



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y^2} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$; $b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$; $c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$,
где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
тогда Т.к. $abc : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$, то $\begin{cases} \alpha_1 + b_1 \geq 9 \\ \alpha_2 + b_2 \geq 10 \\ \alpha_3 + b_3 \geq 10 \end{cases}$

аналогично $\begin{cases} \alpha_1 + c_1 \geq 19 \\ \alpha_2 + c_2 \geq 18 \\ \alpha_3 + c_3 \geq 30 \end{cases}$ и $\begin{cases} b_1 + c_1 \geq 14 \\ b_2 + c_2 \geq 13 \\ b_3 + c_3 \geq 13 \end{cases}$

Чтобы произведение abc было наименьшим, во всех
(нуль, чтобы $\alpha_1 + b_1 + c_1; \alpha_2 + b_2 + c_2; \alpha_3 + b_3 + c_3$, больше либо равны)

неравенствах должно стоять равенство.

1) $\begin{cases} \alpha_1 + b_1 = 9 \\ \alpha_1 + c_1 = 19 \\ \alpha_1 + c_1 = 14 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha_1 = 9 - b_1 \\ 9 - b_1 + 14 - b_1 = 19 \\ c_1 = 14 - b_1 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha_1 = 9 - b_1 \\ 2b_1 = 4 \\ c_1 = 14 - b_1 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha_1 = 7 \\ b_1 = 2 \\ c_1 = 12 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \alpha_2 + b_2 = 10 \\ \alpha_2 + c_2 = 18 \\ \alpha_2 + c_2 = 13 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha_2 = 10 - b_2 \\ 10 + 13 - 2b_2 = 18 \\ c_2 = 13 - b_2 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha_2 = 10 - b_2 \\ 2b_2 = 5 \\ c_2 = 13 - b_2 \end{cases} \Rightarrow b_2 \notin \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow$

известно

$\Rightarrow b$ какое-то из ~~неравенств~~ не может выполняться равенство

Чтобы произведение abc уменьшилось максимально, увеличим
минимальное из неравенств

$\begin{cases} \alpha_2 + b_2 = 11 \\ \alpha_2 + c_2 = 18 \\ \alpha_2 + c_2 = 13 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha_2 = 11 - b_2 \\ 24 - 2b_2 = 18 \\ c_2 = 13 - b_2 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha_2 = 8 \\ b_2 = 3 \\ c_2 = 10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \alpha_3 + b_3 = 10 \\ \alpha_3 + c_3 = 30 \\ \alpha_3 + c_3 = 13 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha_3 = 10 - b_3 \\ 23 - 2b_3 = 30 \\ c_3 = 13 - b_3 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha_3 = 8 \\ b_3 = -\frac{7}{2} \\ c_3 = 10 \end{cases}$

$\Rightarrow b_3 \notin \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow$ не может выполняться
равенство

~~2) ведущий вид~~ в ~~наименьшем~~ ~~результате~~ ~~найдено~~

~~$\begin{cases} \alpha_3 + b_3 = 11 \\ \alpha_3 + c_3 = 30 \\ \alpha_3 + c_3 = 13 \end{cases}$~~

~~$\begin{cases} \alpha_3 = 11 - b_3 \\ 24 - 2b_3 = 30 \\ c_3 = 13 - b_3 \end{cases}$~~

~~$\begin{cases} \alpha_3 = 10 \\ b_3 = 0 \\ c_3 = 13 \end{cases}$~~

наименьшее возможное $b_3 = 0 \Rightarrow$
 $\begin{cases} \alpha_3 \geq 10 \\ \alpha_3 + c_3 \geq 30 \\ c_3 \geq 13 \end{cases} \Rightarrow$ минимальное
 $\alpha_3 + b_3 + c_3 = 30$

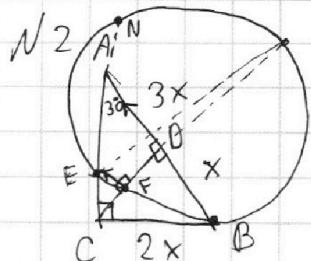
Минимальное abc = $2^{\alpha_1+b_1+c_1} \cdot 3^{\alpha_2+b_2+c_2} \cdot 5^{\alpha_3+b_3+c_3} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $BD = x$, тогда $AB = 3x$
как восьмерка в \triangle :

$$CD = \sqrt{3x \cdot x} = \sqrt{3}x$$

То т. Тип $\triangle BCD$ и $\triangle CDA$:

$$BC = 2x \quad AC = 2x\sqrt{3}$$

$$\sin \angle DAC = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle DAC = 30^\circ$$

