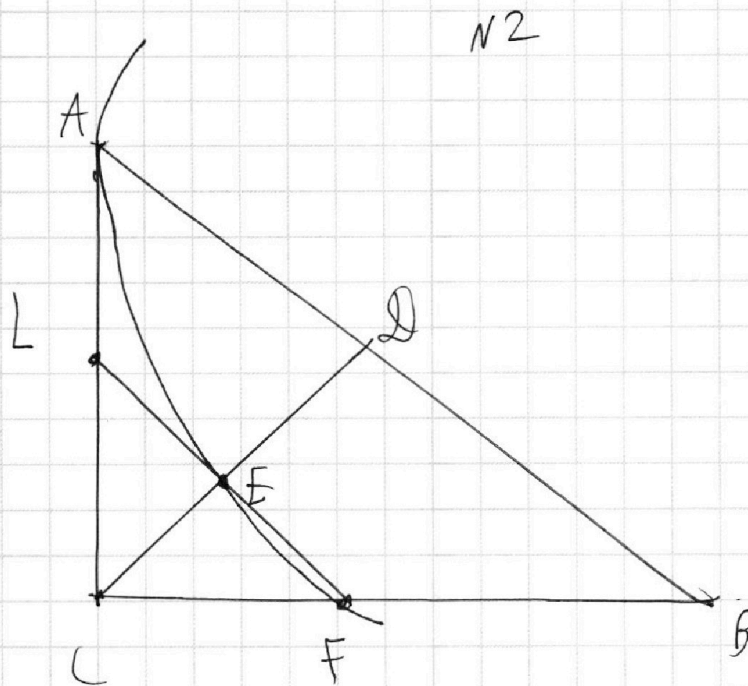
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

ACB - прямоугол.

треуг.

AB

ω - окр.

AC - касательная

ω

$$CD \cap \omega = E$$

$$(B \cap \omega) = F$$

$$EF = AB$$

$$AB : BD = 1 : 4$$

Найти:

SACB

SCEF

1. Т.к. $EF \parallel AB$, то $\triangle CEF \sim \triangle CDB$
 $\frac{CE}{CD} = k$

2. Возьмем $BD = x$, тогда
 $AB = 4x$, $AD = AB - BD = 3x$

3. Проведем EF и пересечем AC ,
 $AC \cap EF = L$, $LF \parallel AB$, значит, $\triangle CLE \sim \triangle ADC$
 $k_1 = \frac{CE}{CD} = k$, также $\triangle CLE \sim \triangle ACB$,
 $k_2 = \frac{LC}{AC} = \frac{CE}{CD}$ (из $\triangle CLE \sim \triangle ACB$) = k

4. По теореме о касательной и секущей
 $AL^2 = LE \cdot LF$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5. AL = AC - LC = AC - k \cdot AC = A(1 - k)$$

$$(из \triangle LEC \sim \triangle ACD)$$

$$6. из \triangle LEC \sim \triangle ACD, LE = k \cdot AD$$

$$из \triangle LEF \sim \triangle ACB, LF = k \cdot AB$$

$$7. AL^2 = A^2(1 - k)^2$$

$$LE \cdot LF = k^2 \cdot AD \cdot AB,$$

т.к. $\triangle ACB$ - прямоугол., AD - высота проведённая к гипотенузе, то $AD \cdot AB = AC^2$

$$8. AL^2 = LE \cdot LF, A^2(1 - k)^2 = k^2 \cdot AD \cdot AB,$$

$$A^2(1 - k)^2 = A^2 \cdot k^2, (1 - k)^2 = k^2$$

$$(1 - k)^2 - k^2 = 0$$

$$1 \cdot (1 - 2k) = 0$$

$$k = \frac{1}{2}$$

$$9. S_{ACD} = \frac{CD \cdot AD}{2} = \frac{CD \cdot 0,4x}{2}$$

$$S_{CEF} = S_{CDB} \cdot k^2 = \frac{CD \cdot DB}{2} \cdot k^2 = \frac{CD \cdot x}{2} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{CD \cdot 0,4x}{2} \cdot \frac{2}{CD \cdot x} \cdot 4 =$$

$$= \frac{0,4}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 1,6$$

ОТВЕТ: 1,6

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = 9\pi - 2x$$

Заметим, что $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\sin x) \leq \frac{\pi}{2}$

