



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. Наибольшим **основным** **теоретическим** **арифметическим** и **рациональным** **числом**

$$a, b, c. \quad a = 2^{d_1} 3^{d_2} 5^{d_3} \dots; \quad \beta = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3} \dots; \quad c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3} \dots, \quad d_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{N}$$

Дано, что **рациональное** **число** **явно** **выражается**, **по** **г.к.** **или** **иным** **наименьшим**

или **две** **условия**, что d_i, β_i, γ_i , при $i \geq 4 = 0$. Тогда **условие** **гов.**, что

$$ab : 2^8 3^{10} 5^{10} \Leftrightarrow 2^{d_1+\beta_1} 3^{d_2+\beta_2} 5^{d_3+\beta_3} : 2^8 3^{10} 5^{10}, \text{ что равносильно}$$

системе:
$$\begin{cases} d_1 + \beta_1 \geq 8 \\ d_2 + \beta_2 \geq 10 \\ d_3 + \beta_3 \geq 10. \end{cases}$$
 Аналогично составим систему для b и c :

$$\begin{cases} d_1 + \gamma_1 \geq 19 \\ d_2 + \gamma_2 \geq 18 \\ d_3 + \gamma_3 \geq 30 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 13 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 \end{cases} \quad \text{Возьмем первые 3 системы:}$$

$$2d_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 42 \Rightarrow$$

$$d_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 21. \quad \text{Аналогично} \quad d_2 + \gamma_2 + \beta_2 \geq 41/2 \text{ и } d_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 53/2$$

$$abc = 2^{d_1+\beta_1+\gamma_1} 3^{d_2+\beta_2+\gamma_2} 5^{d_3+\beta_3+\gamma_3} \rightarrow \min \Rightarrow d_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 21 \text{ и } c$$

учтём $d_i + \beta_i + \gamma_i \in \mathbb{Z}$: $d_2 + \gamma_2 + \beta_2 = 20$; $d_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 26$. \Rightarrow

$$\min(abc) = 2^{21} 3^{20} 5^{26}$$

P.S. В начале решения мы обосновали, что d_i, β_i, γ_i при $i \geq 4 = 0$

Дело, что мы не можем так же считать и с числами $i \leq 3$, г.к. числа

2, 3, 5-простые и есть в числе, на которое по условию делится ab, bc и ac .

Таким же образом из систем уравнений найдем наши.

$$\text{Ответ: } 2^{21} 3^{20} 5^{26}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

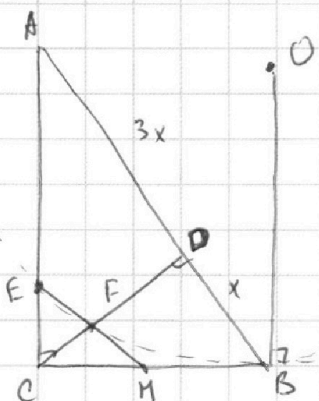
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.



Проведем отрезок EF до пересечения

с BC в с.м. $EM \parallel AB \Rightarrow \triangle CEM \sim \triangle CAB$
(следует из равенства углов $\angle EMC$ и $\angle ABC$ и $\angle CEM$ и $\angle CAB$)

Также имеем $\triangle CFM \sim \triangle CFB$ и $\triangle CEF \sim \triangle CAD \Rightarrow AD:DB = EF:FM = 3:1$.

Пусть $AD = 3x$; $BD = x$.

~~Из подобия треугольников ADC и AEP ($\angle A$ общий и $\angle APC = \angle AEP = 90^\circ$) $\frac{CP}{AD} = \frac{AE}{AB}$~~

Из подобия треугольников ADC и CDB ($\angle A = 90^\circ - \angle ACD = \angle DCB$ и $\angle ADC = \angle CDB = 90^\circ$)

$$\frac{3x}{CD} = \frac{CD}{x} \Rightarrow CD = \sqrt{3}x \Rightarrow \text{По т-е Пифагора } BC = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x.$$

Пусть $\triangle CEM \sim \triangle CAB$ с коэффициентом подобия k . Тогда $EM = 4x \cdot k$.

Тогда $EF:FM = 3 \Rightarrow EF = 3kx$ и $FM = kx$. $MB = BC - MC = 2x - 2xk = 2x(1-k)$.

