



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. Вспомогательное определение геометрической арифметики и разложении чисел

$$a, b, c. \quad a = 2^{d_1} 3^{d_2} 5^{d_3} \dots; \beta = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3} \dots; c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3} \dots, d_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{N}$$

Давно, что разложение чисел есть вспомогательное, но Г.К. для задачи наименьшее
число всех чисел, что d_i, β_i, γ_i , при $i \geq 4 = 0$. Тогда условие то, что
число: $2^8 3^{10} 5^{10} \Leftrightarrow 2^{d_1+\beta_1} 3^{d_2+\beta_2} 5^{d_3+\beta_3} : 2^5 3^{10} 5^{10}$, что равносильно

значение:

$$\begin{cases} d_1 + \beta_1 = 8 \\ d_2 + \beta_2 = 10 \\ d_3 + \beta_3 = 10 \end{cases}$$

Аналогичное соотношение имеет место для:

Без a, b, c

$$\begin{cases} d_1 + \gamma_1 = 14 \\ d_2 + \gamma_2 = 13 \\ d_3 + \gamma_3 = 13 \end{cases} \quad \text{Без } a, b, c \text{ первое ур-ие 3-е уравнение:}$$
$$\beta_1 + \gamma_1 = 14 \quad 2d_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 = 42 \Rightarrow$$
$$\beta_2 + \gamma_2 = 13$$
$$\beta_3 + \gamma_3 = 13$$

$$d_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 21. \quad \text{Аналогично } d_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 41/2 \text{ и } d_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 53/2$$

$$abc = 2^{d_1+\beta_1+\gamma_1} 3^{d_2+\beta_2+\gamma_2} 5^{d_3+\beta_3+\gamma_3} \rightarrow \min \Rightarrow d_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 21 \text{ и } 0$$

$$\text{Чтобы } d_i + \beta_i + \gamma_i \in \mathbb{Z}: \quad d_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 20; \quad d_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 26. \Rightarrow$$

$$\min(abc) = 2^{21} 3^{20} 5^{26}.$$

P.S. В нашем решении нет обобщения, что d_i, β_i, γ_i при $i \geq 4 = 0$

Давно, что не можем так же меняться и сдвигать вправо $i \leq 3$, т.к. числа

2, 3, 5-простые и есть в числе, на которых не делится значение ab, bc и ac .

Также это следует из условия ур-ий, полученных выше.

$$\text{Ответ: } 2^{21} 3^{20} 5^{26}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

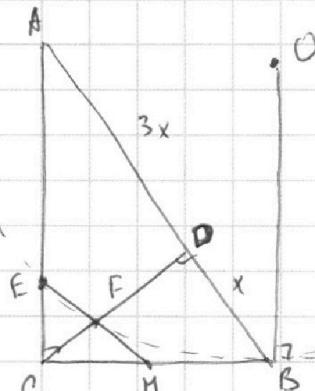
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.



Продолжим отрезок EF до пересечения

с ВС в т. М. EM || AB $\Rightarrow \triangle CEM \sim \triangle CAB$

(следует из равенства углов EMС и CAB и СEM)

Поскольку $\triangle CEM \sim \triangle CAB$ и

$\triangle CEF \sim \triangle CAB \Rightarrow AD : DB = EF : FM = 3 : 1$.

Тогда $AD = 3x$; $BD = x$.

Задача сводится к тому, что $\triangle ADC \sim \triangle AFB$ (углы A и AFB=90°) $\frac{CD}{AD} = \frac{AB}{BD}$

Найдем углы ADC и CDB ($\angle A = 90^\circ - \angle ACB = \angle DCB$ и $\angle ADC = \angle CBD = 90^\circ$)

$$\frac{3x}{CD} = \frac{CD}{x} \Rightarrow CD = \sqrt{3}x \Rightarrow \text{по т-у Пифагора } BC = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x.$$

Найдем $\triangle CEM \sim \triangle CAB$ с некоторым коэффициентом k. Тогда $EM = kx$.

Тогда $EF : FM = 3 \Rightarrow EF = 3kx$ и $FM = kx$. $MB = BC - MC = 2x - kx = kx(1-k)$.