т.к. $EF \parallel AD$ \Rightarrow $CD \perp EF \Rightarrow \angle CFE = 90^\circ \Rightarrow \angle EFD = 90^\circ$

$\Rightarrow EPD$ опирается на гипотенузу

$$\triangle CEF \sim \triangle CDA \Rightarrow \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CDA}} = \left(\frac{CE}{CA} \right)^2 \Rightarrow \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{CE^2}{16x^2}$$

$$\triangle CPA \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{\triangle CPA}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BP}{4x} \cdot \frac{CP}{4x} \cdot \frac{(CA)^2}{(4x)^2}$$

Пусть окружность касается прямой AC второй

раз в точке N , тогда т.к. BC - касательная \Rightarrow

$$\Rightarrow 4x^2 = CE \cdot CN$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N³

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(a) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow 5 \arcsin(a) \in [-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$$

Чтобы выполнось равенство: $x + \frac{\pi}{2} \in [-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \Rightarrow x \in [-3\pi; 2\pi]$

если $\arcsin(\cos x) = a$, тогда $\cos x = \sin a$
 $\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \cos x$
 $\frac{\pi}{2} - a = \pm x + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$
 $\begin{cases} a = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \\ a = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

при $a = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

$$5(\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k) = x + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$4x = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} - 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{но (1): } -3\pi \leq -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}k \leq 2\pi$$

$$-\frac{5}{2} \leq -\frac{1}{2}k \leq \frac{5}{2}$$

$$-5 \leq k \leq 5$$

$$x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}k; k \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

при $a = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

$$5(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k) = x + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$6x = \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{но (1): } -3\pi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}k \leq 2\pi$$

$$-\frac{10}{3} \leq \frac{1}{3}k \leq \frac{5}{3}$$

$$-10 \leq k \leq 5 \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}k; k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 5$$

на обем: $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}k; k \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}k; k \in \{-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \end{cases}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$36 \cdot 4 + 36\alpha\beta - 32\alpha^2 - 9\beta^2 - 2^7 > 0 \quad \begin{matrix} \text{(где } \beta \text{ было)} \\ \text{2 корня} \end{matrix}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



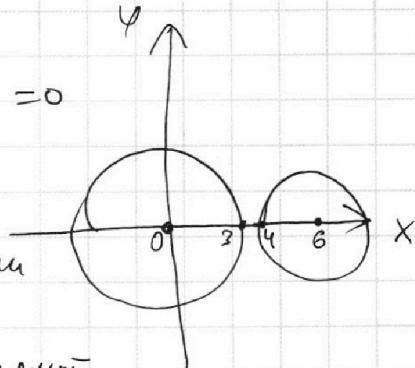
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N^4 \quad \begin{cases} \alpha x + 2y - 3\beta = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha x + 2y - 3\beta = 0 & -\text{прямая} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases} & -\text{ две окружности} \end{cases}$$



С каждой из окружностей ^{у прямой} максимум может быть 2 точки пересечения \Rightarrow чтобы было 4 точки пересечения, то нужно, чтобы каждую из них прямая пересекала.

Найдем, когда с определенной окружностью будет 2 точки пересечения:

$$1) x^2 + \left(\frac{3\beta - \alpha x}{2}\right)^2 = 9$$

$$4x^2 + 9\beta^2 - 6\alpha\beta x + \alpha^2 x^2 = 36$$

$$x^2(4 + \alpha^2) - 6\alpha\beta x + 9\beta^2 - 36 = 0$$

$$\begin{aligned} D_1 &= 9\alpha^2\beta^2 - (4 + \alpha^2)(9\beta^2 - 36) = 9\alpha^2\beta^2 - (9\alpha^2\beta^2 + 36\beta^2 - 36\alpha^2 - 36 \cdot 4) \\ &= -36(\beta^2 - \alpha^2 - 4) > 0 \quad (\text{чтобы было 2 корня}) \end{aligned}$$