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \leq \pi, \quad 0 \leq 10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) \leq 10\pi,$$

значит $0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi, \quad -9\pi \leq -2x \leq \pi,$

$$9\pi \geq 2x \geq -\pi, \quad \frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}, \text{ также}$$

Заметим, что в зависимости от промежутка, где находится x , $\arcsin(\sin x)$

выражается по разному через x

1 случай: $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin x) =$

x

$$x \cdot 10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$-8x = 4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} - 10\pi x,$$

2 случай: $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right], \arcsin(\sin x) = \pi - x$

$$10\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = 9\pi - 2x$$

$$-5\pi + 10x = 9\pi - 2x$$

$$12x = 14\pi$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$12x = 14\pi$$

$$x = \frac{14}{12}\pi = \frac{7}{6}\pi - \text{постоянство}$$

$$3 \text{ случая, } x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right], \quad \text{AM}(\sin(\sin x)) = x - 2\pi$$

$$10 \left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x$$

$$25\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$16\pi = 8x$$

$$x = 2\pi - \text{постоянство}$$

$$4 \text{ случая, } x \in \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right], \quad \text{AM}(\sin(\sin x)) = 3\pi - x$$

$$10 \left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = 9\pi - 2x$$

$$10x - 25\pi = 9\pi - 2x$$

$$12x = 34\pi$$

$$x = \frac{34}{12}\pi = \frac{17}{6}\pi - \text{постоянство}$$

$$5 \text{ случая, } x \in \left(\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right] \quad \text{AM}(\sin(\sin x)) = x - 4\pi$$

$$10 \left(\frac{9\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x$$

$$45\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$36\pi = 8x$$

$$x = \frac{36}{8}\pi = \frac{9}{2}\pi - \text{постоянство}$$

т.к. $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$, то больше значений нет

ОТВЕТ: $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{7}{6}\pi$, $x = 2\pi$, $x = \frac{17}{6}\pi$, $x = \frac{9\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 & (2) \end{cases}$$

ПРЕОБРАЗУЕМ (2)

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0$$

Полученное уравнение равносильно системе (совокупности)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x^2 + (y+9)^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Полученная совокупность задается на плоскости две окружности ω_1 и ω_2 с центрами $(0,0)$; $(0, -9)$ и радиусами 5 ; 2 соответственно. (1) и уравнение задает прямую, но т.к. нам нужно найти a, b , при которых найдется a, b , то a можно считать произвольным параметром. При фиксированном a , значит (1) задает семейство прямых параллельных друг другу прямых, у каждой прямой из этого семейства один и тот же угловой коэффициент

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



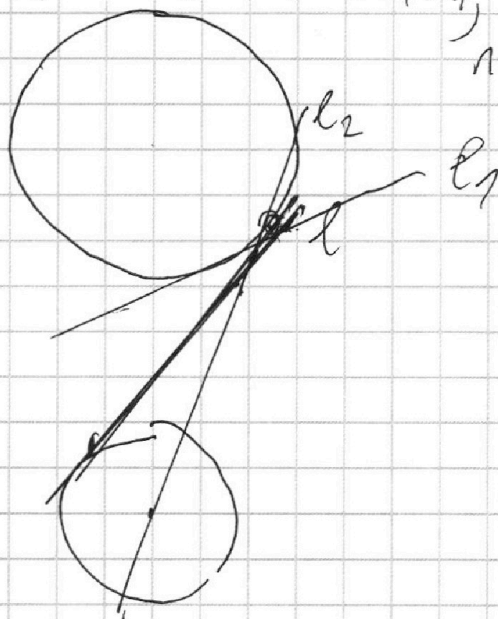
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если угловой коэффициент больше 0
и больше $\frac{4\sqrt{2}}{7}$, то найдётся такое b ,
что одна из прямых пересечёт
обе окружности, в иначе нет

(L_2 пересекает обе окружности, а e_1 либо одну,
либо ни одну)



Аналогично для $k < 0$ получаем,
что $k < -\frac{4\sqrt{2}}{7}$, случаи $k = \pm \frac{4\sqrt{2}}{7}$ нам
не подходят, ведь прямые только касаются
случай $k = 0$ тоже, ведь тогда прямая
параллельна Ox и очевидно, не может
сразу пересечь обе окружности. (в-на
вои коэффициенту семейства прямых),

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

НАБВЕМ $bx + by - 6 = 0$

$$5x + by - 6 = 0$$

$$5x - 6 = by$$

$$\frac{5}{b}x - \frac{6}{b} = y, \text{ если } b \neq 0$$

Если $b = 0$, то прямая задается

уравнением $5x - 6 = 0$ и параллельна

ось OY , такое a нам подходит,

т.к. при $b = 0$ прямая пересекает

все окружности.