По т-е о секущей и касательной к окружности. $MB^2 = MF \cdot ME$

$$(2x(1-k))^2 = kx \cdot 4kx \Rightarrow 4x^2(1-k)^2 = 4x^2k^2 \Rightarrow k^2 = (1-k)^2 \text{ и } k = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

ME — средняя линия. $S_{CEF}:S_{CFM} = EF:FM = 3:1 \Rightarrow S_{CEF} = \frac{3}{4} S_{CFM}$.

$$\frac{S_{CEM}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{CEF} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} S_{ABC} = \frac{3}{16} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{16}{3}.$$

Ответ: 16:3.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



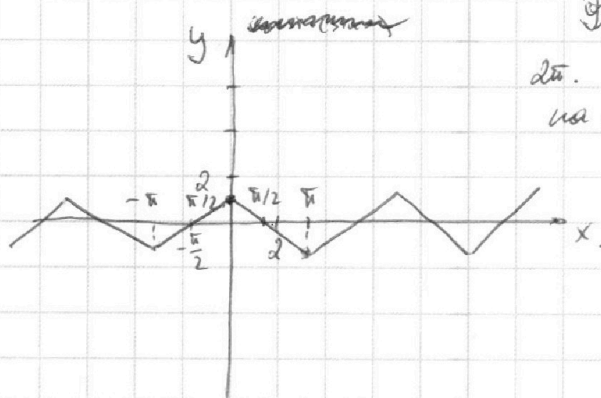
53.

$$\sin \arcsin \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right) = x + \frac{\pi}{2}$$

При $x \in [0; \pi]$, $\frac{\pi}{2} - x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right) = \frac{\pi}{2} - x$.

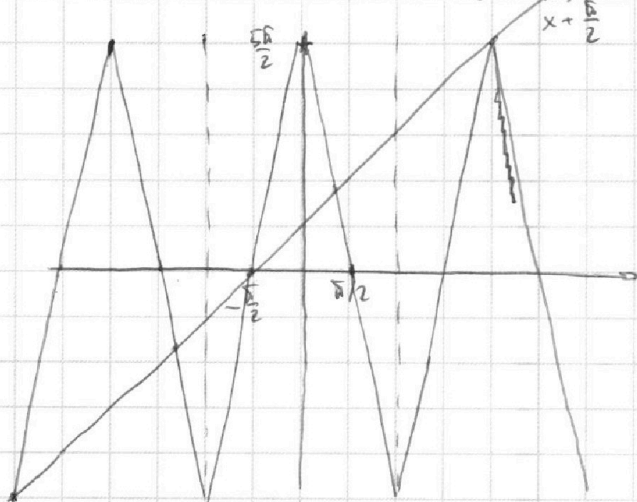
При $x \in [-\pi; 0]$, $\frac{\pi}{2} - x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \frac{\pi}{2} + x$.

Несложно график:



Функция периодична с периодом 2π . Для наглядности, как ось x содержит на отрезке $[-\pi; \pi]$

Несложно график $\sin \arcsin \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right)$ и $x + \frac{\pi}{2}$:



Видим 5 решений:

$$x = 2\pi; x = -3\pi; x = -\frac{\pi}{2};$$

$$\text{пересечение } x + \frac{\pi}{2} \text{ с } \frac{5\pi}{2} - 5x \Rightarrow$$

$$6x = 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ и пересечение}$$

$$x + \frac{\pi}{2} \text{ с } -5x + \frac{15\pi}{2} \Rightarrow 6x = -3\pi \Rightarrow$$

$$x = -\frac{4}{3}\pi$$

Ответ: $2\pi; -3\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; -\frac{4}{3}\pi$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

