МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

V

V

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

√

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

V

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 25\right)\left(x^2 + y^2 + 18y + 77\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

√

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$ab \vdots 2^6 3^{13} 5^{11}$ (1)

$bc \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{13}$ (2)

$ac \vdots 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$ (3)

пусть каждое из чисел a, b, c представимо в виде:

$n = 2^{\alpha_n} \cdot 3^{\beta_n} \cdot 5^{\gamma_n}$.

(очевидно что других простых не встречается в разложении этих чисел, иначе они были бы не наименьшими)

$a = 2^{\alpha_a} 3^{\beta_a} 5^{\gamma_a}$ $b = 2^{\alpha_b} 3^{\beta_b} 5^{\gamma_b}$ $c = 2^{\alpha_c} \cdot 3^{\beta_c} \cdot 5^{\gamma_c}$

(1): $\alpha_a + \alpha_b \geq 6$ $\beta_a + \beta_b \geq 13$ $\gamma_a + \gamma_b \geq 11$

(2) $\alpha_b + \alpha_c \geq 14$ $\beta_b + \beta_c \geq 21$ $\gamma_b + \gamma_c \geq 13$

(3) $\alpha_a + \alpha_c \geq 16$ $\beta_a + \beta_c \geq 25$ $\gamma_a + \gamma_c \geq 28$

найти $\min(\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c)$, $\min(\beta_a + \beta_b + \beta_c)$, $\min(\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c)$

складывая каждое из выражений (1), (2), (3) получаем ~~условие~~ ограничение снизу:

$2(\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c) \geq 6 + 14 + 16 = 36 \Rightarrow \alpha_a + \alpha_b + \alpha_c \geq 18$

$2(\beta_a + \beta_b + \beta_c) \geq 13 + 21 + 25 = 59 \Rightarrow \beta_a + \beta_b + \beta_c \geq 29,5$,

однако $\beta_a + \beta_b + \beta_c \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sum \beta \geq 30$

$2(\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c) \geq 11 + 13 + 28 = 52 \Rightarrow \gamma_a + \gamma_b + \gamma_c \geq 26$

Ответ:

$\Rightarrow \min abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

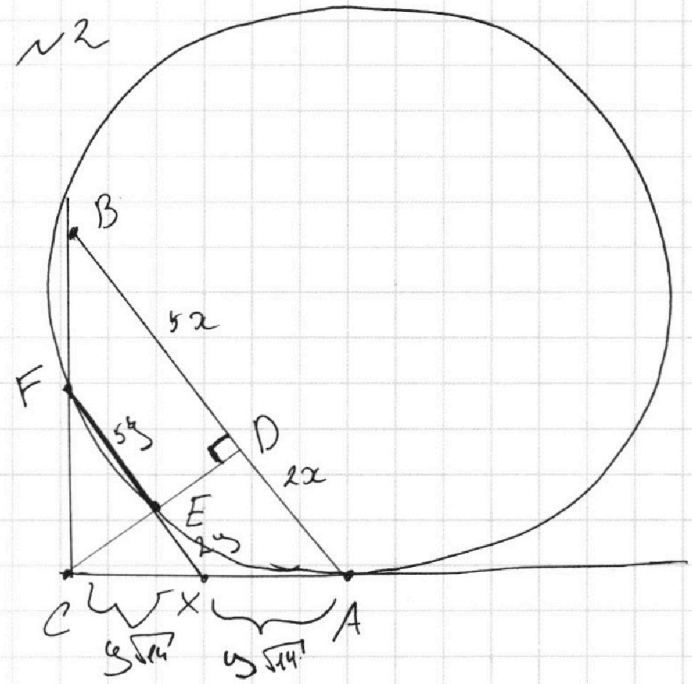
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2



$AB : BD = 1,4 \Rightarrow$

$\frac{AB}{BD} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

пусть $AB = 7x$
$BD = 5x$
$DA = 2x$

$EF \parallel AB \Rightarrow$ преобразование $FX \to BA$ - гомотетия с центром в $C \Rightarrow FE : EX = BD : DA$

пусть $CA^2 + CB^2 = 49x^2$ (из п/у $\triangle ABC$)

$CA^2 - 4x^2 = CB^2 - 25x^2$ (приравнивание высот CD в п/у $\triangle CDA$ и $\triangle CDB$)

$CB^2 = CA^2 + 21x^2 \Rightarrow 2CA^2 = 28x^2 \Rightarrow CA = \sqrt{14}x$

$\Rightarrow$ аналогично в $\triangle FXC$ из x меняется на $y \Rightarrow CX = \sqrt{14}y$

по т. о секущей и касательной $XE \cdot EF = XA \Rightarrow$ $XA = \sqrt{14}y \Rightarrow$

