МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)\,(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} \left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

№1

Пусть $a=2^{a_1}\cdot 3^{a_2}\cdot 5^{a_3}$; $b=2^{b_1}\cdot 3^{b_2}\cdot 5^{b_3}$; $c=2^{c_1}\cdot 3^{c_2}\cdot 5^{c_3}$, где $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3\in \mathbb{N}\cup\{0\}$

тогда т.к. $ab \vdots 2^9\cdot 3^{10}\cdot 5^{10}$, то $\begin{cases} a_1+b_1\geqslant 9\\ a_2+b_2\geqslant 10\\ a_3+b_3\geqslant 10\end{cases}$

Аналогично $\begin{cases} a_1+c_1\geqslant 19\\ a_2+c_2\geqslant 18\\ a_3+c_3\geqslant 30\end{cases}$ и $\begin{cases} b_1+c_1\geqslant 14\\ b_2+c_2\geqslant 13\\ b_3+c_3\geqslant 13\end{cases}$

Чтобы произведение abc было наименьшим, во всех (нужно, чтобы $a_1+b_1+c_1$; $a_2+b_2+c_2$; $a_3+b_3+c_3$ были минимальными) неравенствах должно стоять равенство.

1) $\begin{cases} a_1+b_1=9\\ a_1+c_1=19\\ b_1+c_1=14\end{cases}$ $\begin{cases} a_1=9-b_1\\ 9-b_1+14-b_1=19\\ c_1=14-b_1\end{cases}$ $\begin{cases} a_1=9-b_1\\ 2b_1=4\\ c_1=14-b_1\end{cases}$ $\begin{cases} a_1=7\\ b_1=2\\ c_1=12\end{cases}$

2) $\begin{cases} a_2+b_2=10\\ a_2+c_2=18\\ b_2+c_2=13\end{cases}$ $\begin{cases} a_2=10-b_2\\ 10+13-2b_2=18\\ c_2=13-b_2\end{cases}$ $\begin{cases} a_2=10-b_2\\ 2b_2=5\\ c_2=13-b_2\end{cases}$ $\Rightarrow b_2\notin \mathbb{N}\cup\{0\}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в каком-то из неравенств не может выполняться равенство

Чтобы произведение abc увеличилось минимально, увеличим минимальное из неравенств

$\begin{cases} a_2+b_2=11\\ a_2+c_2=18\\ b_2+c_2=13\end{cases}$ $\begin{cases} a_2=11-b_2\\ 24-2b_2=18\\ c_2=13-b_2\end{cases}$ $\begin{cases} a_2=8\\ b_2=3\\ c_2=10\end{cases}$

3) $\begin{cases} a_3+b_3=10\\ a_3+c_3=30\\ b_3+c_3=13\end{cases}$ $\begin{cases} a_3=10-b_3\\ 23-2b_3=30\\ c_3=13-b_3\end{cases}$ $\Rightarrow b_3\notin\mathbb{N}\cup\{0\}\Rightarrow$ не может выполняться равенство

$b_3=-\frac{7}{2}$

~~Увеличим число в наименьшем уравнении числом~~

~~$\begin{cases} a_3+b_3=11\\ a_3+c_3=30\\ b_3+c_3=13\end{cases}$ $\begin{cases} a_3=11-b_3\\ 24-2b_3=30\\ c_3=13-b_3\end{cases}$~~

Наименьшее возможное $b_3=0\Rightarrow$ $\begin{cases} a_3\geqslant 10\\ a_3+c_3\geqslant 30\\ c_3\geqslant 13\end{cases}$ $\Rightarrow$ минимальное $a_3+b_3+c_3=30$

Минимальное $abc=2^{a_1+b_1+c_1}\cdot 3^{a_2+b_2+c_2}\cdot 5^{a_3+b_3+c_3}=2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

Ответ: $2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

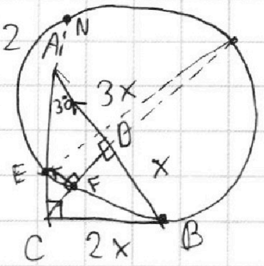
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



