



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab : 2^9 3^{10} 5^{10} \quad \text{i.e. } ab = k \cdot 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$bc : 2^{14} 3^{13} \cdot 5^{13} \quad \text{i.e. } bc = t \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{15} 3^{18} 5^{30} \quad \text{i.e. } ac = p \cdot 2^{15} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

Ряды можно записать между собой числом первых.

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 9 & \text{(1)} \\ a_2 + c_2 \geq 19 & \text{(2)} \\ b_2 + c_2 \geq 14 & \text{(3)} \end{cases} \quad \begin{cases} b_3 + a_3 \geq 10 & \text{(1)} \\ b_3 + c_3 \geq 13 & \text{(2)} \\ a_3 + c_3 \geq 18 & \text{(3)} \end{cases} \quad \begin{cases} a_5 + b_5 \geq 10 & \text{(1)} \\ b_5 + c_5 \geq 13 & \text{(2)} \\ a_5 + c_5 \geq 30 & \text{(3)} \end{cases}$$

здесь

рассмотрим  $a_i ; b_i ; c_i$  - это степени в которых входит

$a, b, c$ , имеющие в общем.

т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow a_i ; b_i ; c_i \geq 0 \text{ и } i \in \mathbb{Z}$ .

$$b_2 \geq 2, \quad c_2 - b_2 \geq 10. \quad c_3 - a_3 \geq 3.$$

min решение

$$\text{числ перв. } c_2 \geq 12$$

$$(a_2, b_2, c_2) = a_2 \geq 7$$

$$(7, 2, 12) \quad b_2 \geq 2$$

$$2c_3 \geq 21$$

$$c_3 \geq 10,5$$

$$b_3 \geq 2,5$$

$$a_3 \geq 7,5$$

... т.к.  $c_3$  может быть только 1

(2) решения с перв.

$$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 41$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 20,5$$

запись  
из  $(a_3, b_3, c_3) =$

$$\min \text{ значение из трех } 21 = (7, 3, 11)$$

$\Rightarrow$  подходит.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

③ шокин з перв.

$$2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 26,5 \quad 53$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 26,5$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 27$$

\*8 задач. пн.  $a_5 + b_5 + c_5 = 27$ .

Однако замечим, что есть равное перв.

$$a_5 + c_5 \geq 30 \quad \text{так как } b_5 \text{ в 8 целых ненул. числах}$$

(нечет.)

Но можно сделать ограничение, что  $a_5 + b_5 + c_5 \geq 30$ .  
и имен. значение будет 30.

④ шокин з перв.

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 42$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$$

мин значение 21 при  $(a_2; b_2; c_2) = (7; 2; 12)$

$$\text{тогда } abc = 2^{7+2+12} \cdot 5^{10+10+20} \cdot 3^{7+3+11} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

Андрей.

Минимальное значение  $a_2 + b_2 + c_2$

$$D. \text{ бс: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}.$$



- |                          |   |                                     |   |                          |   |                          |   |                          |   |                          |   |                          |   |
|--------------------------|---|-------------------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> | 1 | <input checked="" type="checkbox"/> | 2 | <input type="checkbox"/> | 3 | <input type="checkbox"/> | 4 | <input type="checkbox"/> | 5 | <input type="checkbox"/> | 6 | <input type="checkbox"/> | 7 |
|--------------------------|---|-------------------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

Дано:

$\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ )

$AB \parallel EF$

$$\frac{AB}{DB} = \frac{3}{1}$$

$CD$ -биссектриса.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$$

Решение:

из уговору. отрезов.

6 прямыхуголь  $\triangle$   
 $ACB$  и высоты  $CD$ :

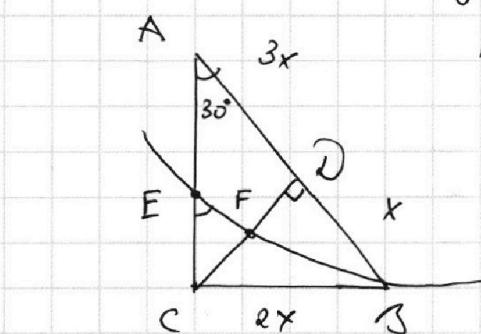
$$AC = \sqrt{AD \cdot AB} =$$

$$2x\sqrt{3}$$

$$CB = \sqrt{BD \cdot BA} =$$

$$2x \cdot \sqrt{AD \cdot DB} =$$

$$x\sqrt{3}$$



$$\text{поскольку } AB = x \Rightarrow AD = 3x \Rightarrow AB = 4x$$

заменим, что  $2CB = AB \Rightarrow$  бр.  $\triangle ABC$

$$\angle CAB = 30^\circ \text{ и } \angle CBA = 60^\circ$$

т.к.  $EC \parallel AB$  и  $4x$ -ки  $AECFB$  вписаны вк.