$\triangle CFX \overset{k}{\sim} \triangle CBA$, $k = \frac{1}{2} \Rightarrow$ ~~CE = ED~~

$\triangle CFE \overset{k}{\sim} \triangle CBD \Rightarrow S_{\triangle CFE} = \frac{1}{4} S_{\triangle CBD}$ (1)

у $\triangle CDA$ и $\triangle CBD$ общая высота $\Rightarrow$

$\frac{S_{CBD}}{S_{CDA}} = \frac{BD}{DA} = \frac{5}{2} \Rightarrow S_{\triangle CBD} = \frac{5}{2} S_{\triangle CDA}$ (2) $\Rightarrow$

Ответ

(1) $S_{\triangle CFE} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} S_{\triangle CDA} = \frac{5}{8} S_{\triangle ACD} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CFE}} = \frac{8}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

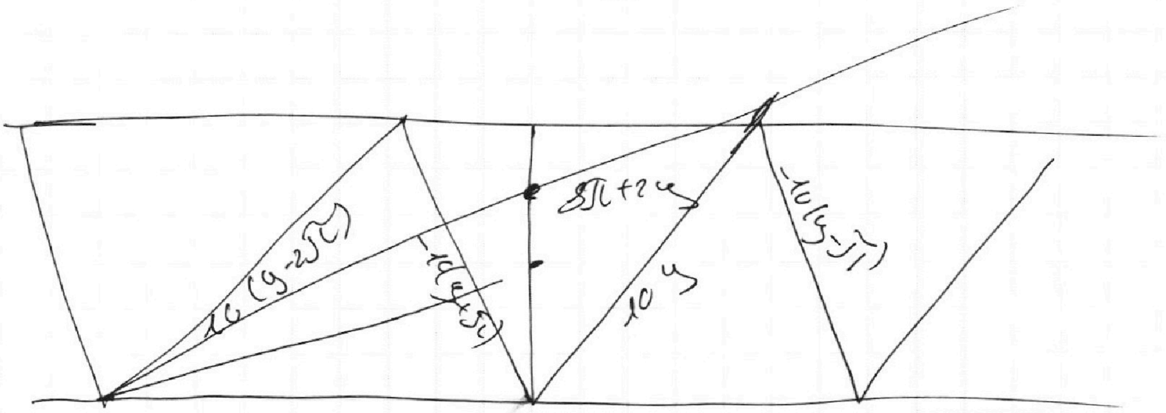
МФТИ

№3

$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$x = \frac{\pi}{2} - y$

$\arccos(\cos y) = 8\pi + 2y$



1) $8\pi + 2y = 10y \Rightarrow y = \pi \Rightarrow x = -\frac{1}{2}\pi$

2) $8\pi + 2y = -10(y-\pi) \Rightarrow 12y = 2\pi \Rightarrow y = \frac{\pi}{6};\ x = \frac{\pi}{3}$

3) $8\pi + 2y = 10(y-2\pi) \Rightarrow 8y = 16\pi \Rightarrow y = 2\pi \Rightarrow$

$8\pi + 2y > 10\pi \Rightarrow$ ~~нет решений~~ $y = \frac{16}{12}\pi = -\frac{4}{3}\pi$ $x = \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right) = \pi\frac{3+8}{6} = \frac{11}{6}\pi$

4) $8\pi + 2y = -10(y+\pi) \Rightarrow 12y = -16\pi \Rightarrow y = \frac{\pi}{6}$ $\cancel{x = \frac{2}{3}\pi}$

5) $8\pi + 2y = 10(y+2\pi) \Rightarrow 8y = 8\pi - 20\pi \Rightarrow$ $y = -1{,}5\pi$ $\cancel{x = 1{,}5\pi}$ $x = 2\pi$

6) $8\pi + 2y = -10(y+3\pi) \Rightarrow \cancel{12y = 22\pi}$

$12y = -38\pi \quad y = -\frac{38}{12}\pi = -\frac{19}{6}\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{19}{6}\pi =$

$= \frac{22}{6}\pi \quad = \frac{3+19}{6}\pi$

7) $8\pi + 2y = 10(y+4\pi) \Rightarrow y = -4\pi,\ x = 4{,}5\pi \Rightarrow$

Это последний случай, т.к. $8\pi+2y$ уже обратилось в 0, а решение существует только тогда, когда пересечение происходит при $y \geq \frac{11}{6}\pi$

Ответ: $-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{11}{6}\pi,\ 2\pi,\ \frac{22}{6}\pi,\ 4{,}5\pi$

№4

$$\begin{cases}5x+6ay-b=0\\(x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0\end{cases}\quad(2)$$