Пусть $BD = x$, тогда $AD = 3x$

как высота в п/у Δ:

$CD = \sqrt{3x \cdot x} = \sqrt{3}x$

По т. Пиф в ΔBCD и ΔCDA:

$BC = 2x \quad AC = 2x\sqrt{3}$

$\sin\angle DAC = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle DAC = 30°$

т.к. $EF \parallel AD$, $CD \perp AD$ $\Rightarrow CD \perp EF \Rightarrow \angle CFE = 90° \Rightarrow \angle EFD = 90°$

$\Rightarrow EFD$ опирается на гипотенузу

$\Delta CEF \sim \Delta CDA \Rightarrow \frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta CDA}} = \left(\frac{CE}{CA}\right)^2$

$\Delta CDA \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{S_{\Delta CDA}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{CA}{4x}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{CE^2}{16x^2}$

Пусть окружность касается прямой AC второй раз в точке N, тогда т.к. BC - касательная $\Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 = CE \cdot CN$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\alpha) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 5\arcsin(\alpha) \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Чтобы выполнялось равенство: $x + \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow x \in [-3\pi; 2\pi]$ (1)

Пусть $\arcsin(\cos x) = a$, тогда $\cos x = \sin a$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos x$

$\frac{\pi}{2} - a = \pm x + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

$\left[\begin{array}{l} a = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \\ a = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

при $a = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

$5\left(\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k\right) = x + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

$4x = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} - 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}k; k \in \mathbb{Z}$

по (1): $-3\pi \leq -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}k \leq 2\pi$

$-\frac{5}{2} \leq -\frac{1}{2}k \leq \frac{5}{2}$

$-5 \leq k \leq 5$

$x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}k; k \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

при $a = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

$5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = x + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

$6x = \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}k; k \in \mathbb{Z}$

по (1): $-3\pi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}k \leq 2\pi$

$-\frac{10}{3} \leq \frac{1}{3}k \leq \frac{5}{3}$

$-10 \leq k \leq 5$ $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}k; k \in \mathbb{Z}; -10 \leq k \leq 5$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}k; k \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\} \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}k; k \in \{-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\} \end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$36 \cdot 4 + 36ab - 32a^2 - 9b^2 - a^7 > 0$ (чтобы было 2 корня)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

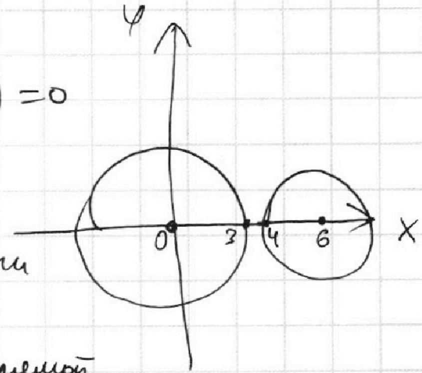
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 & \text{– прямая} \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{array}\right. & \text{– две окружности} \end{cases}$$



С каждой из окружностей у прямой максимум может быть 2 точки пересечения $\Rightarrow$ чтобы было 4 точки пересечения, то нужно, чтобы каждую из них прямая пересекала.

Найдем, когда с определенной окружностью будет 2 точки пересечения:

1) $x^2+\left(\frac{3b-ax}{2}\right)^2=9$

$4x^2+9b^2-6abx+a^2x^2=36$

$x^2(4+a^2)-6abx+9b^2-36=0$

$D_1=9a^2b^2-(4+a^2)(9b^2-36)=\cancel{9a^2b^2}-(\cancel{9a^2b^2}+36b^2-36a^2-36\cdot4)$

$=-36(b^2-a^2-4)>0$ (чтобы было 2 корня)