$$\beta^2 - \alpha^2 - 4 < 0 \quad \beta^2 < \alpha^2 + 4$$

$$2) (x-6)^2 + \left(\frac{3\beta - \alpha x}{2}\right)^2 = 4$$

$$4(x^2 - 12x + 32) + 9\beta^2 - 6\alpha\beta x + \alpha^2 x^2 = 0$$

$$x^2(4 + \alpha^2) - x(48 + 6\alpha\beta) + 32 \cdot 4 + 9\beta^2 = 0$$

$$D_1 = 24^2 + 48 \cdot 3\alpha\beta + 9\alpha^2\beta^2 - (4 + \alpha^2)(32 \cdot 4 + 9\beta^2) =$$

$$= 24^2 + 48 \cdot 3 \cdot \alpha\beta + 9\alpha^2\beta^2 - (9\alpha^2\beta^2 + 32 \cdot 4\alpha^2 + 36\beta^2 + 32 \cdot 16)$$

$$= 2^2 (36 \cdot 4 + 36\alpha\beta - 32\alpha^2 - 9\beta^2 - 2^2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$N^5 \quad \begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ 5y \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \frac{1}{\log_3 x} - 8 \\ \log_3^4 (5y) + \frac{2}{\log_3 (5y)} = \frac{11}{2} \frac{1}{\log_3 (5y)} - 8 \end{cases}$$

Пусть $\log_3 x = a$; $\log_3 (5y) = b$ ($a, b \neq 0$)

$$\begin{cases} a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8 \\ b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^5 + \frac{7}{2} = -8a \\ b^5 + \frac{7}{2} = -8b \end{cases}$$

Пусть $f(x) = x^5 + 8x$

$$f'(x) = 5x^4 + 8 > 0$$

\Rightarrow монотонно
возрастает

$$\Rightarrow a < 0 < b$$

$$\begin{cases} a^4 + \frac{7}{2a} = -8 \\ b^4 - \frac{7}{2ab} = -8 \end{cases}$$

$$a^4 - b^4 + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a - b)(a + b) + \frac{7}{2} \cdot \frac{a+b}{ab} = 0$$

$$(a + b) \left((a^2 + b^2)(a - b) + \frac{7}{2ab} \right) = 0$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ \frac{2ab(a^2 + b^2)(a - b) + 7}{2ab} = 0 \end{cases}$$

$$1) \quad 2ab(a^2 + b^2)(a - b) + 7 = 0$$

$\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$

$$\text{T.k. } \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ b > a \end{cases} \Rightarrow 2ab(a^2 + b^2)(a - b) \geq 0 \Rightarrow \text{нет решений}$$

$$2) \quad a + b = 0 \quad \log_3 x + \log_3 (5y) = 0$$

$$\log_3 (5xy) = 0$$

$$5xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

Одн. $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

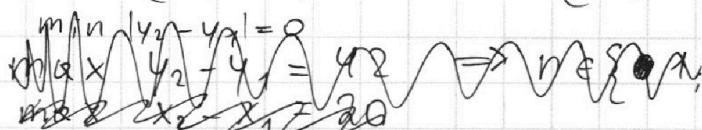
$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = \cancel{33} \quad 3 \cdot 12 - 3$$

$$3(x_2 - x_1 - 12) = \cancel{3} - (y_2 - y_1 + 3)$$

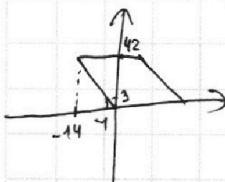
↓ ne \mathbb{Z}

$$\begin{cases} y_2 - y_1 + 3 = \cancel{3n} \\ x_2 - x_1 - 12 = -n \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 - y_1 = 3n - 3 \\ x_2 - x_1 = 12 - n \end{cases}$$



Пусть $y_2 \geq y_1$, тогда $\min y_2 - y_1 = 0 \Rightarrow \text{нет решений}$
 $\max y_2 - y_1 = 42 \Rightarrow 1 \leq n \leq 15$