при задании параметра a, мы выбираем всреди всех прямых с полученным тангенсом наклона, и если мы найдем такую прямую, что она ~~пересекает~~ и (2) имеет 4 точки пересечения, то подобный параметр a нам подходит

(1): $6ay=b-5x \Rightarrow y=\frac{b}{6a}-\frac{5}{6a}x \Rightarrow$

$-\frac{5}{6a}=$ tg наклона прямой при $a=0 \rightarrow$ прямая $\perp$ оси ox

(2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+y^2=25\\x^2+(y+9)^2=4\end{array}\right.$

крайние случаи ~~по~~ тангенса наклона соответствуют случаю касания о к получившейся окружности

внутреннего касания

угол α (см рисунок 1) в этом случае такой, что

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{9^2-7^2}}{7}=\frac{\sqrt{32}}{7}$

$\Rightarrow$ tg наклона $\in(-\infty;-\operatorname{tg}\alpha)\cup(\operatorname{tg}\alpha;+\infty)$

$-\frac{5}{6a}\in(-\infty,-\operatorname{tg}\alpha)\cup(\operatorname{tg}\alpha;+\infty)$

$\Rightarrow \frac{6a}{5}\in\left(-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha};\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$ $\Longrightarrow$ подставляя $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{7}{\sqrt{32}}$ получаем

$a\in\left(-\frac{5}{6}\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha};\frac{5}{6}\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$

Ответ:

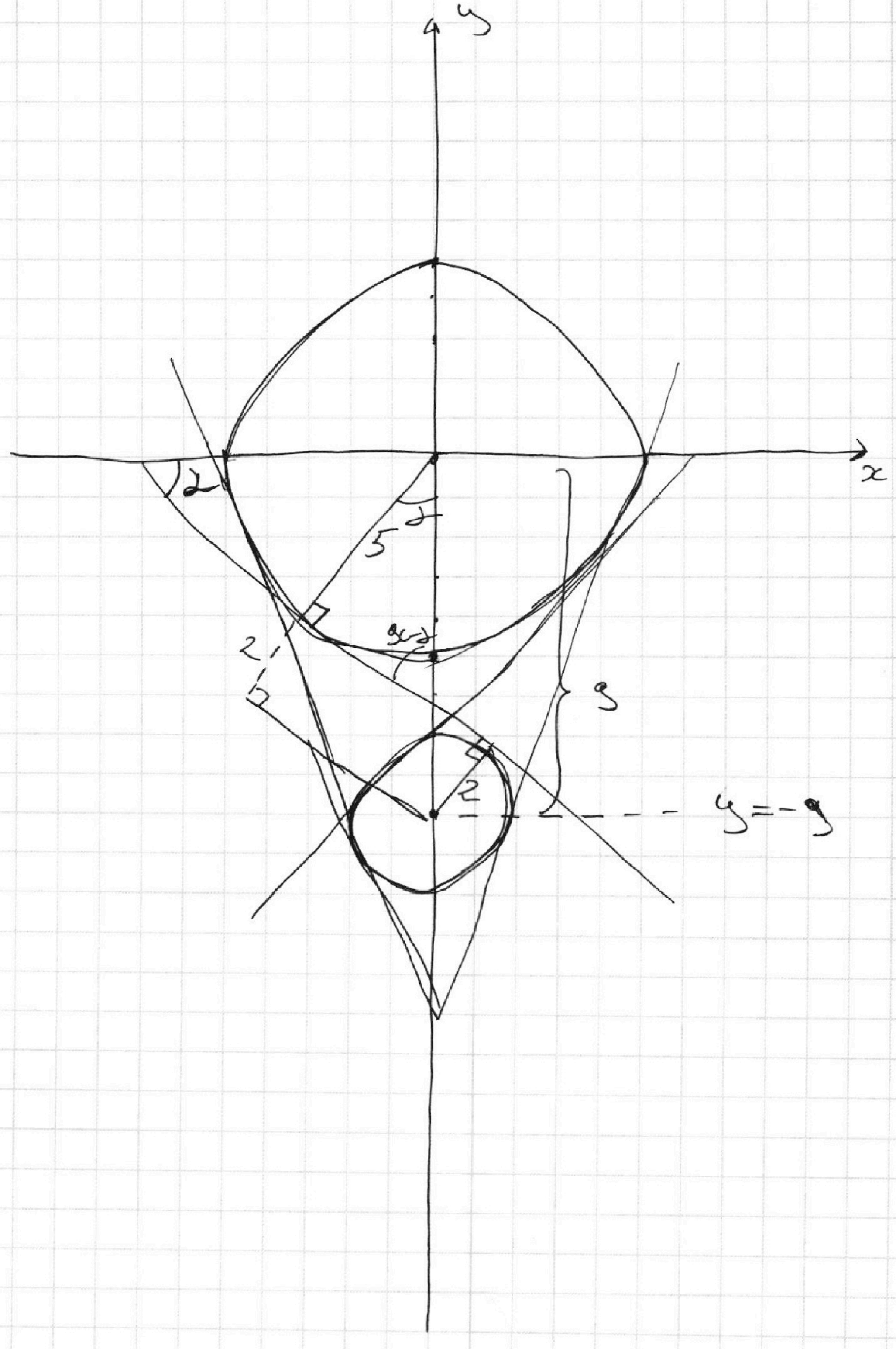
$a\in\left(-\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{\sqrt{32}};\ \frac{5}{6}\cdot\frac{7}{\sqrt{32}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