$b^2-a^2-4<0 \qquad b^2<a^2+4$

2) $(x-6)^2+\left(\frac{3b-ax}{2}\right)^2=4$

$4(x^2-12x+32)+9b^2-6abx+a^2x^2=0$

$x^2(4+a^2)-x(48+6ab)+32\cdot4+9b^2=0$

$D_1=24^2+48\cdot3ab+9a^2b^2-(4+a^2)(32\cdot4+9b^2)=$

$=24^2+48\cdot3\cdot ab+\cancel{9a^2b^2}-(\cancel{9a^2b^2}+32\cdot4a^2+36b^2+32\cdot16)$

$=2^2(36\cdot4+36ab-32a^2-9b^2-2^7)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8 \end{cases}$$

ОДЗ:
$$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ y>0 \\ 5y\neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \dfrac{6}{\log_3 x} = \dfrac{5}{2}\dfrac{1}{\log_3 x} - 8 \\ \log_3^4 (5y) + \dfrac{2}{\log_3(5y)} = \dfrac{11}{2}\dfrac{1}{\log_3(5y)} - 8 \end{cases}$$

Пусть $\log_3 x = a$; $\log_3(5y) = b$ $(a, b \neq 0)$

$$\begin{cases} a^4 + \dfrac{6}{a} = \dfrac{5}{2a} - 8 \\ b^4 + \dfrac{2}{b} = \dfrac{11}{2b} - 8 \end{cases} \quad \cancel{\begin{cases} a^5 + \dfrac{7}{2} = -8a \\ b^5 - \dfrac{7}{2} = -8b \end{cases}} \quad \begin{cases} a^5 + 8a = -\dfrac{7}{2} \\ b^5 + 8b = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Пусть $f(x) = x^5 + 8x$

$f'(x) = 5x^4 + 8 > 0$

$\Rightarrow$ монотонно возрастает

$\Rightarrow a < 0 < b$

$$-\begin{cases} a^4 + \dfrac{7}{2a} = -8 \\ b^4 - \dfrac{7}{2b} = -8 \end{cases}$$

$$a^4 - b^4 + \frac{7}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 0$$

$$(a^2+b^2)(a-b)(a+b) + \frac{7}{2}\cdot\frac{a+b}{ab} = 0$$

$$(a+b)\left((a^2+b^2)(a-b) + \frac{7}{2ab}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} a+b=0 \quad (2) \\ \dfrac{2ab(a^2+b^2)(a-b)+7}{2ab} = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

1) $2ab(a^2+b^2)(a-b) + 7 = 0$

т.к. $a<0$, $b>0$, $b>a$ $\Rightarrow$ $2ab(a^2+b^2)(a-b) \geq 0$ $\Rightarrow$ нет решений
$\ominus\oplus$ $\oplus$ $\ominus$

2) $a+b=0$ $\quad \log_3 x + \log_3(5y) = 0$

$\log_3(5xy) = 0$

$5xy = 1$

$xy = \frac{1}{5}$

Ответ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 3\cdot 12 - 3$$

$$3(x_2 - x_1 - 12) = -(y_2 - y_1 + 3)$$

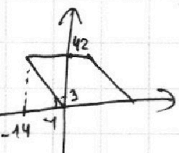
$\Downarrow$ $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} y_2 - y_1 + 3 = 3n \\ x_2 - x_1 - 12 = -n \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 - y_1 = 3n - 3 \\ x_2 - x_1 = 12 - n \end{cases}$$

~~$\min |y_2 - y_1| = 0$~~
~~$\max y_2 - y_1 = 42 \Rightarrow n \in \{$~~
~~$x_2 - x_1 \le 20$~~

Пусть $y_2 \geq y_1$, тогда $\left.\begin{matrix} \min y_2 - y_1 = 0 \\ \max y_2 - y_1 = 42 \end{matrix}\right| \Rightarrow 1 \le n \le 15$

1) при $y_2 - y_1 = 0$: $x_2 - x_1 = 11$



мы можем выбрать любой $y = y_1 = y_2 \in [0; 42]$
~~и к нему выбрать $x = x_2 = 11 + x_1 \in [$~~ левая