По т-у описанного и вписанного в окружность $MB^2 = MF \cdot ME$

$$(kx(1-k))^2 = kx \cdot 4kx \Rightarrow 4k^2(1-k)^2 = 4k^2k^2 \Rightarrow k^2 = (1-k)^2 \text{ и } k = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

ME - средняя линия. $S_{CEF} : S_{CFM} = EF : FM = 3 : 1 \Rightarrow S_{CEF} = \frac{3}{4} S_{CFM}$.

$$\frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{CEF} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} S_{ABC} = \frac{3}{16} S_{ABC} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{16}{3}.$$

Ответ: 16:3.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

53.

$$5 \arcsin \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right) = x + \frac{\pi}{2}$$

При $x \in [0; \pi]$, $\frac{\pi}{2} - x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right) = \frac{\pi}{2} - x$.

При $x \in [-\pi; 0]$, $\frac{\pi}{2} - x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \frac{\pi}{2} + x$.

Для решения график:

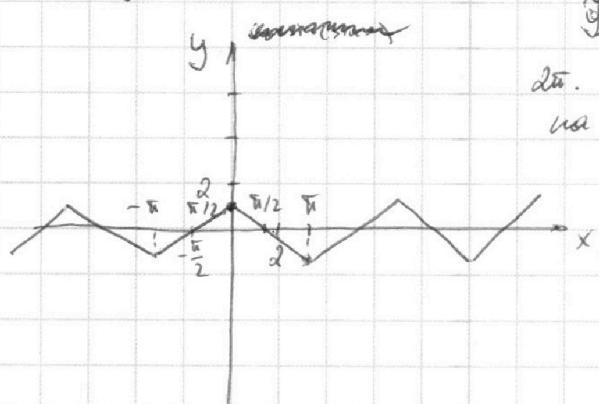
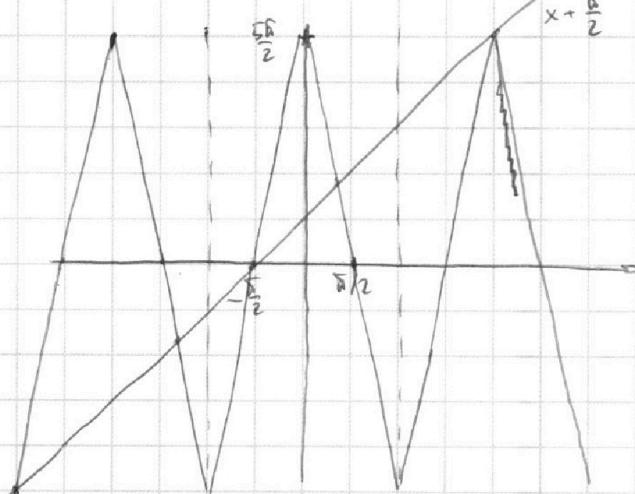


График неизвестного с пересечением
с осью x на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Для решения графика $5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$ при $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$:



Решение 5 уравнений:

$$x = 2\pi; x = -3\pi; x = -\frac{9}{2}$$

$$\text{пересечение } x + \frac{\pi}{2} \text{ с } \frac{5\pi}{2} - 5x \Rightarrow$$

$$6x = 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ и пересечение}$$

$$x + \frac{\pi}{2} \text{ с } -5x - \frac{15\pi}{2} \Rightarrow 6x = -8\pi \Rightarrow$$

$$x = -\frac{4}{3}\pi$$

$$\text{Ответ: } 2\pi; -3\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; -\frac{4}{3}\pi$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

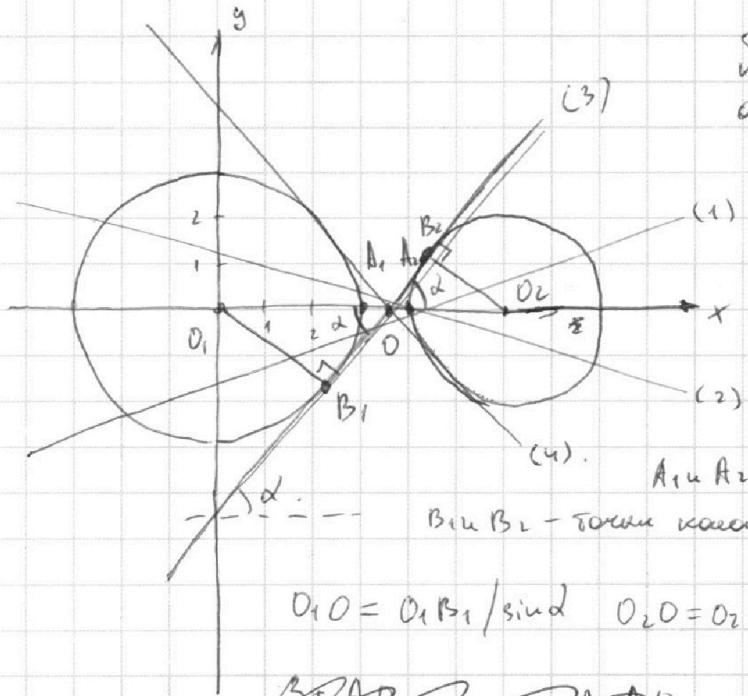
№4.