рисунок 1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5 = -2\log_{x^3} 11 \\ \log_{11}^4\left(\frac{1}{2}y\right) + \log_{\frac{1}{2}y} 11 = \log_{\left(\frac{1}{2}y\right)^3}\left(11^{-13}\right) - 5 = \end{cases}$$

$$-13\log_{\left(\frac{1}{2}y\right)^3}(11) - 5$$

$x > 0 \quad \frac{1}{2}y > 0 \quad x \neq 1 \quad y \neq 2 \quad \frac{1}{2}y = t$

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 + 2\log_{x^3} 11 = \log_{11}^4 t + \log_{t} 11 + 13\log_{t^3} 11$$

пусть $x = 11^a \quad t = 11^b$

$$a^4 - 6\frac{1}{a} = -\frac{2}{3}\frac{1}{a} - 5$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3}\frac{1}{b} - 5$$

$a \neq 0$ и $b \neq 0$
(проверено подстановкой)

$a^4 + \left(\frac{\cancel{2}-16}{3}\right)\frac{1}{a} = -5$

$b^4 + \frac{16}{3}$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{16}{3}\frac{1}{a} = -5 \\ b^4 + \frac{16}{3}\frac{1}{b} = -5 \end{cases}$$

~~$3a^5 - 16a = -$~~

$3a^5 - 16 = -15a$

$3b^5 + 16 = -15b$

$3a^5 + 15a = 16$

$3b^5 + 15b = -16$ $\Rightarrow$

~~мон~~ ф-ции монотонно растут $\Rightarrow \exists!$ единственное значение для a и b, которое можно угадать подбором

$\Rightarrow \exists!$ произведение xy

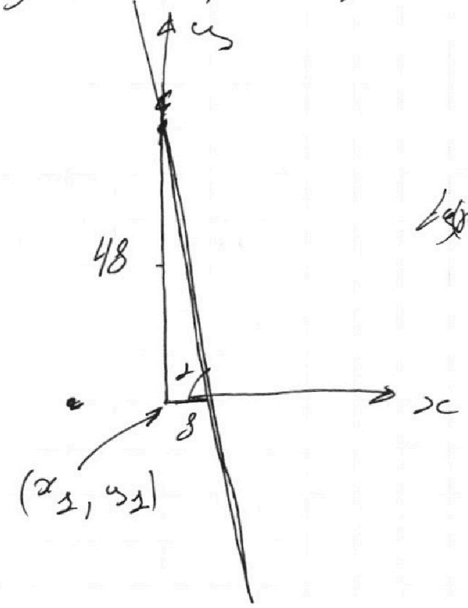
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

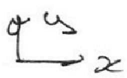
пусть фиксированы координаты x_1 и y_1 точки A