1) при $y_2 - y_1 = 0 : x_2 - x_1 = 11$



мы можем выбрать любой $y = y_1 = y_2 \in [0; 42]$

и на прямой выбрать $x = x_2 = x_1 + 11 \in \mathbb{Z}_{\text{лев}}$

т.к. $42 : 14 = 3 \Rightarrow$ прямая проходит через

перемежающиеся сегменты проходит по центру
и может быть $(-n; 3n)$, где $n \in [0; 14] \Rightarrow$

\Rightarrow для $y : 3$ есть 10 вариантов x_1 и x_2
 $10 \cdot 10 = 100$ вариантов

для $y : 3$ есть 9 вариантов x_1 и x_2
 $9 \cdot (43 - 15) = 252$

2) при $y_2 - y_1 = 3 : x_2 - x_1 = 10$

мы можем выбрать любой $y = y_2 = 3 + y_1 \in [3; 42]$

для $y : 3$ есть 11 вариантов x_1 и x_2

$$11 \cdot 14 = 154$$

для $y : 3$ есть 10 вариантов x_1 и x_2

$$10 \cdot (43 - 15) = 260$$

3) при $y_2 - y_1 = 6 : x_2 - x_1 = 9$

$$12 \cdot 12 = 144$$

$$11 \cdot 24 = 264$$

4) при $y_2 - y_1 = 9 : x_2 - x_1 = 8$

$$13 \cdot 11 = 143$$

$$12 \cdot 22 = 264$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

при $y_2 - y_1 = 12 : x_2 - x_1 = 7$

14. 10

13. 20

при $y_2 - y_1 = 15 : x_2 - x_1 = 6$

15. 9

14. 18

при $y_2 - y_1 = 18 : x_2 - x_1 = 5$

16. 8

15. 1~~1~~6

при $y_2 - y_1 = 21 : x_2 - x_1 = 4$

17. 7

16. 1~~1~~4

при $y_2 - y_1 = 24 : x_2 - x_1 = 3$

18. 6

17. 12

при $y_2 - y_1 = 27 : x_2 - x_1 = 2$

19. 5

18. 10

при $y_2 - y_1 = 30 : x_2 - x_1 = 1$

20. 4

19. 8

при $y_2 - y_1 = 33 : x_2 - x_1 = 0$

21. 3

20. 6

при $y_2 - y_1 = 36 : x_2 - x_1 = -1$

20. 2

19. 4

при $y_2 - y_1 = 39 : x_2 - x_1 = -2$

19. 1

18. 2

при $y_2 - y_1 = 42 : x_2 - x_1 = -3$

18.

$$\sum = 11 \cdot 14 + 12 \cdot 12 + 13 \cdot 11 + \dots$$

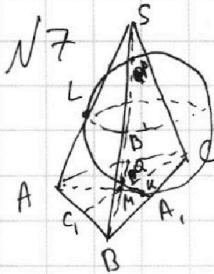


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\alpha = \log_3(5y)$$

$$\beta = \log_3(x)$$

$$n^4 = \frac{-7}{2n} - 8$$

$n \neq 0$

$$2n^5 + 16n = -7$$

~~$\alpha \neq \beta$~~

$$\alpha + \beta = \log_3(5xy)$$

203

$$f'(n) = 10n^4 + 16$$

меньше возраст

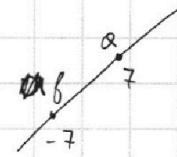
$$\log_3(\alpha x^2)$$

$$\beta^4 + \frac{6}{\beta} = \frac{5}{2}\beta - 8$$

$$\beta^4 + \frac{7}{2}\beta = -8$$

$$\alpha^4 + \frac{2}{\alpha} = \frac{11}{2}\alpha - 8$$

$$\alpha^4 = \frac{7}{2}\alpha - 8$$



$$n^4 + \frac{7}{2}n$$

$$\beta^4 + \frac{7}{2}\beta + 8 = 0$$

$$\alpha^4 - \frac{7}{2}\alpha + 8 = 0$$

$$f'(n) = 4n^3 - \frac{7}{2}n - \frac{1}{n^2}$$

$$\beta^4 - \alpha^4 + \frac{7}{2}(\alpha + \beta) = 0$$

$$n^{-1} \rightarrow -1n^{-2}$$

$$(\beta^2 - \alpha^2)(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$\frac{8n^5 - 7}{2n^2}$$

$$n^5 = \frac{7}{8}$$

$$\begin{array}{c} - \\ 0 \\ + \\ \hline \end{array}$$

$\frac{7}{8}$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ (\alpha^2 + \beta^2)(\beta - \alpha) + \frac{7}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\beta^3 + \alpha^2\beta - \alpha^3 - \alpha\beta^2 + \frac{7}{2} = 0$$