$$\begin{cases} ax + dy - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 3)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} dy = 3b - ax \\ [x^2 + y^2 = 3] \\ [x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dy = 3b - ax \\ x^2 + y^2 = 3 \\ (x - 6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Получаем, что решение системы это пересечение кривых $y = -\frac{a}{d}x + \frac{3b}{d}$ с

другими окружностями: 1 - с центром в $(0;0)$ и радиусом 3, 2 - с центром в $(6;0)$ и радиусом 2.



Две, что прямые 1 и 2 пересекают окружности в 4 точках.

Применим квадратичное уравнение для 3 и 4 - будем использовать квадратичное уравнение для окружностей. Эти прямые пересекают окружности в 2 точках.

Рассмотрим угол α .

A_1, A_2 - 1. пересеч. окружн с Ox .
 B_1, B_2 - 2. пересеч. окружн с Ox .

с Ox .

$$O_1O = O_1B_1 / \sin \alpha \quad O_2O = O_2B_2 / \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\frac{B_1A_1O}{\sin \alpha} = \frac{B_2A_2O}{\sin \alpha} = 2 \Rightarrow 3$$

$$B_1A_1O = \frac{3}{\sin \alpha} \quad B_2A_2O = \frac{2}{\sin \alpha} \quad \text{Следим: } A_1A_2 + 5 = \frac{5}{\sin \alpha}; \quad A_1A_2 = 6 - 3 - 2 = 1$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{6} \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{5}{\sqrt{11}} \Rightarrow -\frac{a}{d} < \frac{5}{\sqrt{11}}. \quad \text{Аналогично для второго}$$

$$\text{пересечения } -\frac{a}{d} > -\frac{5}{\sqrt{11}} \Rightarrow a > -\frac{10}{\sqrt{11}} \text{ и } a < \frac{10}{\sqrt{11}} \Rightarrow -\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}} \text{ радиус}$$

б, граничное условие.

Ответ: $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$55. \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log x^2 \log_3 3 - 3 \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{5y} 2 (5y)^{-1} - 3$$

$$\text{Преобразим: } \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 3; \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 3.$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 3 = 0; \quad \log_3^4(5y) + \frac{7}{2} \log_{5y} 3 + 3 = 0$$

$$\text{Заметим, что } \log_3^4(5y) = (-\log_3(5y)^{-1})^4 = \log_3^4(5y)^{-1} \Rightarrow$$

$$\log_3^4(5y)^{-1} + \frac{7}{2} \log_{5y} 3 + 3 = 0.$$

Пусть $f(x) = \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 3$. Тогда данная система задача решается
использованием уравнения $f(x) = 0$.

$$\text{Пусть корни } x \text{ и } (5y)^{-1} \text{ совпадают} \Rightarrow x = \frac{1}{5}y^{-1} \Rightarrow xy = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Пусть они не совпадают: используем формулу } g(t) = t^4 + \frac{7}{2t} + 3. \quad t = \log_3 x$$

$$t^4 + \frac{7}{2t} + 3 = 0 \Rightarrow \frac{2t^5 + 16t + 7}{2t} = 0 \quad t=0 \Rightarrow 2t^5 + 16t + 7 = 0$$

$y'(t) = 4t^3 + 16 = 0 \quad t \in \emptyset \Rightarrow g'(t) > 0$, при $t \neq 0 \Rightarrow$ функция монотонно
возрастает и имеет пересечение $y=0$ только в одноточке $t=0$.
 $x = (5y)^{-1}$ должна совпадать.

Ответ: $\frac{1}{5}$.