изобразим ГМТ, таких, что $6x_2+y_2=48$



$tg\,\alpha - 6$

$tg(\beta)\ \frac{90}{17} < 6$



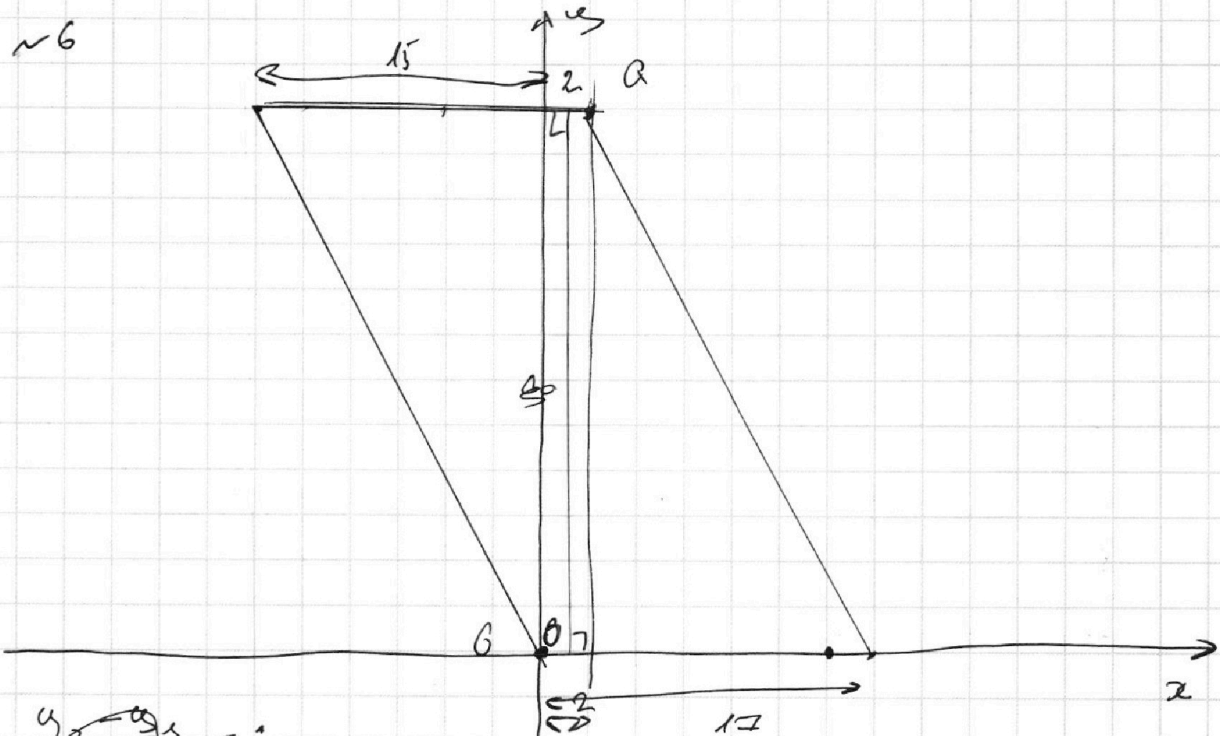
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6

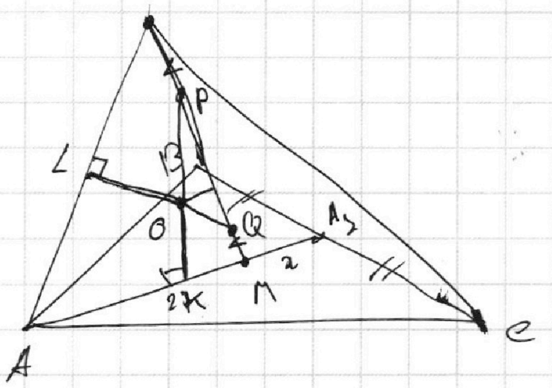


$y_2 - y_1 \equiv 0 \pmod{6}$, т.к иначе равенство $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1$ нарушается, т.к $x_2 - x_1$ оказывается нецелым числом

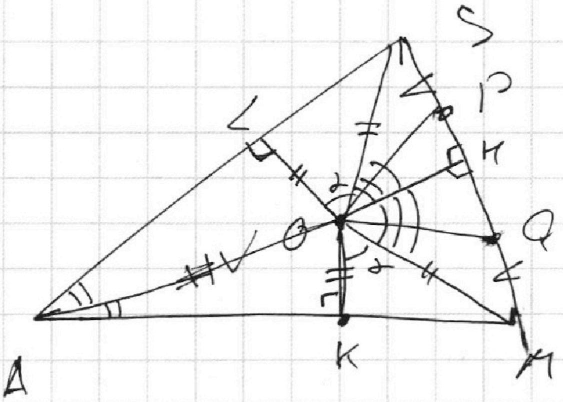
На границе длиной, отличной от 17 есть ровно 4 целые точки: O, P, Q, R.

Для каждой точки ~~на плоскости~~ внутри параллелограмма посчитаем кол-во точек B, удовлетворяющих условию, затем полученную сумму разделим на 2, т.к каждая пара считывается дважды (если т.A и т.B удовлетворяют условию, то и (т.B и т.A удовлетворяют)