т.к. $42 \vdots 14 = 3 \Rightarrow$ граница параллелограмма проходит по целым точкам вида $(-n; 3n)$, где $n \in [0; 14] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для $y \vdots 3$ есть 10 вариантов x_1 и x_2

$\boxed{15 \cdot 10 = 150}$ вариантов

для $y \not\vdots 3$ есть 9 вариантов x_1 и x_2

$9 \cdot (43 - 15) = 252$

2) при $y_2 - y_1 = 3$: $x_2 - x_1 = 10$

мы можем выбрать любой $y = y_2 = 3 + y_1 \in [3; 42]$

для $y \vdots 3$ есть 11 вар. x_1 и x_2

$11 \cdot 14 = 154$

для $y \not\vdots 3$ есть 10 вар x_1 и x_2

$10 \cdot (40 - 14) = 260$

3) при $y_2 - y_1 = 6$: $x_2 - x_1 = 9$

$12 \cdot 12 = 144$
$11 \cdot 24 = 264$

4) при $y_2 - y_1 = 9$: $x_2 - x_1 = 8$

$13 \cdot 11 = 143$
$12 \cdot 22 = 264$

при $y_2 - y_1 = 12$: $x_2 - x_1 = 7$

$14 \cdot 10$

$13 \cdot 20$

при $y_2 - y_1 = 15$: $x_2 - x_1 = 6$

$15 \cdot 9$

$14 \cdot 18$

при $y_2 - y_1 = 18$: $x_2 - x_1 = 5$

$16 \cdot 8$

$15 \cdot 16$

при $y_2 - y_1 = 21$: $x_2 - x_1 = 4$

$17 \cdot 7$

$16 \cdot 14$

при $y_2 - y_1 = 24$: $x_2 - x_1 = 3$

$18 \cdot 6$

$17 \cdot 12$

при $y_2 - y_1 = 27$: $x_2 - x_1 = 2$

$19 \cdot 5$

$18 \cdot 10$

при $y_2 - y_1 = 30$: $x_2 - x_1 = 1$

$20 \cdot 4$

$19 \cdot 8$

при $y_2 - y_1 = 33$: $x_2 - x_1 = 0$

$21 \cdot 3$

$20 \cdot 6$

при $y_2 - y_1 = 36$: $x_2 - x_1 = -1$

$20 \cdot 2$

$19 \cdot 4$

при $y_2 - y_1 = 39$: $x_2 - x_1 = -2$

$19 \cdot 1$

$18 \cdot 2$

при $y_2 - y_1 = 42$: $x_2 - x_1 = -3$

$18 \cdot$

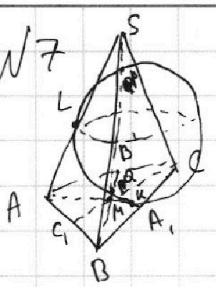
$\Sigma = 11 \cdot 14 + 12 \cdot 12 + 13 \cdot 11 + \ldots$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a = \log_3(5y)$ $\quad\quad a+b = \log_3(5xy)$ $\quad\quad$ ОДЗ

$b = \log_3(x)$

$n^4 = \frac{-7}{2n} - 8$ $\quad n \neq 0$

$2n^5 + 16n = -7$

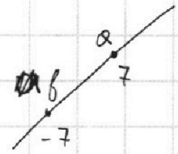
$f'(n) = 10n^4 + 16$

мон возраст

$\log_3(x^2)$

$b^4 + \frac{6}{b} = \frac{5}{2}b - 8$ $\quad\quad b^4 + \frac{7}{2}b = -8$

$a^4 + \frac{2}{a} = \frac{11}{2}a - 8$ $\quad\quad a^4 = \frac{7}{2}a - 8$



$b^4 + \frac{7}{2}b + 8 = 0$

$n^4 + \frac{7}{2n}$ $\quad\quad a^4 - \frac{7}{2}a + 8 = 0$

$f'(n) = 4n^3 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$ $\quad\quad b^4 - a^4 + \frac{7}{2}(a+b) = 0$