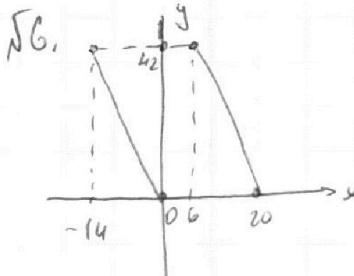
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Для того, чтобы точка $A(x, y)$ попадала в ограниченн-
ый, замкнутый включительно уголок:

$$\begin{cases} y \geq -3x \\ y \leq 60 - 3x \\ y \geq 0 \\ y \leq 42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 42 \\ 0 \leq y + 3x \leq 60 \end{cases} \quad (1)$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33 \Rightarrow (3x_2 + y_2) - (3x_1 + y_1) = 33. \quad (2)$$

Наше штрафное количество наи-бо способов выбрать x_1, x_2, y_1, y_2 , чтобы выполнить
условия (1) и (2). Дело, что если имеем определенное значение $3x_2 + y_2$, то

$3x_1 + y_1$ определяется единственным способом образом. т.к. $3x_1 + y_1 \geq 0$, то

$3x_2 + y_2 \geq 33$, тогда напоминаю $3x_2 + y_2$ будет определяться
 $(3x_2 + y_2 - 33) = 3x_1 + y_1$.

$$3x_2 + y_2 = 33, 34, 35, \dots a \quad 3x_1 + y_1 = 0, 1, 2, 3, \dots b.$$

Дело, что имеем a вариантов: $3x_2 + y_2 = a \Rightarrow y = a - 3x \Rightarrow 0 \leq a - 3x \leq 42$.

$$\Rightarrow \left\{ \frac{a}{3} - 14 \leq x \leq \frac{a}{3} \right. . \quad \text{Утверждение } x \in \mathbb{R}: \left[\frac{a}{3} \right] - 14 \leq x \leq \left[\frac{a}{3} \right], \text{ где}$$

$\lceil x \rceil$ - минимальное целое не меньшее x , $\lfloor x \rfloor$ - максимальное
целое, не большее $x \Rightarrow$ Вариантов выбора x всего $\left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor - \left\lceil \frac{a}{3} \right\rceil + 1$.
Для каждого варианта x соответствует y такое, что $y = a - 3x \Rightarrow$
наи-бо способов выбрать $y + 3x = \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor - \left\lceil \frac{a}{3} \right\rceil + 15$, то есть $a/3$

дает 15, а еще $a/3 - 14 \Rightarrow$ т.к. среди пар $(33; 0); (34; 1); \dots$

имеем $y \geq 3$, то и $x \geq 3$, то есть $3x_2 + y_2 = 3; 4; \dots 15$, то есть $3x_2 + y_2 = 3, 4, \dots 15$ наи-бо способов: $15^2 = 225$, также $-14^2 = 196$. Среди пар $(33; 0); (34; 1); \dots (60; 28)$ $\frac{53-33+1}{3} + 1 = 10$ вариантов 3 и $28 - 10 = 18$ не варианты \Rightarrow общего: $10 \cdot 225 + 18 \cdot 196 = 5848$.

Ответ: 5848.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

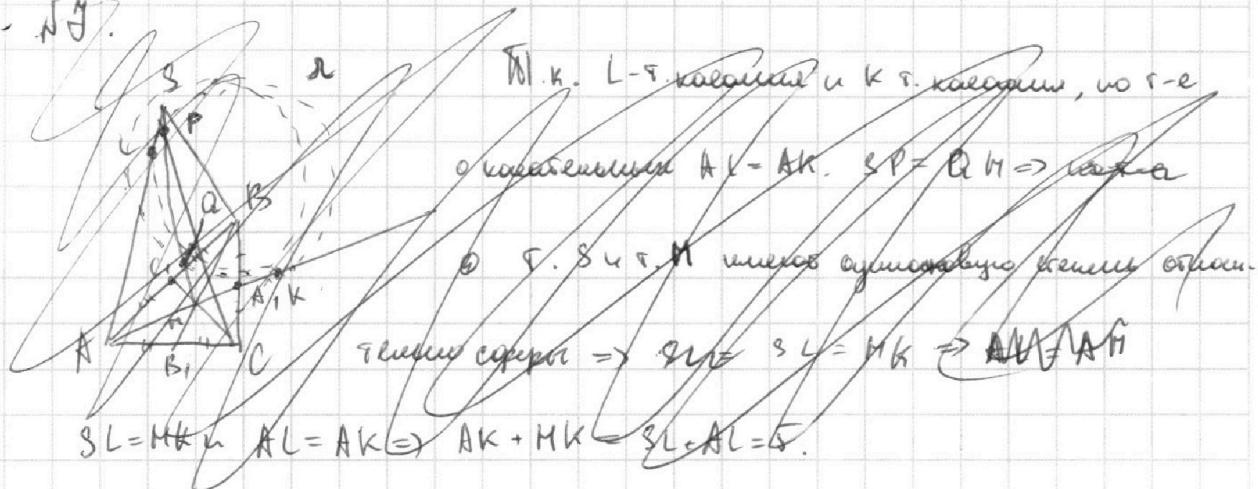
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