№7



рассмотрим △ ASM



PC = QO по условию ⇒

PH = HQ ⇒ SH = HM

(QM = SP) ⇒ SC = OM

∠SAC = ∠KAC ⇒ ∠ACL = ∠ACK; ∠SCH = ∠MCH т.к

△SCH = △MCH ⇒ ∠SOL = ∠HOK ⇒ } ⇒

KC = OL

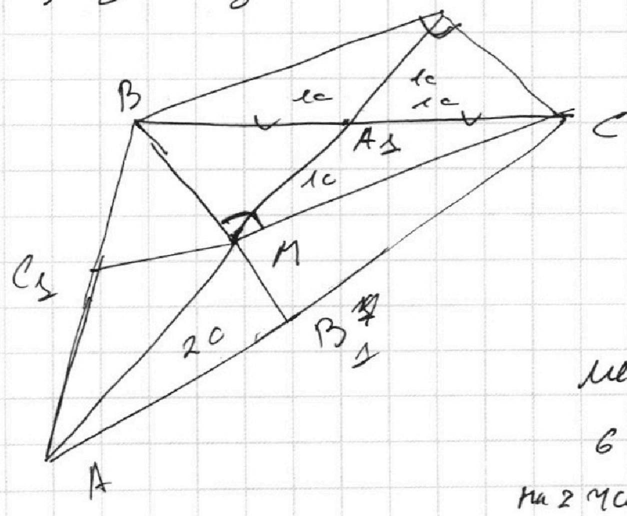
MC = CS

△ASM – р/б ⇒ AM = 20

рассмотрим △ABC

медианы делятся точкой пересечения в отношении 2:1 ⇒

$MA_1 = 10$ ⇒



$BM = \frac{2}{3} BB_1$

$CM = \frac{2}{3} CC_1$

т.к $BC = 20$, $BA_1 = A_1C$ ⇒

$BA_1 = A_1C = \frac{BC}{2} = 10$ ⇒

△BMC – п/у

медианы делят любой △ на

6 равновеликих частей ⇒

на 2 части (△BMC) приходится $\frac{1}{3}$ площади

⇒ $S_{BMC} = \frac{180}{3} = 60$

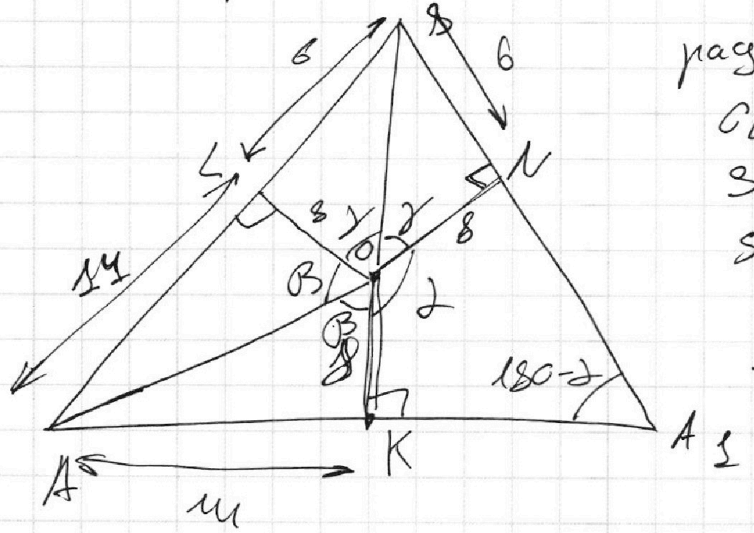
$S_{\triangle BMC} = BM\cdot MC\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot BB_1\cdot CC_1 \Rightarrow = 60$

$BB_1\cdot CC_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot 2\cdot 60 = 9\cdot 30 = 270$

$AA_1 = 30 \Rightarrow$

1) $AA_1\cdot BB_1\cdot CC_1 = 270\cdot 30 = \underline{8100} \Leftarrow$ Ответ

2) ~~Отсюда~~ рассмотрим ~~угол~~ $\triangle ASA_1$



радиус = 8 →
$OL = ON = OK$
$SN = 6 \Rightarrow$
$SL = 6$ (касательные к сфере равны)
$\Rightarrow LA = 20 - 6 = 14 = AK$
$tg\beta = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$
$tg\gamma = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\alpha = 180^\circ - 2\,arctg\,\gamma - 2\,arctg\,\beta$

$\Rightarrow 180-\alpha$ — двугранный угол, т.к. KO и ON — нормали

$\Rightarrow$ двугранный угол $= 180 - \alpha = 2(arctg\,\gamma + arctg\,\beta) =$

$=$ Ответ $= 2\left(arctg\frac{3}{4} + arctg\frac{7}{4}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