и  $AE \parallel FB$

т.к.  $AB \parallel EF$  - трапеция, а значит равнобедр.

тогда  $\angle EAB = \angle FBA = 30^\circ \Rightarrow FB$ -диагональ.

$\angle CBO$  ( $\angle CBA = 60^\circ$   $\angle FBD = \frac{1}{2}\angle CBA = 30^\circ$ )

$$\Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{FD}{DB} \Rightarrow \frac{CF}{FD} = \frac{CB}{DB} = \frac{2}{1}. \quad CF = 2FD. \\ FD = \frac{CF}{2}$$

т.к.  $FE \parallel AB$  то.

$$\angle EFL = \angle ADC = 90^\circ = \angle ACB.$$

$$FD + CF = x\sqrt{3}.$$

$$\angle CEF = \angle CAB = 30^\circ.$$

$$\frac{3}{2}CF = x\sqrt{3}.$$

$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle ABC \Rightarrow$

$$CF = \frac{2x\sqrt{3}}{3} = \frac{2x}{\sqrt{3}}.$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \left(\frac{CB}{CF}\right)^2 = \left(\frac{2x\sqrt{3}}{2x}\right)^2 = 3$$

Отв: 3.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3.

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}. \quad \arcsin(\cos v) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\text{DD3: } \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \leq \frac{\pi}{2} \quad \frac{x}{5} \leq \frac{2\pi}{5} \quad x \leq 2\pi$$
$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \geq -\frac{\pi}{2}. \quad \frac{x}{5} \geq -\frac{3\pi}{5} \quad x \geq -3\pi.$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2}\right) \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2} + 2\pi a = \frac{x}{5} - \frac{2}{5}\pi + 2\pi a$$

$$x = -\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi b. = -\frac{x}{5} + \frac{2}{5}\pi + 2\pi b$$

$$\frac{4}{5}x = -\frac{2}{5}\pi + 2\pi a, \quad \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}\pi + 2\pi b,$$

$$4x = -2\pi + 10\pi a, \quad a \in \mathbb{Z} \quad 6x = \frac{2}{6}\pi + \frac{10}{6}\pi b, \quad b \in \mathbb{Z}$$

$$1) \quad 4x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi a, \quad 2) \quad 6x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi b,$$

$$1) \quad -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi a \leq 2\pi. \quad -\left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\pi a\right) \geq -\frac{3\pi}{5} \quad 3 - \frac{1}{2} = 2,5$$

$$\frac{5}{2}a \leq 2,5$$

$$5a \leq 5$$

$$a \leq 1$$

$$\frac{5}{2}a \geq -2,5$$

$$a \in \{-1; 0; 1\}$$

$$a \geq -1$$

$$2) \quad \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi b \leq 2\pi \quad \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi b \geq -3\pi \quad \text{i.e. } b \in \{-1; 0; 1\}$$

$$1 + 5b \leq 6$$

$$5b \leq 5$$

$$b \leq 1 \quad 1 + 5b \geq -3. \quad b \geq -\frac{8}{5}$$

$$b \geq -1,6$$



На одной странице можно оформлять **только** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

рнда  $x = -\frac{n}{2} - \frac{5n}{2} = -\frac{6n}{2} = -3n$ .

$$x = -\frac{n}{2}$$

$$x = -\frac{n}{2} + \frac{5n}{2} = 2n$$

$$x = \frac{n}{3} + \frac{5n}{3} = 2n$$

$$x = \frac{n}{3} - \frac{5n}{3} = -\frac{4n}{3}$$

$$x = \frac{n}{3}$$

Отвр:  $x = \{-3n; -\frac{4n}{3}; -\frac{n}{2}; \frac{n}{3}; 2n\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4.

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & -\text{окружность с центром } b(0,0) \text{ и} \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 & \text{радиусом 3.} \end{cases}$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4 \quad -\text{окружность с центром } b(6;0) \text{ и} \\ \text{радиусом 2.}$$

$$(1) 2y = 3b - ax$$

$$y = -\frac{a}{2}x + 1,5b$$

Такие значения

этого параметра.

б отвечает за

удаленность

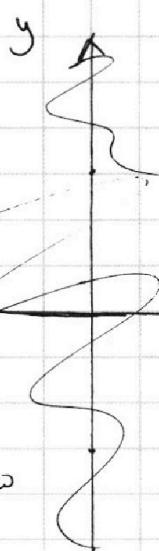
ширина прыжка

от оси обусловлена

(видимо смотреть в

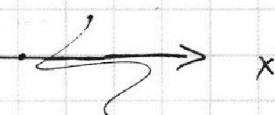
видео ОДЗ. И.К.)