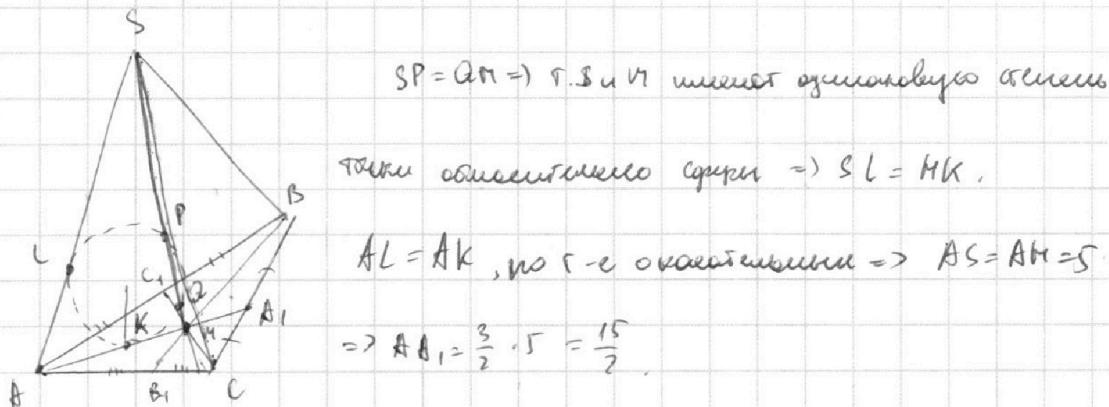
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.



№2.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

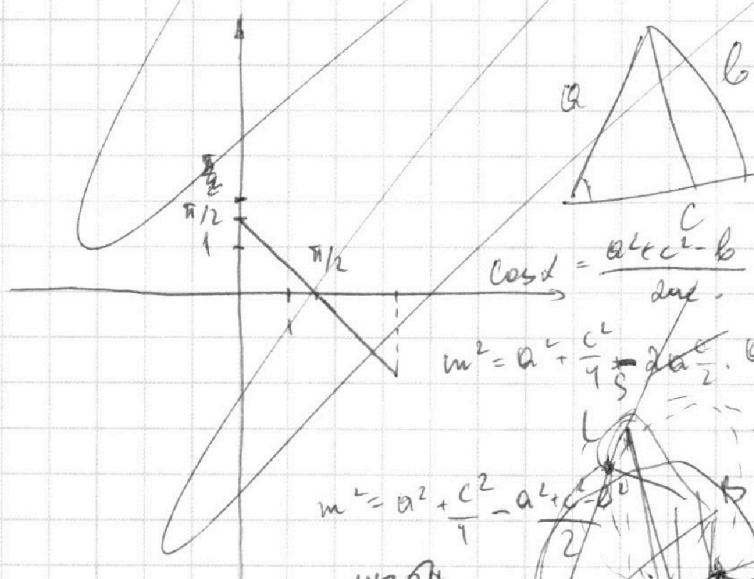
$$53. \operatorname{arcsin}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{для } x \in [0; \frac{\pi}{2}] \quad \operatorname{arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x.$$

$$\text{для } x \in [-\frac{\pi}{2}; 0] \quad \operatorname{arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - (\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\pi}{2} + x.$$

Построим график $\operatorname{arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$.



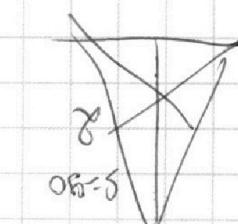
$$\cos x = \frac{a^2 c^2 - b^2}{2ac}$$

$$m^2 = a^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{2ac}{2} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{c^2}{4}$$

$$m^2 = a^2 + \frac{c^2}{4} - a^2 c^2 - b^2 = \frac{c^2}{4} - b^2$$

$$m^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{b^2}{2}$$

$$AS = AK$$

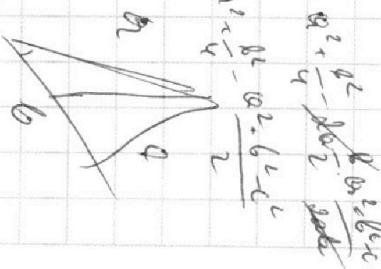


$$\cos x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$y = kx + b. \quad -\frac{3\sqrt{5}}{2}, 0 \\ 0 = -\frac{3\sqrt{5}}{2}k + b \\ -\frac{3\sqrt{5}}{2} = -3\sqrt{5}k + b$$

$$\frac{c^2}{4} = \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4} = \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4}$$