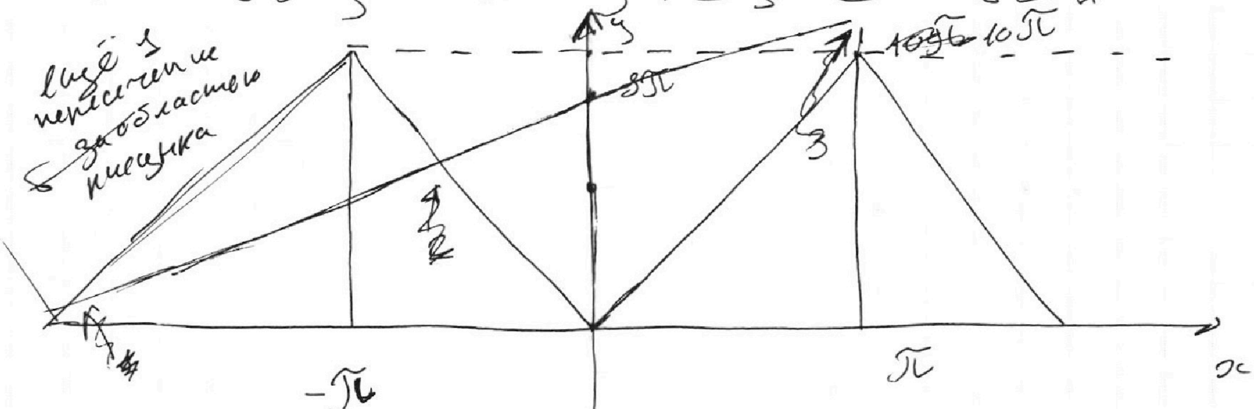
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№9

$10\arccos(\sin x) = 8\pi - 2x$ пусть $x = \frac{\pi}{2} - y$, тогда

$10\arccos(\cos y) = 9\pi - \pi + 2y = 8\pi + 2y \Rightarrow y = \pi$

$\cancel{10\arccos 10\, y = 8\pi - y \Rightarrow 11y = 8\pi \Rightarrow y = \frac{8\pi}{11}}$



рассмотрим ~~три случая~~ некоторые случаи

$10(y+2\pi) = 8\pi + 2y$

$8y = 8\pi - 20\pi \Rightarrow y = \pi - 2{,}5\pi = -1{,}5\pi$

$y = -1{,}5\pi \Rightarrow x = 0{,}5\pi - y = 2\pi$ 1)

$10(y) = 8\pi + 2y \Rightarrow y = \pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$ 2)

$10(y+4\pi) = 8\pi + 2y$

$8y = 8\pi - 40\pi \Rightarrow y = \pi - 5\pi = -4\pi \Rightarrow x = 4{,}5\pi$

$10(y+6\pi) = 8\pi + 2y \Rightarrow 8y = 8\pi - 60\pi \Rightarrow y = \pi - 7{,}5\pi = -6{,}5\pi$. при таком значении пересечение происходит при $y<0 \Rightarrow$ не подходит

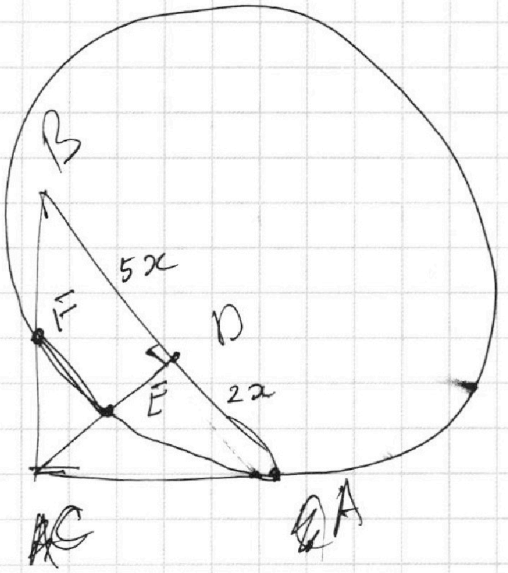
$10(y-2\pi) = 8\pi + 2y$ $8y = 18\pi$ $y > 2\pi \Rightarrow$
$8\pi + 2y > 10\pi \Rightarrow$ этот случай не реализуется