и так, $\left[\begin{array}{l} k > \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ k < -\frac{4\sqrt{2}}{3} \end{array} \right.$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{5}{b} > \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ \frac{5}{b} < -\frac{4\sqrt{2}}{3} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{a} > \frac{24\sqrt{2}}{35} \\ \frac{1}{a} < -\frac{24\sqrt{2}}{35} \end{array} \right. \quad \text{✗}$$

$$\frac{1}{a} > \frac{24\sqrt{2}}{35} \\ 0 < a < \frac{35}{24\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{a} < -\frac{24\sqrt{2}}{35} \\ 0 > a > \frac{-35}{24\sqrt{2}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ПОЛУЧАЕМ

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 0 < \alpha < \frac{35}{24\sqrt{2}} \\ \alpha > \alpha > -\frac{35}{24\sqrt{2}} \end{cases}$$

Итого вый промежуток $\alpha \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$

ОТВЕТ: $\alpha \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

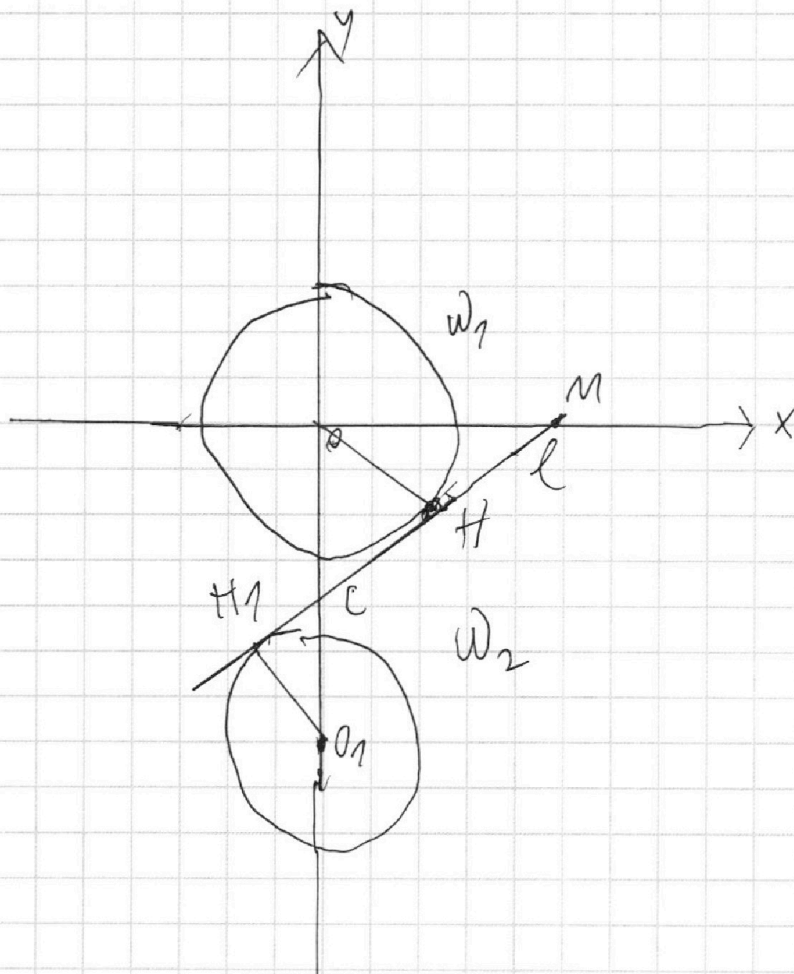


1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы нашлось b такое, что система
имеет 4 решения, нужно, чтобы
(решу семейства прямых нашлась хотя бы)
1 прямая, пересекающая обе окружности,
рассмотрим граничный случай, когда есть
прямая, касающаяся обеих окружностей