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

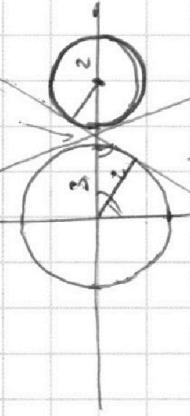
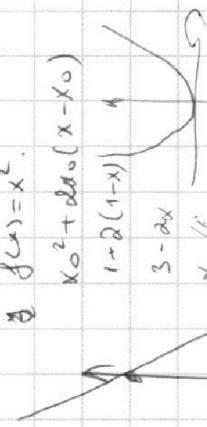
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) = x^2$$

$$x_0^2 + 2x_0(x - x_0)$$

$$1 + 2(1-x) \\ 3 - 2x$$

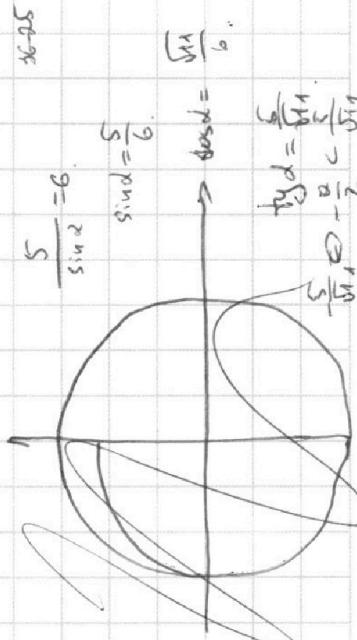


$$\text{Угол } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{3}{\sin \alpha} = 5+x \\ \frac{2}{\sin \alpha} = 2+y \\ dy = -ax + 3b$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{b}{2} b$$

$$\frac{3}{\sin \alpha} + \frac{2}{\sin \alpha} = 5+x+y = 6$$

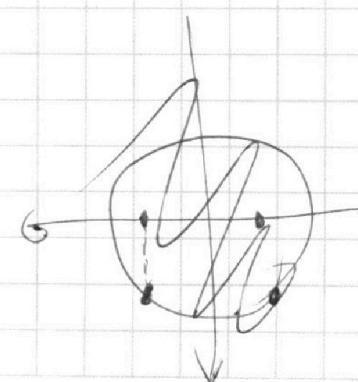
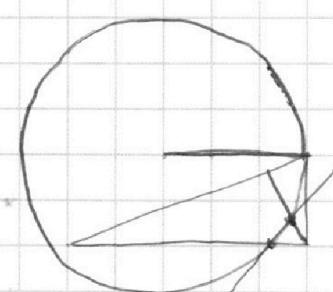
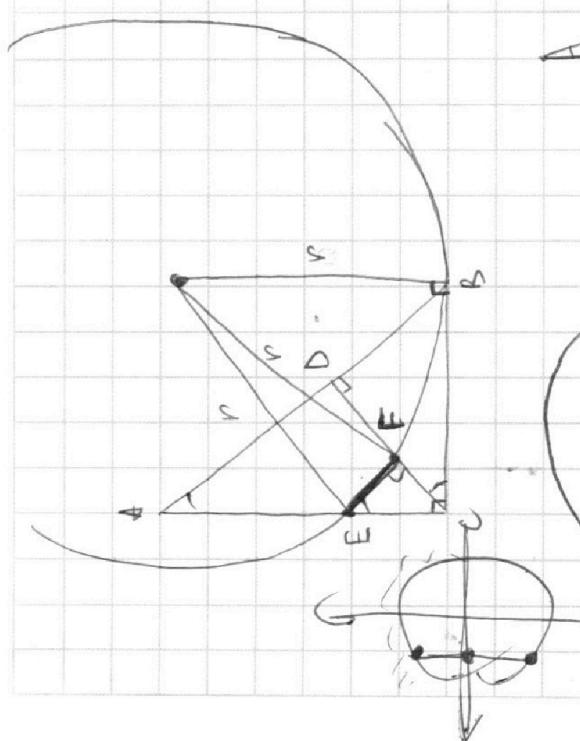