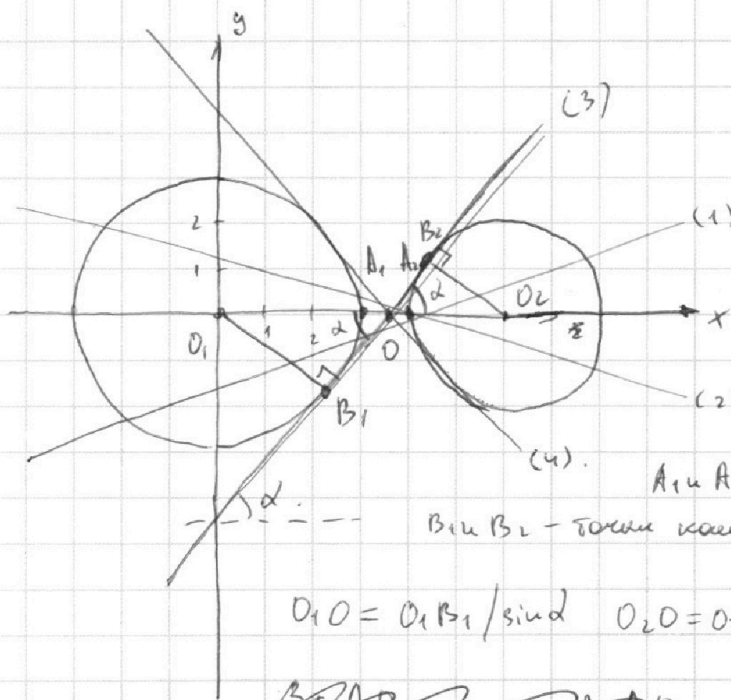
54.

$$\begin{cases} ax + dy - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2y = 3b - ax \\ x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 3b - ax \\ x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Получаем, что решение системы это пересечение прямой $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$ с

двумя окружностями: 1 - с центром в $(0;0)$ и радиусом 3, 2 - с центром в $(6;0)$ и радиусом 2.



Дано, что прямые 1 и 2 пересекают окружности в 4 точки.

Прямые 3 и 4 - радиусы касательных к окружностям. Эти прямые пересекают окружности в 2 точки.

Получаем угол α .

A_1 и A_2 - т. перес. окружн с ОХ.

B_1 и B_2 - точки касания. O - т. пересечения окружностей с ОХ.

$$O_1O = O_1B_1 / \sin \alpha \quad O_2O = O_2B_2 / \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\frac{3 + A_1O}{\sin \alpha} = 3 \quad \frac{2 + A_2O}{\sin \alpha} = 2 \Rightarrow 3$$

$$3 + A_1O = \frac{3}{\sin \alpha} \quad 2 + A_2O = \frac{2}{\sin \alpha} \quad \text{Сложим: } A_1A_2 + 5 = \frac{5}{\sin \alpha}; \quad A_1A_2 = 6 - 3 - 2 = 1$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{6} \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{5}{\sqrt{11}} \Rightarrow -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\text{Умножим на } \sqrt{11} \Rightarrow -\frac{a}{2} > -\frac{5}{\sqrt{11}} \Rightarrow a > -\frac{10}{\sqrt{11}} \quad \text{и} \quad a < \frac{10}{\sqrt{11}} \Rightarrow \text{Для } -\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}} \text{ найдётся}$$

b , удовлетворяющее.

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right).$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$NS. \log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 x^2 + 6 - 3 \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_3 5y = \log_3 5y^2 + (5^4) - 3$$

$$\text{Преобразуем: } \log_3^4 x + 6 \log_3 x = \frac{5}{2} \log_3 x - 3; \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_3 5y = \frac{11}{2} \log_3 5y - 3.$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_3 x + 3 = 0; \quad \log_3^4(5y) - \frac{7}{2} \log_3 5y + 3 = 0$$

$$\text{Заменим, т.к.} \quad \log_3^4(5y) = (-\log_3(5y)^{-1})^4 = \log_3^4(5y)^{-1} \Rightarrow$$

$$\log_3^4(5y)^{-1} + \frac{7}{2} \log_3 5y^{-1} + 3 = 0.$$

Пусть $f(x) = \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_3 x + 3$. Тогда данные условия задачи равносильны утверждению о том, что корни $f(x) = 0$ совпадают.

$$\text{Пусть корни } x \text{ и } (5y)^{-1} \text{ совпадают} \Rightarrow x = \frac{1}{5} y^{-1} \Rightarrow xy = \frac{1}{5}.$$

Пусть они не совпадают: исследуем функцию $g(t) = t^4 + \frac{7}{2}t + 3$. $t = \log_3 x$

$$t^4 + \frac{7}{2}t + 3 = 0 \Rightarrow \frac{2t^5 - 16t + 3}{2t} = 0 \quad t \neq 0 \Rightarrow 2t^5 - 16t + 3 = 0$$

$g'(t) = 4t^3 + 16 = 0 \quad t \in \emptyset \Rightarrow g'(t) > 0$, при $\forall t \Rightarrow$ функция монотонно возрастает и может пересекать $y=0$ только в одной точке и корни

x и $(5y)^{-1}$ совпадают.