б - предполагаемый параметр  
удаленность должна быть  
不小於 ; а - радиус сим. пересеч. макс б 2x точек  
меньше пределов.



будет иметь когда

предикат (1) при любом  
параметре б не будет



пересекать б 4x точках

это же означает.

(предикат 1 означает что макс  
число точек)



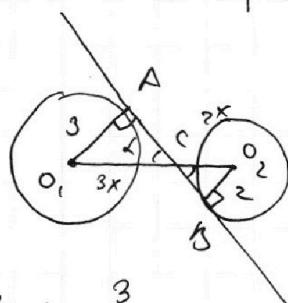
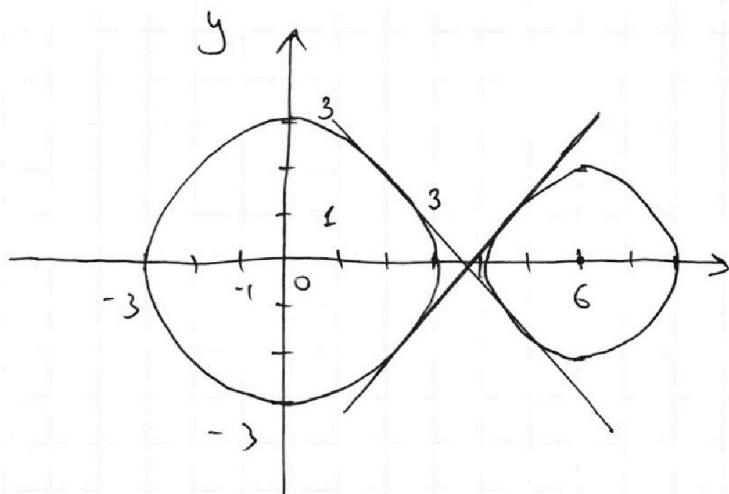
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\tan \alpha = \frac{3}{AC}$$

$$AC = \sqrt{\left(\frac{18}{r}\right)^2 - 9} = \frac{3\sqrt{11}}{r}$$

$$\tan \alpha = \frac{3\sqrt{11}}{3\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}$$

$$r \cdot \ell - \frac{a}{2} = \frac{-5}{\sqrt{11}} \quad (\text{оконч. напом.})$$

$$a = \frac{10}{\sqrt{11}}$$

$$\text{Тогда } \tan \alpha \in \left(-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}}\right] \cup \left[\frac{10}{\sqrt{11}}, +\infty\right)$$

Чтобы значение  $\tan \alpha$  не лежало при  $\alpha \in [0, \pi]$ .

Значения  $\tan \alpha$  особых значений  $\alpha$  можно исключить. Тогда  
 $\alpha$ , для которых будет пересекаться две окр. в  $\theta$  в двух  
полукружностях. т.е.  $\alpha$ :

$$\alpha \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$$

Записали в  
граничные  
значения это две  
насечившие  
(один извн.)  
и двумя окр.

премещаясь между  
нас. всплывшиими  
будет пересекать обе окр.  
в двух полукружностях и всплыть  
не раз. Всплывши не пересек.

Запись если для  
будет ЧВ. в напом.  
первой (меньшей  
) то получится  
будет аналогичной  
один из пересекет обе  
полукружности, всплыть  
не всплынет.

и сплющиваются для всплытия  
насечивших

$$a = -\frac{10}{\sqrt{11}}$$

$$\triangle O_1AC \sim \triangle CO_2B$$

$$\frac{O_1A}{O_2B} = \frac{O_1C}{CO_2} = \frac{3}{2}$$

$$O_1C + CO_2 = 6$$

$$5x = 6 \quad O_1C = \frac{18}{r}$$

$$x = \frac{6}{r}$$

$$O_2C = \frac{12}{r}$$

запись если для

будет ЧВ. в напом.  
первой (меньшей  
) то получится

будет аналогичной  
один из пересекет обе  
полукружности, всплыть  
не всплынет.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$x > 0$$

$$x \neq 1.$$

$$243 = 3^5$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 - \frac{5}{2} \log_x 3 = -8.$$

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x 3 = -8. \quad \log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} = -8.$$

$$\log_3^4 (sy) + 2 \log_{sy} 3 = \log_{2sy^2} 3'' - 8$$

$$sy > 0 \quad y > 0$$

$$sy \neq 1 \quad y \neq \frac{1}{s}$$

$$\log_3^4 (sy) + 2 \log_{sy} 3 - \frac{11}{2} \log_{sy} 3 = -8.$$

$$\log_3^4 (sy) - 3,5 \log_{sy} 3 = -8. \quad \log_3^4 sy - \frac{3,5}{\log_3 sy} = -8$$