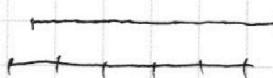
$$((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta)(\beta - \alpha) + \frac{7}{2} = 0$$

$$\alpha^5 + \beta^5 + 8\alpha = -7$$

$$\beta^5 + 8\beta = 7$$

$$f' = 5\alpha^4 + 8$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ -42 \\ -14 \\ \hline 28 \end{array}$$



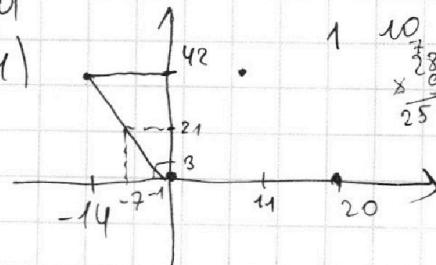
$$3 [1, 14]$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 12 \\ \hline 44 \\ 22 \\ \hline 264 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 0,5 \\ \hline 9 \\ 20,5 \end{array}$$

$$\alpha \in (-1, 0)$$

$$\beta \in (0, 1)$$



$$\begin{array}{r} 10 \\ -28 \\ -14 \\ \hline 25 \end{array}$$

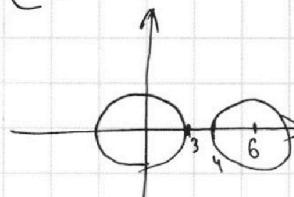


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

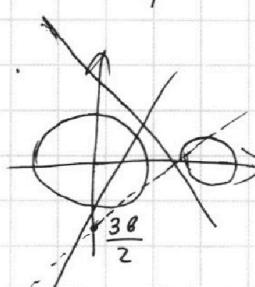
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \alpha x + 2y - 3\beta = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$



Ч речи



$$\log_3^4(5y) + 2 \log_3(5y) 3 = \log_{25}^2((3^n)^{-8})$$

$$\alpha^4 + \frac{2}{\alpha} = \frac{11}{2\alpha} - 8 \quad \alpha^4 = \frac{7}{2\alpha} - 8$$

$$\beta^4 + \frac{6}{8} = \frac{5}{2\beta} - 8 \quad \beta^4 = \frac{7}{2\beta} - 8$$

командра тоже б 2 точки
⇒ пересек обе б 2 точки

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 3 \cdot 10 + 3$$

$$3(x_2 - x_1 - 10) = (y_1 - y_2 + 3)$$

$$x^2 - 12x + 32 + \left(\frac{3\beta - \alpha x}{2}\right)^2 = 0$$

$$x^2 + 9\beta^2 - 6\alpha\beta x + \alpha^2 x^2 = 36$$

$$x^2 + \left(\frac{3\beta - \alpha x}{2}\right)^2 = 9$$

$$y_1 - y_2 + 3 = 3n$$

$$x_2 - x_1 - 10 = n$$

$$x_2 - x_1 = n+10$$

$$y_1 - y_2 = 3n - 3$$

$$4x^2 - 48x + 32 \cdot 4 + 9\beta^2 - 6\alpha\beta x + \alpha^2 x^2 = 0$$

$$x^2(\alpha^2 + 4) - x(48 + 6\alpha\beta) + 32 \cdot 4 + 9\beta^2 = 0$$

$$\Delta_1 = 24^2 + 48 \cdot 3\alpha\beta + 9\alpha^2\beta^2 -$$

$$-(32 \cdot 4 + 9\beta^2)(\alpha^2 + 4)$$

$$7,5 \quad -(32 \cdot 4 \cdot \alpha^2 + 36\beta^2 + 9\beta^2\alpha^2)$$

$$\Delta_1 = 9\alpha^2\beta^2 - (9\beta^2 - 36)(4 + \alpha^2)$$

$$9\alpha^2\beta^2 - (9\beta^2\alpha^2 - 36\alpha^2 + 36\beta^2 - 36 \cdot 4)$$

$$36\alpha^2 - 36\beta^2 + 36 \cdot 4 > 0$$

$$2,5 \quad -32 \cdot 4 \alpha^2 - 36\beta^2 + 48 \cdot 3\alpha\beta + 24^2 > 0 \quad \alpha^2 - \beta^2 + 4 > 0$$