Ответ: $\frac{1}{5}$.

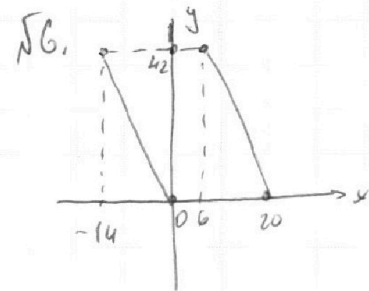
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Для того, чтобы точка $A(x, y)$ принадлежала Δ на границе-крайней, должны выполняться условия:

$$\begin{cases} y \geq -3x \\ y \leq 60 - 3x \\ y \geq 0 \\ y \leq 42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 42 \\ 0 \leq y + 3x \leq 60 \end{cases} \quad (1)$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33 \Rightarrow (3x_2 + y_2) - (3x_1 + y_1) = 33. \quad (2)$$

Нам необходимо найти количество способов выбрать x_1, x_2, y_1, y_2 , когда выполняются условия (1) и (2). Дело, что если мы определим число $3x_2 + y_2$, то

$3x_1 + y_1$ определится единственным способом образом. Т.к. $3x_1 + y_1 \geq 0$, то

$3x_2 + y_2 \geq 33$, тогда количеству $3x_2 + y_2$ будет соответствовать

$$(3x_2 + y_2 - 33) = 3x_1 + y_1.$$

$$3x_2 + y_2 = 33, 34, 35, \dots, a \quad 3x_1 + y_1 = 0, 1, 2, 3, \dots, b.$$

Дело, что для a верно: $3x_2 + y_2 = a \Rightarrow y = a - 3x \Rightarrow 0 \leq a - 3x \leq 42$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{3} - 14 \leq x \leq \frac{a}{3} \end{cases} \quad \text{Учитывая } x \in \mathbb{Z}: \left[\frac{a}{3} \right] - 14 \leq x \leq \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor, \text{ где}$$

$\lceil x \rceil$ - минимальное число не меньше x , $\lfloor x \rfloor$ - максимальное

число, не больше $x \Rightarrow$ количество выборов x равно $\lfloor \frac{a}{3} \rfloor - \lceil \frac{a}{3} \rceil + 15$
 для каждого выбранного x соответствует y такое, что $y = a - 3x \Rightarrow$
 количество способов выбора $y + 3x \in \left[\frac{a}{3} \right] - \left\lceil \frac{a}{3} \right\rceil + 15$, то для $a: 3$

даёт 15, а для $a/3 - 14 \Rightarrow$ т.к. среди пар $(33; 0); (34; 1); \dots$

если $y \geq 3$, то и $x \geq 3$, то если выбрать пара: 3, то количество способов: $15^2 = 225$, иначе $-14^2 = 196$. Среди пар $(33; 0); (34; 1); \dots (60; 27)$ $\frac{59-33+1}{3} + 1 = 10$ пар чисел 3 и $28-10 = 18$ не кратных \Rightarrow ответ: $10 \cdot 225 + 18 \cdot 196 = 5498$.

Ответ: 5498.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 7.



Пл. к. L-г касание и K-г касание, но г-е

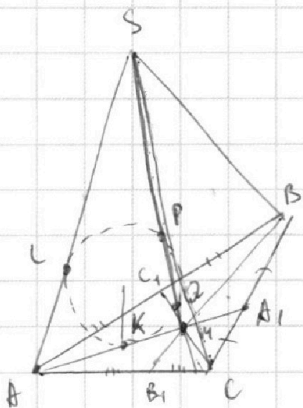
о касаниями $AL = AK$. $SP = QH \Rightarrow$ каска

г. S и г. M имеет ортогональную ось симметрии

плоскости сфер $\Rightarrow SL = MK \Rightarrow AA_1 = AH$

$SL = MK$ и $AL = AK \Rightarrow AK + MK = SL + AL = 5$.

№ 7.



$SP = QH \Rightarrow$ г. S и M имеет ортогональную ось симметрии

плоскости сфер $\Rightarrow SL = MK$.

$AL = AK$, но г-е о касаниями $\Rightarrow AS = AH = 5$.