Рассмотрим <sup>вариантное</sup> ~~действие~~:  $\log_3^4 t + \frac{3,5}{\log_3 t} = -8. \quad \text{②}$

$$\text{②} \quad \log_3^4 t + \frac{3,5}{-\log_3 t} = \log_3^4 t + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{t}} \quad \text{③}$$

$$\log_3^4 \frac{1}{sy} + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{sy}} = \log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} = \log_3^4 \frac{1}{t} + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{t}}$$

$$\log_3^4 \frac{1}{sy} + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{sy}} = \log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} \quad \text{и т. д.} \quad \log_3^4 t - \frac{3,5}{\log_3 t} = \log_3^4 \frac{1}{t} + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{t}}$$

$$\log_3^4 \frac{1}{sy} + 3,5 \left( \frac{\log_3 x sy}{\log_3 \frac{1}{sy} \log_3 x} \right) = 0.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^3 5xy + \frac{3,5 \log_3 5xy}{\log_3 \frac{1}{xy} \log_3 x} = 0.$$

$$\log_3 5xy \left( \log_3^3 5xy + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{xy} \log_3 x} \right) = 0.$$

$$\log_3 5xy = 0$$

$$5xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

$$\log_3^3 5xy = -\frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{xy} \log_3 x}$$

$$(a+b)^3 = \frac{3,5}{ab}$$

Orts:  $\frac{1}{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

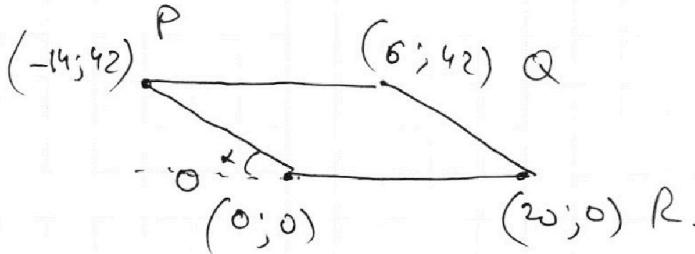
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6



$A(x_1; y_1)$   $B(x_2; y_2)$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$\Delta y_2 = \frac{42}{14} = \frac{6}{2} = 3$$

1. e. прямая  $PQ$  имеет вид  $y = -3x$   $QR$   $y = -3x + b$ .

$$0 = -60 + b$$

$$b = 60$$

$$y = -3x + 60$$

$$PQ : y = 42$$

$$OR : y = 0$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 3\Delta x + \Delta y = 33.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta y = 33 - 3\Delta x \\ \Delta y_{\max} = 42 - 0 = 42 \\ \Delta y_{\min} = 0 - 42 = -42 \end{array} \right.$$

$$\Delta x_{\max} = 20 - 0 = 20$$

$$\Delta x \quad \Delta y. \quad \Delta x_{\min} = 0 - 20 = -20.$$

$$-20 \quad 42. \quad \text{---} \quad 33 + 60 = 93.$$

---

$$\frac{42}{-33}$$

$$-3 \quad \dots \quad 42.$$

$$-2 \quad \dots \quad 39$$

$$-1 \quad \dots \quad 36$$

$$0 \quad \dots \quad 33$$

$$1 \quad \dots \quad 30$$

$$2 \quad \dots \quad 27$$

$$3 \quad \dots \quad 24$$

$$\dots$$

$$20 \quad -27$$

когда  $x = 1$

$$-9 = 3\Delta x$$

$$30$$

$$\Delta x = -3.$$

$$33 + 6 = 39$$

$$33 - 60 =$$

$$\frac{-60}{-33}$$

$$33 - 3\Delta x = -42.$$

$$75 = 3\Delta x \quad \Delta x = 25$$

1. e. быв. бр. 24. Обр: 24.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

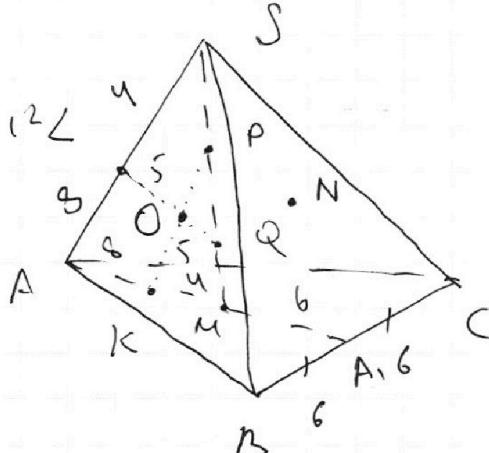
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 7



$$SQ = PM$$

$$SP = MQ \quad (\text{не вписана})$$

расстоян. от. верх. фигуры  
P и Q это отрезки боковых  
боковых ребер

$$S_{\Delta ABC} = 90$$

$$SA = BC = 12$$

$$AL = AK - \text{одинак. выс. к } w$$

$$SL = \sqrt{SP \cdot SQ} = \sqrt{MQ \cdot MP} = 10 \text{ см}$$

$$\text{т.к. } SA = AM = 12$$

$$AM = \frac{2}{3} AA_1$$

$$12 = \frac{2}{3} AA_1, \quad AA_1 = 18$$

последовательно  $AB = a, AC = b$ .