$$10,5 \quad 4 \cdot 9 \quad 2 \cdot 24 \cdot 3$$

$$\alpha^2 - \beta^2$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x^3 = \log_x^2 243 - 8$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 3 \\ \hline 243 \end{array} \quad 3^5 \\ 4 \cdot 4 \cdot 2^5$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \frac{1}{\log_3 x} - 8$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ 7 \end{array} \quad 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} + 8 = 0$$

$$7 \quad 2 \quad 14 \quad 2 \cdot 7^2 \cdot 2 \cdot 7^3$$

$$x^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{x} + 8 = 0$$

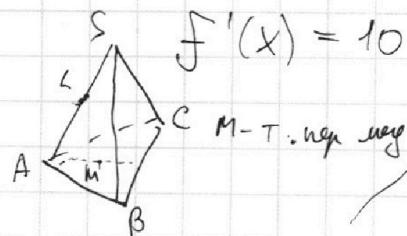
$$(2271 - 16) \neq 777$$

$$x^5 + 8x + \frac{7}{2} = 0$$

$$f'(x) = 10x^4 + 16 \oplus$$

$$2x^5 + 16x + 7 = 0$$

~~17~~
17
17



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$$

$$\begin{cases} 9 \leq \alpha_1 + \beta_1 \\ 10 \leq \alpha_2 + \beta_2 \\ 10 \leq \alpha_3 + \beta_3 \end{cases} \quad \begin{cases} 14 \leq \beta_1 + c_1 \\ 13 \leq \beta_2 + c_2 \\ 13 \leq \beta_3 + c_3 \end{cases} \quad \begin{cases} 19 \leq \alpha_1 + c_1 \\ 18 < \alpha_2 + c_2 \\ 30 < \alpha_3 + c_3 \end{cases}$$

~~1/6/10/11~~

$$\alpha_1 + \beta_1 = 9$$

$$\beta_1 + c_1 = 14$$

$$\alpha_1 + c_1 = 19$$

$$9 - \alpha_1 + 19 - \alpha_1 = 14$$

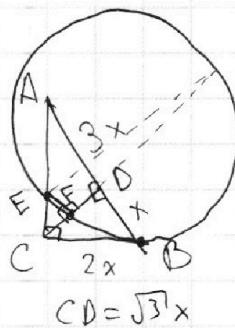
$$28 - 2\alpha_1 = 14$$

$$14 = 2\alpha_1$$

$$\alpha_1 = 7$$

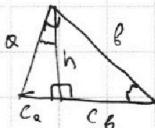
$$\beta_1 = 2$$

$$c_1 = 12$$



$$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CDA}} = \left(\frac{EC}{CA}\right)^2$$

$$\frac{S_{\triangle CDA}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{CD}{CA}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}x}{CA}\right)^2$$



$$\frac{h}{c_\alpha} = \frac{c_\beta}{h} \quad h^2 = c_\alpha c_\beta$$

$$3x^2 + x^2 = 4x^2$$

$$3x^2 + 9x^2 = 12x^2 = 2\sqrt{3}$$

$$4x^2 = EC \cdot (2\sqrt{3} + \alpha) \geq EC \cdot 2\sqrt{3}$$

$$\text{~~1/6/10/11~~} \quad \frac{\pi}{2} - \alpha = \pm x \quad 2x \geq EC\sqrt{3} \quad \arcsin(\cos x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \quad \frac{5\pi}{2}$$

~~alpha <= pi/2~~

$$x \in [-3\pi; 2\pi]$$

$$\arcsin(\cos x) = \alpha$$

$$\cos x = \sin \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \sin \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\sin \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$$

$$\sin \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} + x) \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi$$

$$\sin \alpha = \sin(\pi - x) \quad \alpha = \pi - x + 2k\pi$$

$$\sin \alpha = \sin(x + \pi) \quad \alpha = x + \pi + 2k\pi$$