$\Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} \cdot 5 = \frac{15}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



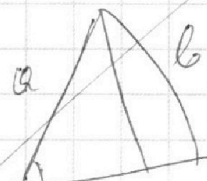
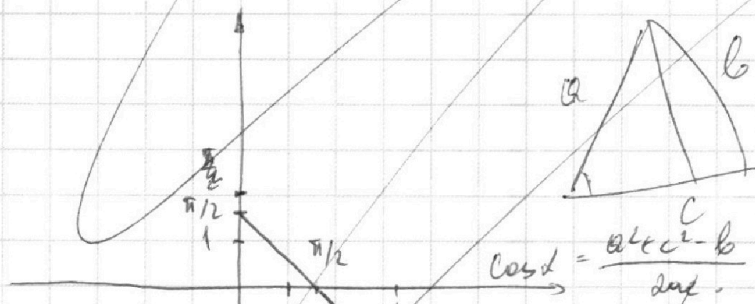
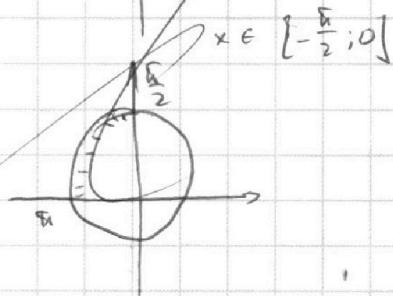
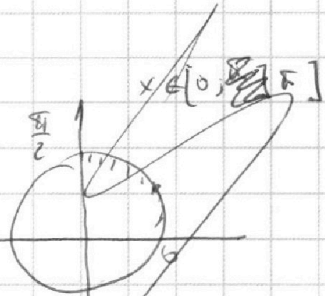
53. $\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

~~$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$~~

Для $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ $\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$

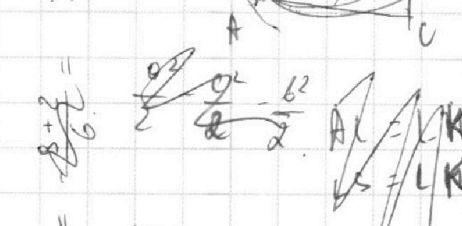
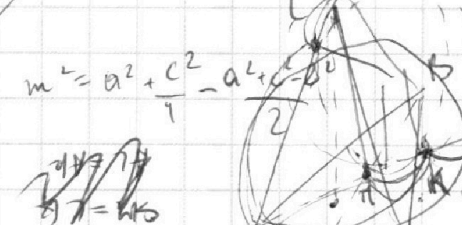
Для $x \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$ $\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - (\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\pi}{2} + x$

Несмотря на график $\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$



$\cos \alpha = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

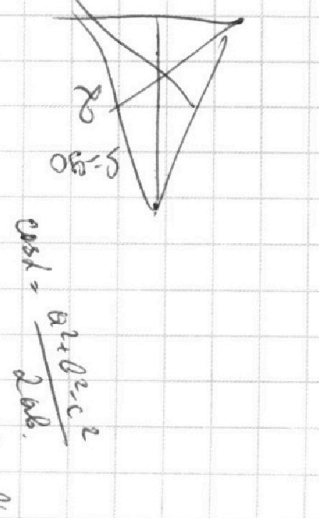
$m^2 = a^2 + \frac{c^2}{4} - 2ac \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$



$y = kx + b$
 $0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}k + b$
 $-\frac{\sqrt{3}}{2} = -k + b$
 $\frac{\sqrt{3}}{2} = k - b$
 $k = 1, b = 0$

$k = 1$
 $b = 0$
 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \cos \alpha$
 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

$AL = x, AK = y$
 $AS = LK$
 $AS = AK$
 $m^2 = a^2 + \frac{c^2}{4} - 2ac \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$
 $f(x) = x^2$
 $x_0^2 + 2x_0(x-x_0)$
 $1 - 2(1-x)$
 $3 - 2x$

$\frac{3}{\sin \alpha} = 5 + x$
 $\frac{2}{\sin \alpha} = 2$
 $\sin \alpha = 2 - x$
 $\sin \alpha = -ax + 3b$
 $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$

$ax + by - 3b = 0$ $x^2 - 12x + 36 = 0$
 $(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 36) = 0$
 $x^2 + y^2 = 9$
 $(x-6)^2 + y^2 = 4$