$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 16x + 32) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\frac{5}{\sin \alpha} = 6 \\ \sin \alpha = \frac{5}{6} \\ \alpha = \arcsin \frac{5}{6} \\ \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{6} \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N} \quad ab : 2^9 3^{10} 5^{10}, \quad bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13}, \quad ac : 2^{18} 3^{18} 5^{30}$$

$$a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} \quad b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3} \quad c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3}$$

$$2^{\alpha_1 + \beta_1} 3^{\alpha_2 + \beta_2} 5^{\alpha_3 + \beta_3}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 9 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \alpha_3 + \beta_3 \geq 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 13 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 \end{cases}$$

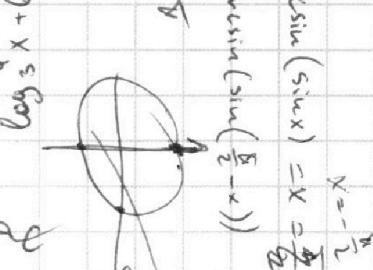
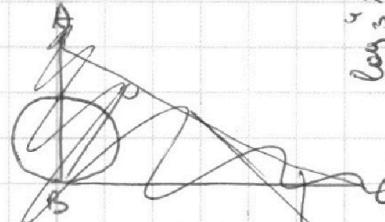
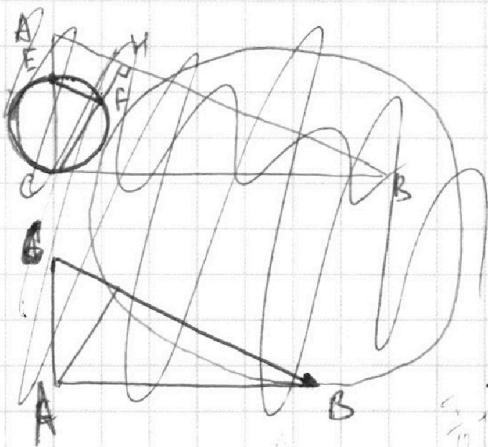
$$\begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 \geq 18 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 12 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 30 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & 2^{\alpha_1 + 2\beta_1 + \gamma_1} \geq 2^9 \\ & \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 24 \\ & \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 12 \end{aligned}$$

$$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3}$$

1 этап.

2.



$$\sin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

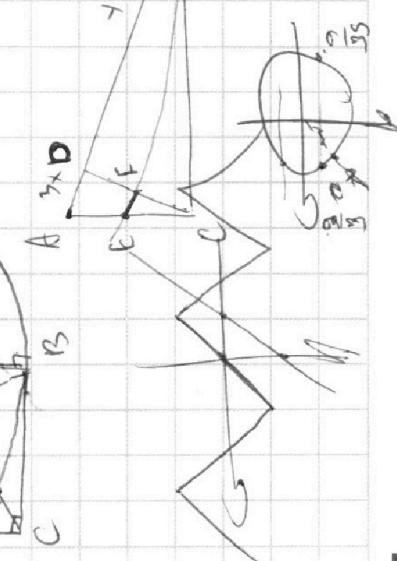
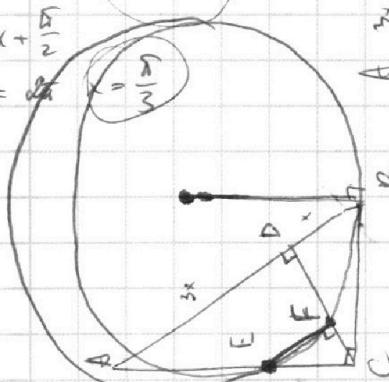
$$\cos x = \sin \frac{\pi}{2} - x$$

$$\sin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



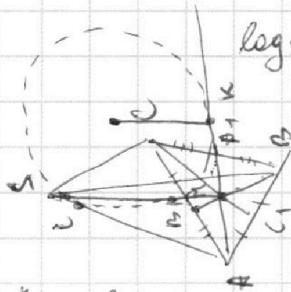
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x = 5y^{-1}$$

$$xy = 5$$



$$\log_5^4 x + 6 \log_5 3 = \log_{25} 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + 2 \log_3 3 = \log_{27} 2^2 (3''') - 8, \quad \log_3^4 x + 2 \log_3 3 - \frac{11}{2} \log_3 3 - 8 = 0$$