$$\sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2 - 12^2}{4}} = 18.$$

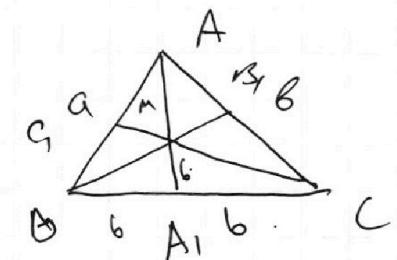
$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 324 \\ + 144 \\ \hline 468 \end{array}$$

$$2a^2 + 2b^2 - 144 = 324.48$$

$$2a^2 + 2b^2 = 1440 \quad || \cdot 4$$

$$a^2 + b^2 = 720$$

$$\begin{array}{r} 1296 \\ - 1440 \\ \hline 144 \end{array}$$



$$CG = \sqrt{\frac{2 \cdot 144 + 2b^2 - a^2}{4}}$$

$$BB_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 144 + 2a^2 - b^2}{4}}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{1}{4} \sqrt{288 + 2a^2 + 2b^2}$$

Зададим,  $\angle BAC = 120^\circ$  и  $BC = 6$ .  $AA_1$ -выс.  $= \frac{1}{2} BC = 3$ .

т.к.  $\angle BAC = 120^\circ$  и  $BC = 6$ , то  $AA_1$ -выс.

$AA_1 = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \quad 1 \cdot AA_1 = 81$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{15}{30} \cdot 18 \cdot g = 1215 \quad + \frac{405}{81}$$

$$\cancel{42} \quad \cancel{15} \quad \underline{1215}$$

SN <sub>нас.</sub> W  
и SL <sub>нас.</sub> W (середина стороны  
основания SNL)

$$\text{нужно найти } SN = SL = 4 \Rightarrow LA = 8$$

AH - биссектриса  $\angle ABC$ .

$$\frac{AH \cdot BC}{2} = SW \cdot AH = 15$$

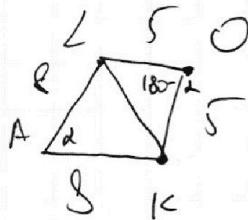
нужно найти  
биссектрису  $\angle A$ .  $S_{ABC}$ .

$$\frac{AH \cdot 18}{2} = 90$$

AH  $\approx$  ?

no i. WS:

$$25 + 25 + \cos 2 \cdot 25 \cdot 2 = 64 + 64 - 2 \cdot 64 \cos \alpha$$



$$\begin{array}{r} 12 \\ + 18 \\ \hline 30 \\ \times 2 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 128 \\ - 80 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 78 \\ 36 \\ 18 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$192 \cos \alpha = 78$$

$$\cos \alpha = \frac{78}{192} = \frac{18}{48} = \frac{3}{8}$$

нужно найти WS  $\sin \alpha$

$$ASA_1: 12^2 + 18^2 - 12 \cdot 18 \cdot 2 \cdot \frac{3}{8} = SA_1^2 = 231$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ 7144 \\ \hline 468 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 612 \\ 618 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 768 \\ - 237 \\ \hline 531 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 3 \\ \hline 231 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 21 \\ \hline 231 \end{array}$$

$$SA_1 = \sqrt{231}$$

$$\begin{array}{r} 632 \\ - 55 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 79 \\ \hline 79 \end{array}$$

Отв: 3) 1215



Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$\frac{5}{2} \log_3 x$$

243 181

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x 3 = -8$$

$\frac{\log_3^4 x}{\log_3 3}$

$$\log_3^4 t + 3,5 \log_t 3 = -8 \quad \text{c. о.}$$

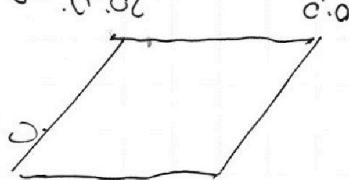
$$t^4 = \frac{3,5}{\log_3 t} + \sqrt[4]{3,5 \log_3 t}$$

$$t^4 = \frac{3,5 \log_3 t - 7}{\log_3 t}$$

h7

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_3 3 = -8$$

$$t^4 + 3,5 t + 8 = 0$$



$$\log_3 x \cdot \log$$

(1)