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Допустим O - центр ω_1 , O_1 - центр ω_2 ,
 ℓ - общая касательная, $\ell \cap \omega_1 = H$, $\ell \cap \omega_2 = H_1$,
 $HH_1 \perp OO_1 = E$, рассмотрим $\triangle HOC$ и $\triangle H_1O_1C$
они оба прямоугольные, $\angle H_1CO_1 = \angle OCH$ как
вертикальные, тогда $\triangle HOC \sim \triangle H_1O_1C$.

$$\frac{OC}{CO_1} = \frac{HO}{O_1H_1}, \quad \frac{OC}{O_1O - OC} = \frac{5}{2}, \quad \frac{OC}{9 - OC} = \frac{5}{2},$$

$$2OC = 45 - 5OC, \quad 7OC = 45, \quad OC = \frac{45}{7}.$$

Допустим, ℓ пересекает ось абсцисс

в точке M , $\triangle OCM$ - прямоугольник, OH - высота,

значит $\angle OCM = \angle OCH$, $\tan OMC = \tan OCH$

$$\tan OCH = \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^2 OCH} - 1} = \sqrt{1 + \frac{OC^2}{OH^2} - 1} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{5 \cdot 7}{45} - 1} = \sqrt{\left(\frac{OC}{OH}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{81}{49} - 1} =$$

$$= \sqrt{\frac{32}{49}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Заметим, что ввиду симметричности

окружностей относительно OY , вторая

общая касательная имеет противоположные

угловый коэффициент

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11}^4 (0,54) + \log_{0,54} 11 = \log_{0,125}^3 (11^{-13}) - 5$$

$$0,54 = t$$

$$xy = 2tx$$

$$\log_{11}^4 t + \log_t 11 = \log_t^3 (11^{-13}) - 5$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{matrix} x > 0 & t \neq 1 \\ t > 0 & t \neq 1 \end{matrix}$$

$$\text{На ОДЗ } \log_x^3 (11^{-13}) = -\frac{13}{3} \log_x 11$$
$$\log_x 11 = \frac{1}{\log_{11} x}, \quad \log_x^3 \frac{1}{121} = -\frac{2}{3} \log_x 11$$
$$\log_x 11 = \frac{1}{\log_{11} x}$$

Заменим, $\log_{11} t = a$, $\log_{11} x = g$, получим

$$a^5 - \frac{6a}{g} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{g} - 5 \quad (1)$$

$$a^5 + \frac{1}{g} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{g} - 5 \quad (2)$$

т.к. $t \neq 1$, $x \neq 1$, то на ОДЗ

(1) можем домножить на g ,

(2) на g , получим

$$a^5 g - 6 + \frac{2}{3} = -5g \quad (3)$$

$$a^5 g + 1 + \frac{13}{3} = -5g \quad (4)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ложим $(\frac{3}{x})$ и $(\frac{4}{y})$, получим $x^5 + y^5 = -5(x+y)$

$$x^5 + 5x + y^5 + 5y = 0$$

рассмотрим $f(x) = x^5 + 5x + y^5 + 5y$, y - фиксировано

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$f(x)$ монотонна на \mathbb{R} , значит

уравнение $f(x) = 0$ имеет не более

1 решения, при этом $x = -y$ является

решением (но т.к. $x \neq 0, y \neq 0, (0,0)$ -

не является решением)

поставим $x = -y$ в третье уравнение

$$-y^5 - 6 + \frac{2}{3} = 5y$$

$$y^5 + 5y = \frac{16}{3}$$

при этом (4) можно переписать как

$$y^5 + \frac{16}{3} = -5y$$

$$y^5 + 5y = -\frac{16}{3}$$

зверно, значит единственным решением

системы является $(-y, y)$, $y \neq 0$

тогда $x = -y$, $\log_{11} x = -\log_{11} y$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{17} t = \log_{11} \frac{1}{x}$$

$$t = \frac{1}{x}$$

$$t > 0, t \neq 1$$

$$\text{Тогда } xy = 2tx = 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 2$$