$\frac{10}{\sqrt{11}} < a_1 < \frac{40}{\sqrt{11}}$

$\frac{5}{\sin \alpha} = 6$
 $\sin \alpha = \frac{5}{6}$
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$
 $\frac{5}{\sqrt{11}} < a_1 < \frac{40}{\sqrt{11}}$

$\frac{3}{\sin \alpha} + \frac{2}{\sin \alpha} = 5 + x + y = 6$

$\frac{3}{\sin \alpha} = 5 + x$
 $\frac{2}{\sin \alpha} = 2$
 $\sin \alpha = 2 - x$
 $\sin \alpha = -ax + 3b$
 $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$

$\frac{5}{\sin \alpha} = 6$
 $\sin \alpha = \frac{5}{6}$
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$
 $\frac{5}{\sqrt{11}} < a_1 < \frac{40}{\sqrt{11}}$

$\frac{3}{\sin \alpha} + \frac{2}{\sin \alpha} = 5 + x + y = 6$

$\frac{3}{\sin \alpha} = 5 + x$
 $\frac{2}{\sin \alpha} = 2$
 $\sin \alpha = 2 - x$
 $\sin \alpha = -ax + 3b$
 $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$

$\frac{5}{\sin \alpha} = 6$
 $\sin \alpha = \frac{5}{6}$
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$
 $\frac{5}{\sqrt{11}} < a_1 < \frac{40}{\sqrt{11}}$

$\frac{3}{\sin \alpha} + \frac{2}{\sin \alpha} = 5 + x + y = 6$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b, c \in \mathbb{N} \quad ab : 2^9 3^{10} 5^{10}, \quad bc : 2^{10} 3^{12} 5^{13}, \quad ac : 2^{12} 3^{18} 5^{30}$$

$$a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} \quad b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3} \quad c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3}$$

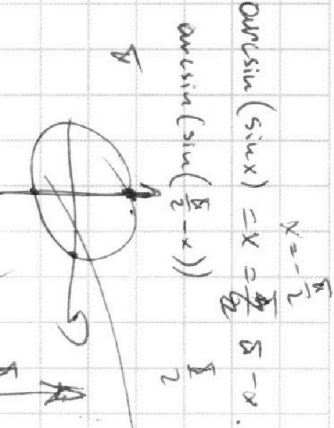
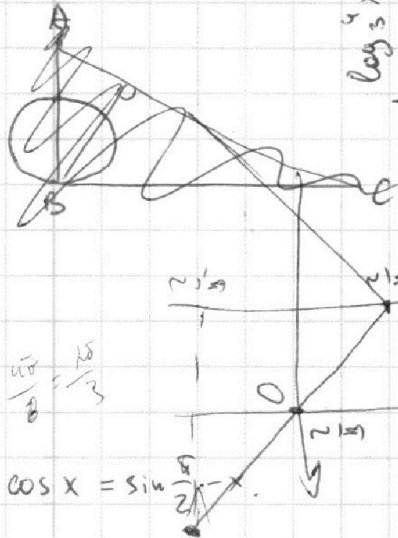
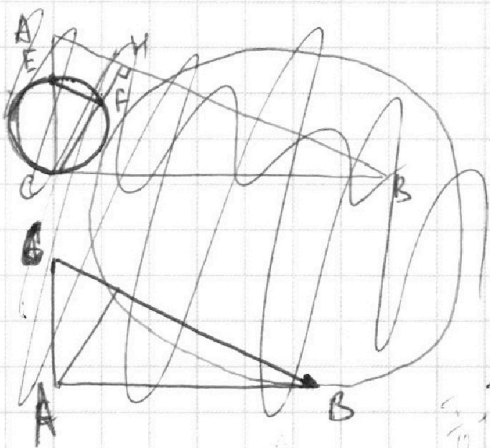
$$2^{\alpha_1 + \beta_1} 3^{\alpha_2 + \beta_2} 5^{\alpha_3 + \beta_3}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 9 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \alpha_3 + \beta_3 \geq 10 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 13 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 \geq 19 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 18 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 30 \end{cases}$$

$$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} \quad 1 \text{ кр.}$$

$$\log_3 x + 6 \log_3 3 = \log_3 x + 6 = 24 \Rightarrow \log_3 x = 18 \Rightarrow x = 3^{18}$$

2.