$$t^4 - \frac{3,5}{t} + 8 = 0 \quad \text{(н. н.)}$$

$$\log_{x^2} 3^{12-5}$$

$$-\log_{x^2} 3^2$$

$$88 \quad 98 \quad 88 \quad 24$$

$$\log_{x^2} \frac{t^4 + 3,5}{t} \text{ or } 0,0$$

$$\log_{25y^2} 3^{12-4} = \log_{(5y)^2} 3^7$$

$$24 \quad \log_{x^2} t^4 + 3,5 = 0 \quad \text{н. н.}$$

$$\log_3^4 xy + 3,5 \log_x 3 - 3,5 \log_y 3 = -16$$

$$t^4 + \frac{3,5}{t} = -8 \quad \text{н. н.}$$

$$3,5 (\log_x 3 - \log_y 3) =$$

$$\frac{1}{\log_3 x} - \frac{1}{\log_3 y}$$

$$24 \quad \frac{1}{t} = \frac{14,18}{2} \quad \text{н. н.}$$

$$\frac{\log_3 y - \log_3 x}{\log_3 x \log_3 y}$$

$$\log_3 \frac{y}{x} = \frac{14,18}{2} + (x - 2x) \beta$$

$$-2x \beta$$

$$\log_3 x = -\log_3 xy.$$

P(0,0)

$$xy = t$$

$$\frac{1}{t} = \log_y x$$

$$(0,0)$$

$$\frac{x \log_3 y}{3,5} - x \log_y 3$$

$$\frac{\log_3 y}{t} = x \quad (x)P$$



L



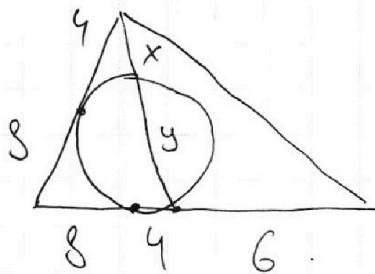
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

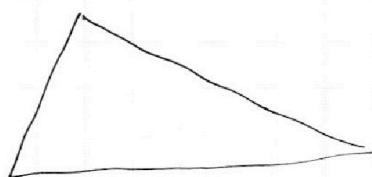
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4 = x(x - \epsilon y)$$

График



$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 2 \\ \hline \end{array}$$

$$128 - x \cdot 64 \cdot 2 = 25 + 2.25x$$

$$103 = 144x$$

$$x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8.$$

*verneut*

$$\begin{array}{r} 243 \\ - 18 \\ \hline 63 \end{array}$$

$$3^5$$

$$\log_3^4 x + \log_x 3 = -8.$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3^3$$

$$\log_3^4 x + \log_x 3 = -8$$

$$\frac{5}{2} \log_x 3.$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ - 35 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\log t^4 + 3,5 + 8 = 0.$$

$$t^5 + 3,5 t + 8t = 0$$

$$t^5 + 7 + 16t = 0$$

$$\log t^4 - \log 3^5 y +$$

$$t^5 + 3,5 t + 8t = 0$$

$$t^5 + 7 + 16t = 0$$

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x 3 = \log_3^4 35 \Leftrightarrow 3,5 \log 35^3.$$

$$\frac{11}{2} - 5,5$$

$$\log_3^4 x - \log_3^4 35 = -1,5 (\log x^3 + \log 35^3)$$

$$\begin{array}{r} 220 \\ - 35 \\ \hline 185 \end{array}$$

$$\log x^3 - \log 35^3 = -1,5$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10} - \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10} - \frac{1}{5}$$

$$\left( \frac{\log x}{1} - \frac{\log 35}{1} \right) 35 - 91 = \log x^3 - \log 35^3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \operatorname{arcsinh}(\cos x) = x + \frac{a^3 + b^3}{2}$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$ax + 2y - 3b = 0. \quad 2y = -ax + 3b.$$