$(b^2 - a^2)(a^2 + b^2)$

$n^{-1} \to -1n^{-2}$ $\quad\quad (a+b)(a^2+b^2)(b-a) + \frac{7}{2}(a+b) = 0$

$\frac{8n^5 - 7}{2n^2}$ $\quad n^5 = \frac{7}{8}$

$\left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ (a^2+b^2)(b-a) + \frac{7}{2} = 0 \end{array}\right.$

$-$ $\quad$ $+$

$0 \quad \left(\frac{7}{8}\right)^{0.2}$ $\quad\quad \oplus \quad \ominus$

$b^3 + a^2 b - a^3 - ab^2 + \frac{7}{2} = 0$

$((a+b)^2 - 2ab)(b-a) + \frac{7}{2} = 0$

$a^5 + 8a = -7$

$b^5 + 8b = 7$ $\quad f' = 5a^4 + 8$

$\begin{array}{r} 42 \\ -14 \\ \hline 28 \end{array}$

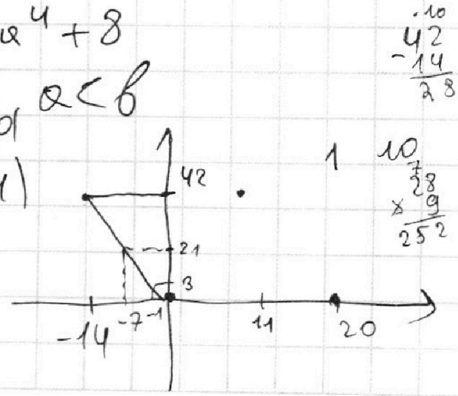
$a < b$

$a \in (-1; 0)$

$b \in (0; 1)$

3 [1; 14]

1 $\quad$ 0,5 $\quad$ 9 $\quad$ 20,5



$\begin{array}{r} 28 \\ \times 9 \\ \hline 252 \end{array}$

$\begin{array}{r} 22 \\ \times 12 \\ \hline 44 \\ 22 \\ \hline 264 \end{array}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

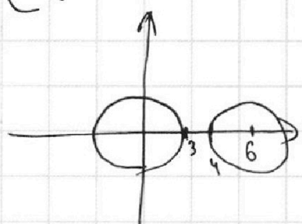
1 2 3 4 5 6 7

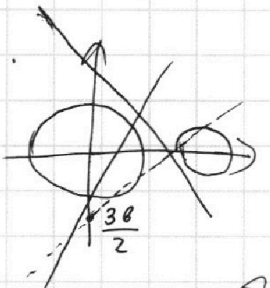
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{array}\right. \end{cases}$$