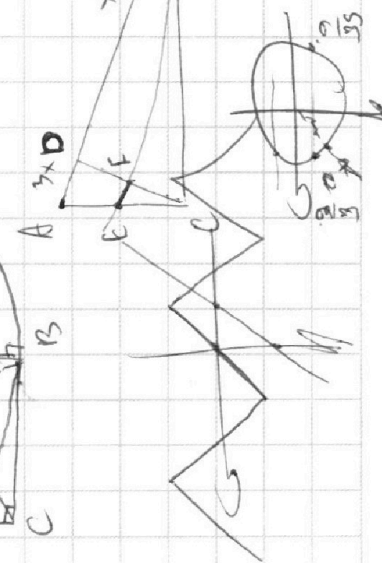
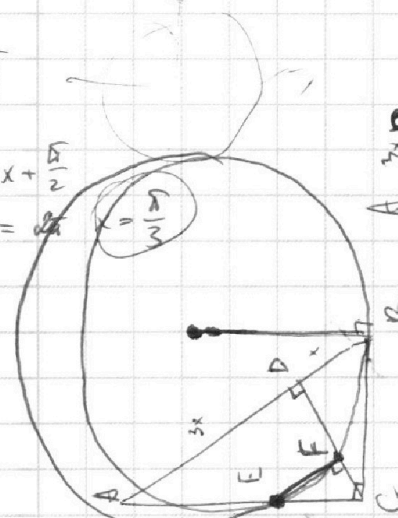
$$\sin(\sin(\cos x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow -x = x \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow -6x = 0 \Rightarrow x = 0$$



$$\sin(\sin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\sin(\cos x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = x + \frac{\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x = 5y^{-1}$

$xy = 5$

$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_{x^2} 243 - 3$ $\log_3^4 x + 6 \log_3 x - 2 \frac{5}{2} \log_3 x - 3 = 0$

$\log_3^4 x + 2 \log_3 5 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$, $\log_3^4 x + 2 \log_3 5 - \frac{11}{2} \log_3 3 - 8 = 0$

$\log_3^4 x + 2 \log_3 5 = 6 \log_{25y^2} (243) - 8$, $\log_3^4 x + \frac{3}{2} \log_3 x - 8 = 0$

$\log_3^4 5y + \frac{1}{2} \log_3 3 - 8 = 0$

$\log_3^4 5y^{-1} + \frac{1}{2} \log_3 3 - 8 = 0$

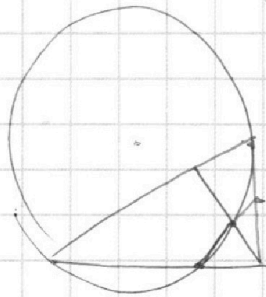
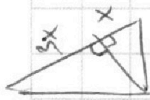
$f(x) = \log_3^4 x + 6 \log_3 x$

$f(x) = \log_3^4 x + \frac{1}{2} \log_3 x - 8$

$y = \sqrt{5x}$

$\frac{3x}{5} = \frac{y}{2}$ $y^2 = 3x^2 \Rightarrow y = \sqrt{3}x$

$\sqrt{3x^2 + 3x^2} = \sqrt{2}x = \sqrt{3}x$

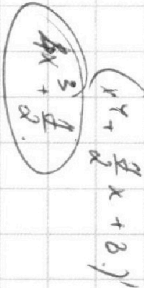


$\log_3^4(5y) + 2 \log_3 5 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$

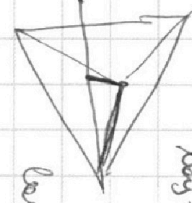
$\log_3^4(5y) + 6 \log_3 5 = 6 \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$

$\log_3^4(5y) + 6 \log_3 5 = 6 \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$