ОТВЕТ: 2

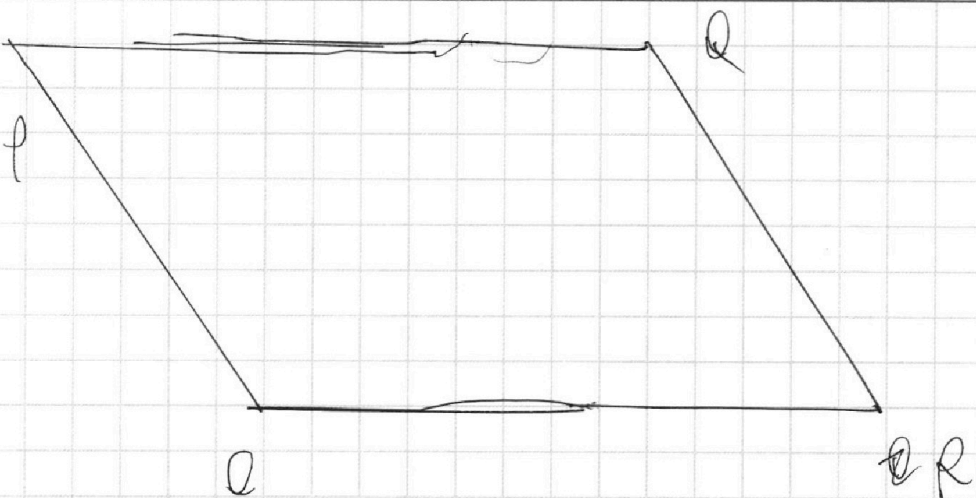
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



НАЙДЕМ $\operatorname{tg} \angle ORQ =$

$$\operatorname{tg} \angle ORQ = \frac{90}{15} = 6 \quad \text{т.к. } \angle ORQ = 90^\circ$$

y -координата $Q = 90$, y -координата $R = 0$,
 x -координата $Q = 2$, x -координата $R = 17$,
 $\operatorname{tg} = \frac{90}{17-2} = 6$

Замечим, что если мы уже выбрали точку B , то нам надо найти точки

на прямой $6x + y + 6x_2 + y_2 = 18$, такие, что x, y — целые числа и A лежит внутри $PQRO$.

Заметим, что такая прямая симметрична QR относительно O прямой, параллельной QR , относительно Ox .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

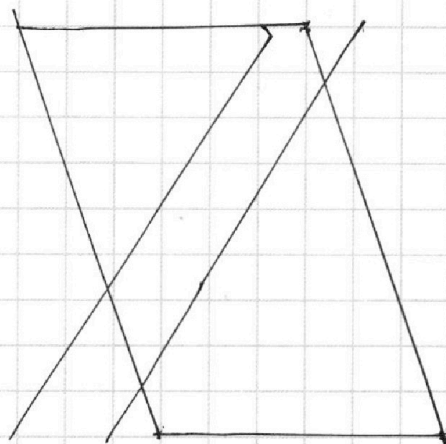
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Чтобы прямая
лежала хотя бы
частично, она должна
пересечь верхнюю
или нижнюю
сторону или

их проекции. Состав и ответ оценка
на бы⁶⁶ прямых, т.к. на объективности
стороны и проекции $17 - (-15) + 1 =$
 $= 33$ целочисленных точек, а всего
их в 2 раза больше), но т.к.,
 $y = 48x_2 + y_2 - 6x$, то если прямая
пересекла нижнюю сторону или
проекцию верхней в целочисленной
точке, то и верхнюю сторону или
проекцию нижней она пересечёт
в целочисленной точке т.к. шаг
по y будет 90, то шаг по x будет
15). значит, каждую прямую мы

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Посчитали 2 раза, то есть их всего
 $\frac{64}{2} = 32$, для прямых пересекающих
параллелограмм в точках от ~~(2,0)~~
(17,0) до (15,0) целочисленные
точки внутри параллелограмма
и на прямой нет. Для (15,0) она
отсюда