4 реш





$\log_3^4(5y)+2\log_{(5y)}3=\log_{25y^2}(3^{11})-8$

$a^4+\frac{2}{a}=\frac{11}{2a}-8 \quad a^4=\frac{7}{2a}-8$

$b^4+\frac{6}{b}=\frac{5}{2b}-8 \quad b^4=\frac{7}{2b}-8$

конденро тох в 2 точках

$\Rightarrow$ пересек обе в 2 точках

$y_1-y_2+3=3n$

$x_2-x_1-10=n$

$x_2-x_1=n+10$

$y_1-y_2=3n-3$

$3(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=3\cdot10+3$

$3(x_2-x_1-10)=(y_1-y_2+3)$

$\cancel{x^2+y^2-9=ax+2y-3b}$

$x^2+\left(\frac{3b-ax}{2}\right)^2=9$

$x^2-12x+32+\left(\frac{3b-ax}{2}\right)^2=0$

$4x^2-48x+32\cdot4+9b^2-6abx+a^2x^2=0$

$4x^2+9b^2-6abx+a^2x^2=36$

$x^2(a^2+4)-x(48+6ab)+32\cdot4+9b^2=0$

$x^2(4+a^2)-6ab\,x+9b^2-36=0$

$24+3ab$

$D_1=24^2+48\cdot3ab+9a^2b^2-$
$-(32\cdot4+9b^2)(a^2+4)$

$-(32\cdot4\cdot a^2+36b^2+9b^2a^2)$

$D_1=9a^2b^2-(9b^2-36)(4+a^2)$

$\cancel{9a^2b^2}-(\cancel{9b^2a^2}-36a^2+36b^2-36\cdot4)$

$36a^2-36b^2+36\cdot4>0$

$a^2-b^2+4>0$

7,5

2,5

10,5

$-32\cdot4a^2-36b^2+48\cdot3ab+24^2>0$

$4\cdot9 \quad 2\cdot24\cdot3$

$2\cdot12$

6

$\log_3^4x+6\log_x3=\log_{x^2}243-8$

$\log_3^4x+\frac{6}{\log_3x}=\frac{5}{2}\,\frac{1}{\log_3x}-8$

$\log_3^4x+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{\log_3x}+8=0$

$x^4+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x}+8=0$

$x^5+8x+\frac{7}{2}=0$

$2x^5+16x+7=0$

$\times\,81$
3
243

3^5

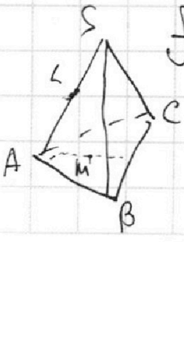
$4\cdot4\cdot2^5$

$2\cdot2\cdot2$

2 0 0 0 16 7

7 2 14 $2\cdot7^2$ $2\cdot7^3$

$\cancel{(2\cdot7)^4-16)7\,7\,7}$



М-т. пер мед

$f'(x)=10x^4+16 \quad \oplus$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a = 2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3}$

$\begin{cases} 9 \leqslant a_1 + b_1 \\ 10 \leqslant a_2 + b_2 \\ 10 \leqslant a_3 + b_3 \end{cases}$ $\begin{cases} 14 \leqslant b_1 + c_1 \\ 13 \leqslant b_2 + c_2 \\ 13 \leqslant b_3 + c_3 \end{cases}$ $\begin{cases} 19 \leqslant a_1 + c_1 \\ 18 < a_2 + c_2 \\ 30 < a_3 + c_3 \end{cases}$

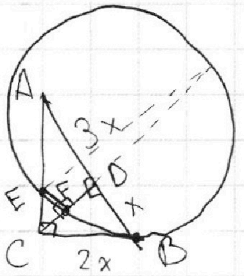
$a_1 + b_1 = 9$
$b_1 + c_1 = 14$
$a_1 + c_1 = 19$

$9 - a_1 + 19 - a_1 = 14$

$28 - 2a_1 = 14$

$14 = 2a_1$

$a_1 = 7$
$b_1 = 2$
$c_1 = 12$



$CD = \sqrt{3}x$

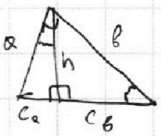
$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CDA}} = \left(\frac{EC}{CA}\right)^2$

$\frac{S_{\triangle CDA}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AC}{3x}\right)^2$

$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{EC^2}{9x^2}$

$5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = x + \frac{\pi}{2}$

$6x =$



$\frac{h}{c_a} = \frac{c_b}{h}$ $h^2 = c_a c_b$

$3x^2 + x^2 = 4x^2$

$3x^2 + 9x^2 = 12x^2 = 2x\sqrt{3}$

$4x^2 = EC \cdot (2x\sqrt{3} + a) > EC\ 2x\sqrt{3}$

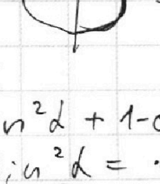
$\frac{\pi}{2} - \alpha = \pm x$ $2x > EC\sqrt{3}$

$\arcsin(\cos x) = \sqrt{1-x^2}$

$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$

$\alpha = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi k$



$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$-\frac{5\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{2}$

$\arcsin(\cos x) = \alpha$

$\cos x = \sin\alpha$

$x \in [-3\pi; 2\pi]$ $\arcsin(\cos x) = \alpha$ $\sin^2\alpha + 1 - \cos^2 x = 1$

$\cos x = \sin\alpha$ $\sin^2\alpha = \cdot$

$\cos x =$