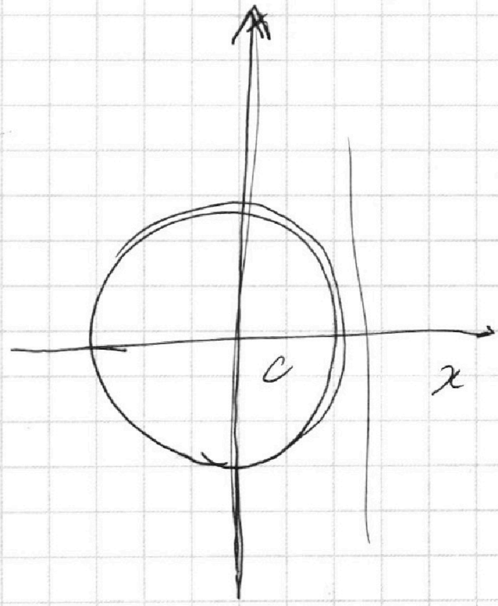
Ответ: $-\frac{\pi}{2}, 2\pi, 4{,}5\pi$

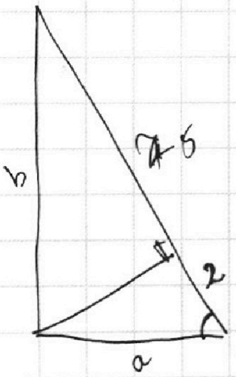
№ 7

$AB : BD = 1{,}4$

$\frac{AB}{BD} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$







$a^2+b^2=17^2$

$a^2-24=b^2-25$

$6x_2-6x_1+y_2-y_1=48$

$6x_2+y_2=48+6x_1+y_1$

$(y_2-y_1)\vdots 6$

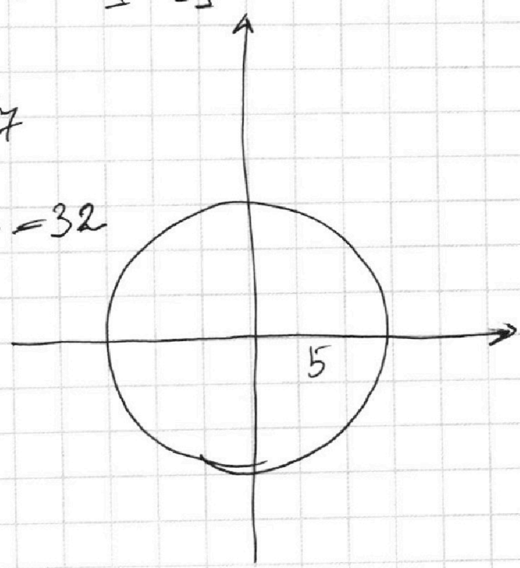
0; 7

$x^2+y^2+18y+77=$

$=x^2+(y+9)^2-$

$81-4y=32$

$81-77=4$



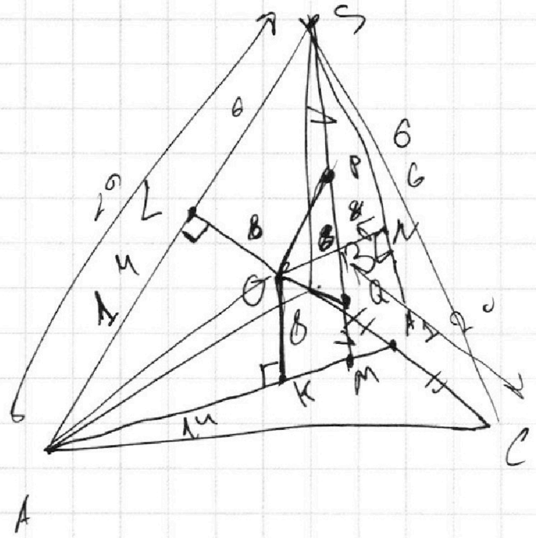
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

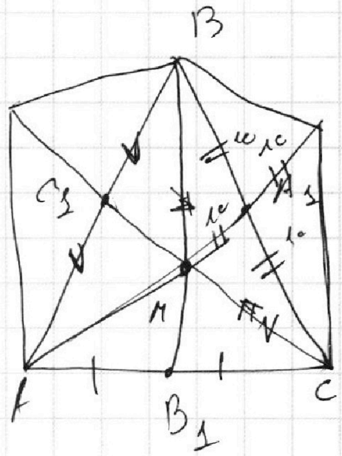
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

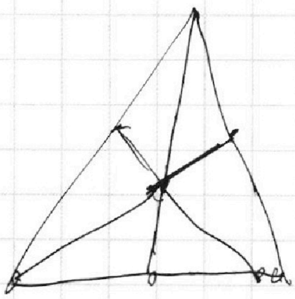
МФТИ

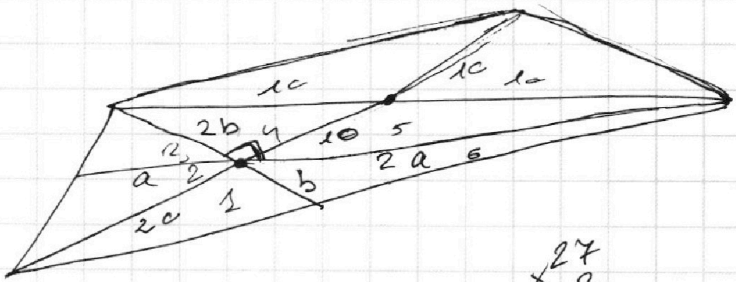
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7









$\times\begin{array}{r}27\\3\end{array}$ 81

$\frac{180}{6} = 30$ $\quad$ ~~50~~ $\gamma = \frac{3}{5}$