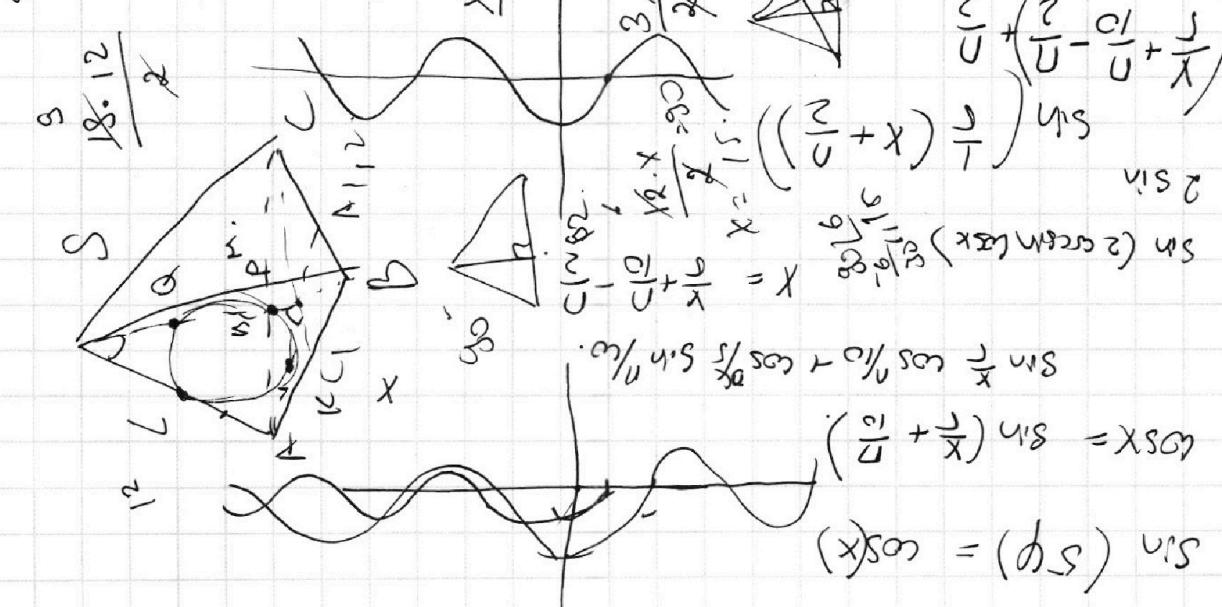
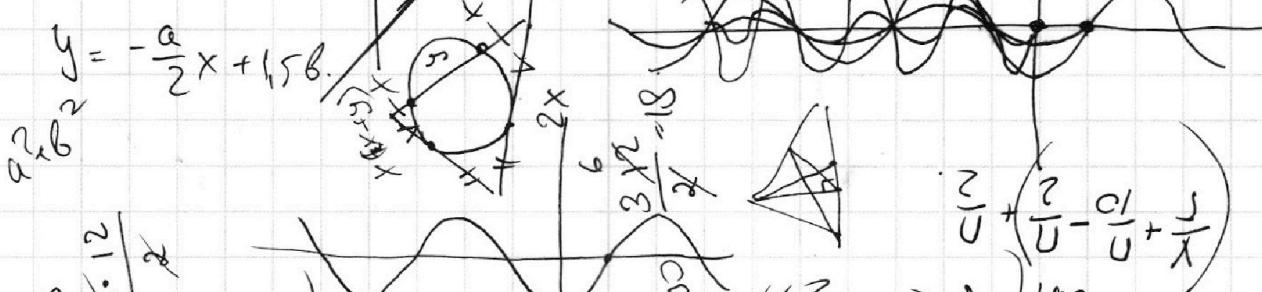
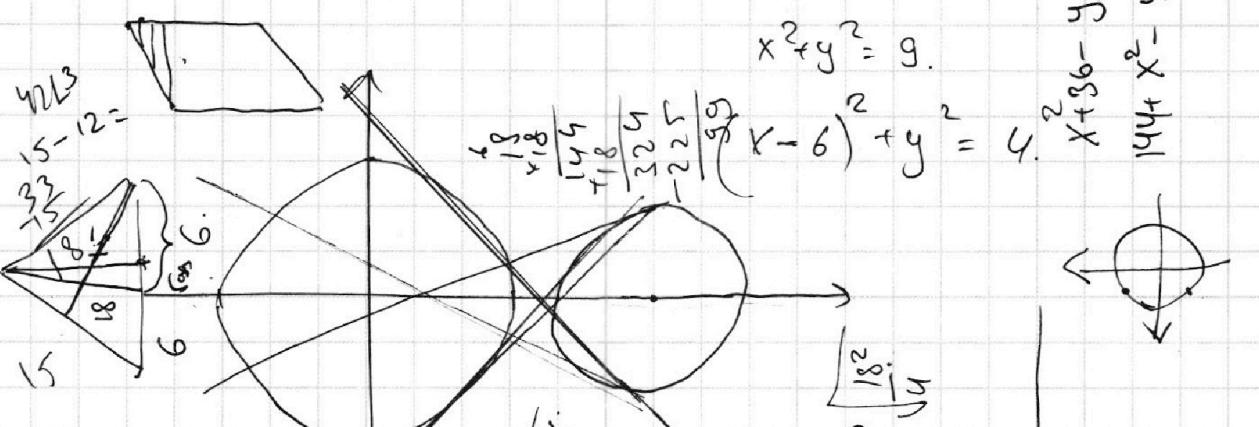
$$\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\log_3 t}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x^2 + y^2 = 9. \quad x^2 + y^2 - 9 = 0. \quad x^2 + y^2 - 9 = 0.$$

$$x^2 + y^2 = 9.$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4.$$



$$x = \frac{a}{2} + \frac{10}{2} - \frac{b}{2}$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}(x + \frac{b}{2})\right)$$

$$2 \sin$$

$$\sin(2 \operatorname{arctg}(2x))$$

$$x = \frac{a}{2} + \frac{10}{2} - \frac{b}{2}$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{b}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{b}{2}\right) = \sin(x)$$