$\frac{3x}{5} = \frac{y}{2}$

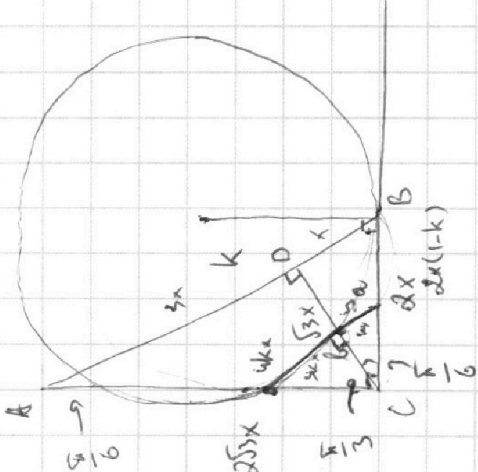


$\log_3^4 x + \frac{1}{2} \log_3 x - 8 = 0$



$\log_3^4 x + \frac{1}{2} \log_3 x - 8 = 0$

$10x^4 + 16 = 0$



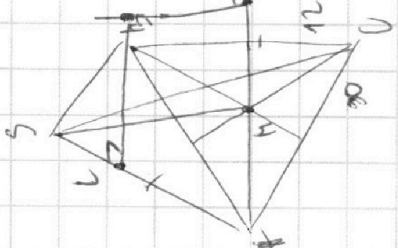
$\frac{1}{4} \cdot ABC \Rightarrow 16/3$

$kx \cdot 4k = (k(1-k))^2$
 $k^2 \cdot 4 = k^2(1-k)^2$
 $k = 1-k$ $k = \frac{1}{2}$

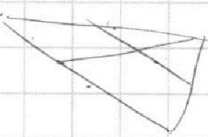
$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_{x^2} 243 - 3$

$2 \log_3^5 x + \dots = 0$

$\log_3^4 x + \frac{1}{2} \log_3 x - 8 = 0$



$k = \frac{1}{2}(1-k)$
 $2k = 1 - k$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = -\frac{42}{14}x = -3x \quad y = 0 \quad y = 42 \quad y = 60 - 3x$$

$$\begin{cases} y \geq -3x \\ y \geq 0 \\ y \leq 42 \\ y \leq 60 - 3x \end{cases}$$

$$3x_1 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

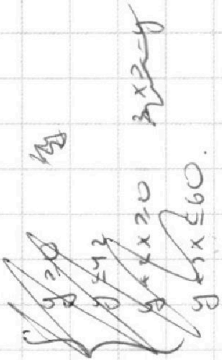
$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 \leq 60$$

$$(y_2 + 3x_2) - (y_1 + 3x_1) = 33$$

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 42 \\ 0 \leq y + 3x \leq 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq 3x \leq 60 \\ 0 \leq y + 3x \leq 60 \end{cases}$$



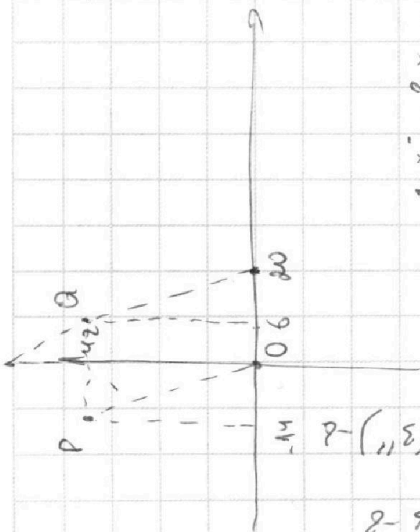
$$\begin{aligned} y + 3x &= 60 \\ 0 \leq 3x \leq 60 - 3x \leq 42 \\ -3x \leq -3x \leq -11 \\ -3 \leq x \leq 11 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2R \cdot B5 \\ 0 \ 52 \ 2 \\ 0 \ 2 \ 55 \\ \hline 95 \ 1 \\ 2 \ 95 \ 1 \\ 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 89 \ 51 \\ 21 \ 2 \\ 19 \ 1 \\ 5 \ 8 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{0}{2} \right] - \left[\frac{0}{3} \right] + 14 + 1 &= 0 - 3x \\ \left[\frac{0}{2} \right] - 11 &\leq x \leq \left[\frac{0}{3} \right] \\ 11 - 14 &\leq x \leq 11 \\ -3 &\leq x \leq 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{0}{2} \right] - \left[\frac{0}{3} \right] + 14 + 1 &= 0 - 3x \\ 11 - 14 &\leq x \leq 11 \\ -3 &\leq x \leq 11 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \log_3^4 x + 6 \log_3 x - \log_3 x^2 &= 2 \\ \log_3^3 (5y) + 6 \log_3 5y - \log_3 5y^2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15 \cdot 10 &= 150 \\ 14 \cdot 10 &= 140 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{0}{3} \right] - \left[\frac{0}{3} \right] + 14 + 1 &= 0 - 3x \\ 11 - 14 &\leq x \leq 11 \\ -3 &\leq x \leq 11 \end{aligned}$$

Handwritten notes and scribbles at the bottom of the page.