оригинал

$$\log_3^4 x + 2 \log_3 3 = 6 \log_3 3^2 (243) - 8$$

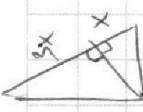
$$\log_3^4 x + \frac{3}{2} \log_3 3 - 8 = 0$$

$$\log_3^4 5y^{-1} - \frac{9}{2} \log_3 3 - 8 = 0$$

$$\log_3^4 5y^{-1} + \frac{9}{2} \log_3 3 - 8 = 0$$

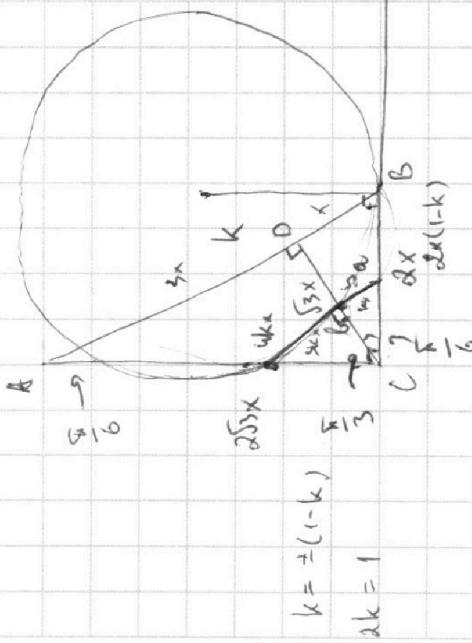
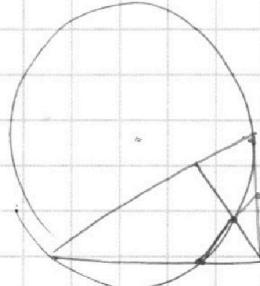
$$f(x) = \log_5^4 x + 6 \log_5 3$$

$$f(x) = \log_3^4 x + \frac{3}{2} \log_3 3 - 8$$



$$\frac{3x}{5} = \frac{5y}{x} \quad y^2 = 3x^2 \Rightarrow y = \sqrt{3}x$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x^2} = \sqrt{2}x \Rightarrow y = \sqrt{2}x$$



$$\log_5^4 x + 6 \log_5 3 = \log_{25} 243 - 8$$

$$kx \cdot 4kx = (4k(1-k))^2$$

$$k^2 \cdot 4 = f(1-k)^2$$

$$k = 1 - k \quad k = \frac{1}{2}$$



$$\log_5^4 x + 6 \log_5 3 = \log_{25} 243 - 8$$

$$kx \cdot 4kx = (4k(1-k))^2$$

$$k^2 \cdot 4 = f(1-k)^2$$

$$k = 1 - k \quad k = \frac{1}{2}$$

$$\log_5^4 x + 6 \log_5 3 = \log_{25} 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + 2 \log_3 3 = \log_{27} 243 - 8$$

$$\log_5^4 (5y) + 6 \log_5 3 = \log_{25} 243 +$$

$$\log_3^4 (5y) + 6 \log_3 3 = \log_{27} 243 +$$

$$\log_5^4 (5y) + 6 \log_5 3 = \log_{25} 243 +$$

$$\log_5^4 (5y) + 6 \log_5 3 = \log_{25} 243 +$$

$$\log_5^4 (5y) + 6 \log_5 3 = \log_{25} 243 +$$

$$\log_5^4 (5y) + 6 \log_5 3 = \log_{25} 243 +$$

$$\log_5^4 (5y) + 6 \log_5 3 = \log_{25} 243 +$$

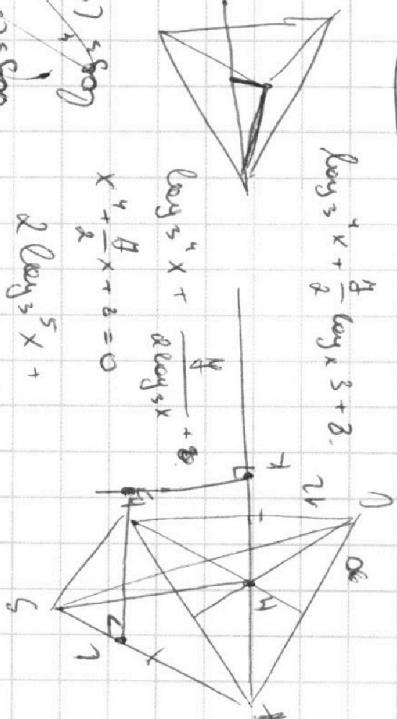
$$\log_5^4 (5y) + 6 \log_5 3 = \log_{25} 243 +$$

$$\log_5^4 (5y) + 6 \log_5 3 = \log_{25} 243 +$$

$$\log_5^4 (5y) + 6 \log_5 3 = \log_{25} 243 +$$

$$\log_5^4 (5y) + 6 \log_5 3 = \log_{25} 243 +$$

$$O = 91 + 2 \times 0$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