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{b}{2}\right)$$

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{b}{2}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик.

$$ab : 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$a+b+c \geq 21$$

$$bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$2^3$$

$$ac : 2^{19} 3^{18} 5^{?0}$$

$$5^3 2^2 \\ 2^6 \\ \hline 7^7$$

$$ab = k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ + 40 \\ \hline 59 \end{array}$$

$$bc = d \cdot 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ + 28 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$ac = t \cdot 2^{19} 3^{18} 5^{?0}$$

$$3^{10} \cdot 3^{13} \cdot 3^{18}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ - 18 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$41$$

$$a^2 b^2 c^2 = k+d \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot 5^{25} \sqrt{k+d} 3 \cdot 5$$

$$\begin{array}{l} b-c=-10 \\ a+b=29 \\ b=2 \\ c=12 \\ a+c=19 \\ a=7 \end{array}$$

$$41$$

$$3 \cdot 3$$

$$a \cdot b$$

$$3 \cdot 5$$

$$bc$$

$$ac$$

$$2^9 3^{10} 5^{10} a \cdot b$$

$$2^{19} 3^{18} 5^{30} a \cdot c$$

$$\infty 5 \infty$$

$$m 6 m$$

$$= v 0$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 14 \\ \hline 112 \end{array}$$

$$10 = a+b$$

$$30 = a+c$$

$$14 = a-b$$

$$b-c c-b = 8$$

$$14 13 = b+c$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ - 10 \\ \hline 0 \end{array} a-b=10$$

$$b+c=13$$

$$16 = a-b$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ - 10 \\ \hline 0 \end{array} a=10$$

$$2c=22$$

$$2a = 26 a=13$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ - 20 \\ \hline 0 \end{array} b=0$$

$$c=11$$

$$b=3$$

$$a=7$$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

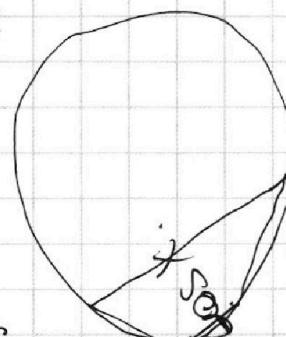
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos(\sin(\cos x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

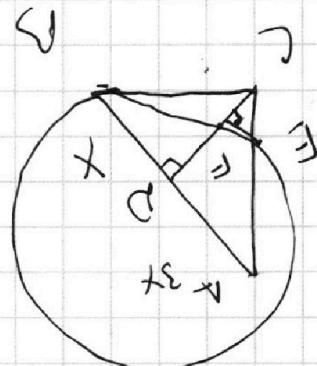
$$\cos(\sin(\cos x)) = \frac{x + \pi}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\cos(x) + \pi/2}{2}\right) = \cos\left(\frac{\cos(x) + \pi/2}{2}\right)$$



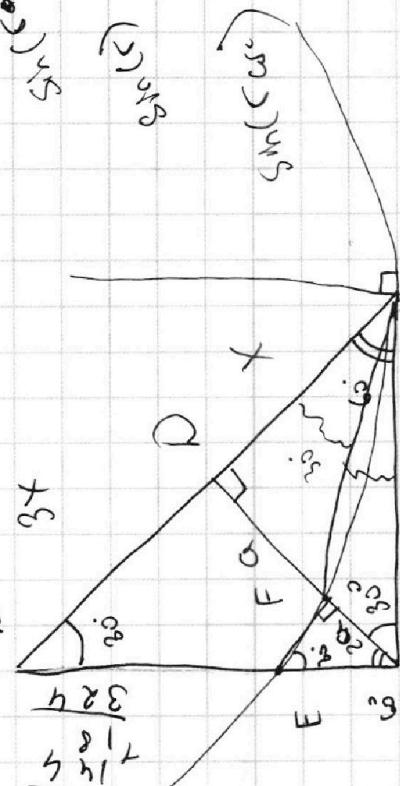
$$\cos x = \sin\left(\frac{x + \pi/2}{2}\right)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$



$$CA = \sqrt{x^2 + r^2} = \sqrt{r^2 + 2x^2}$$

$$\frac{5}{2} - \frac{2}{24}x = \frac{2}{24}x - \frac{5}{2}x$$



$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2x}{2x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