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$abc \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2$$

$$a = 2^x 3^y 5^z$$

$$b = 2^{x_1} 3^{y_1} 5^{z_1}$$

$$c = 2^{x_2} 3^{y_2} 5^{z_2}$$

$$y + y_1 = 13$$

$$y_1 + y_2 = 21$$

$$y_2 + y = 25$$

$$x + x_1 \geq 6$$

$$x_1 + x_2 \geq 11$$

$$x + x_2 \geq 16$$

$$2^{18} 3^{30} 5^{21}$$

$$\begin{cases} x + x_1 = 6 & x_2 - x = 8 \\ x_1 + x_2 = 11 \\ x + x_2 = 16 \end{cases}$$

$$511 - 5110 \cdot x = 911 - 2x$$

$$x_1 = 2$$

$$\begin{cases} x_2 - x = 8 \\ x + x_2 = 16 \end{cases}$$

$$x_2 = 12$$

$$x = 4$$

$$20 \cdot \sqrt{1-x^2} = 911 - 2x$$

$$y_2 - y_1 = 12$$

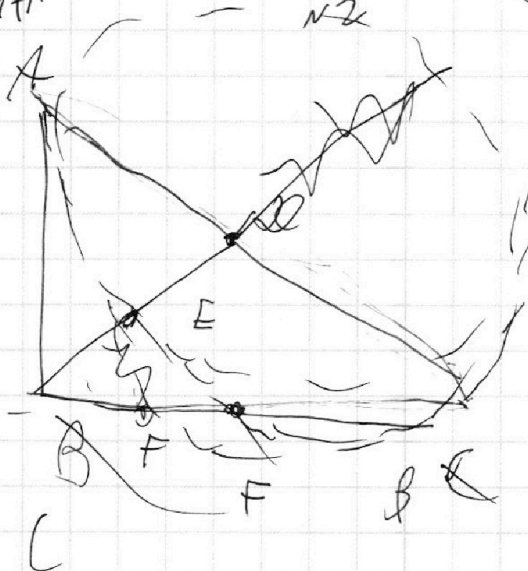
$$y_2 + y_1 = 21$$

$$60 - 10x^2 = 4x^2 \Rightarrow 364 > 14x^2 \Rightarrow 2y_2 = 33$$

$$-8x = 411$$

$$x = -\frac{411}{8}$$

$$14x^2 - 364x + 1811^2 - 10$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11} x - 6 \log x 11 = \log x^3 \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11} (x) + \log x 11 = \log_{11} (11^{-13}) - 5$$

$$\log_{11} x - 6 \log x 11 + \frac{13}{3} \log x 11 = -5$$

$$x > 1 \quad x^4 - \frac{6}{x} + \frac{2}{3x} = -5$$

$$0,5 < x < 1 \quad x^4 + 9x + \frac{1}{9} + \frac{13}{3x} = -5$$

$$x^5 - \frac{16}{3} = -5x$$

$$9x^5 + \frac{16}{3} = -5x$$

$$\log_{11} x = \log_{11} \frac{1}{x} \quad x^5 + 9x^5 = -5(x+9)$$

$$x = \frac{1}{x} \quad x^5 + 5x = \frac{16}{3}$$

$$x = \frac{1}{0,5y}$$

$$9x^5 - x^5 + \frac{32}{3} = -5 \cdot (9 - x)$$

$$x \cdot y = \frac{1}{0,5y} = (9-x)(9 \dots) = -\frac{32}{3}$$

\approx

$$x(x^4 + 5) + 9(9x^4 + 5) = 0$$
$$x = -9$$

$$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 18 \quad N4$

$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0$

$\sin \alpha = 5 \cdot \frac{7}{25} = \frac{7}{5}$
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5}$

$\frac{10}{15}$

$y - 6x = 18 - c$
 $y = 6x + 18 - c$

$\frac{|b|}{\sqrt{25 + 36a^2}} = 5$

$\frac{5}{2} = \frac{|6|}{|54a - 6|}$

$270 - 56 = 26$
 $270 - 56 = -26$
 $270 - 76 = 0$
 $270 - 36 = 0$
 $b = 90a$

$109_{11}^4 x - 6109_{11}^4 = 109_{11}^4 \frac{1}{72} - 5$

$\frac{54a - 6}{\sqrt{5^2 + 36a^2}} = 2$

$|54a - 6| =$
 $= | -6 |$
 $54a - 6 = 6$
 $27a = 6$

$x = \frac{45}{3}$

$9 - x = \frac{2}{5}$ $45 - 3x = 0$

$x = \frac{6 - 6ay}{5}$ $45 - 3x = 0$

$x = \frac{45}{3}$