



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-16;80)$ ,  $Q(2;80)$  и  $R(18;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left. \begin{aligned} a & b : 2^8 3^{14} 5^{12} \\ b & c : 2^{12} 3^{20} 5^{17} \\ a & c : 2^{14} 3^{21} 5^{39} \end{aligned} \right\} \text{перемножим и получим, что}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{34} 3^{55} 5^{68} \Rightarrow abc : 2^{17} 3^{28} 5^{34} ; \text{ поскольку}$$

$a^2 b^2 c^2$  - квадрат  $abc$ , можем  $abc : 3^{28}$ , но  $a^2 b^2 c^2 : 3^{55} \Rightarrow$

$$\Rightarrow abc : 3^{28} ; ac : 5^{39} \Rightarrow abc : 5^{39} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc : 2^{17} 3^{28} 5^{39} , \text{ а } abc : 2^{14} , \text{ поскольку}$$

$a^2 b^2 c^2 : 2^{34}$ . минимально возможное значение

для  $abc$  при условии, что  $abc : 2^{17} 3^{28} 5^{39}$

$$\text{— это } abc = 2^{17} 3^{28} 5^{39}$$

Пример:  $a = 2^5 3^{14} 5^{12}$

$$b = 2^3 3^7$$

$$c = 2^9 3^{14} 5^{27}$$

$$a \cdot b \cdot c = 2^{17} 3^{28} 5^{39}$$

все условия выполняются, а

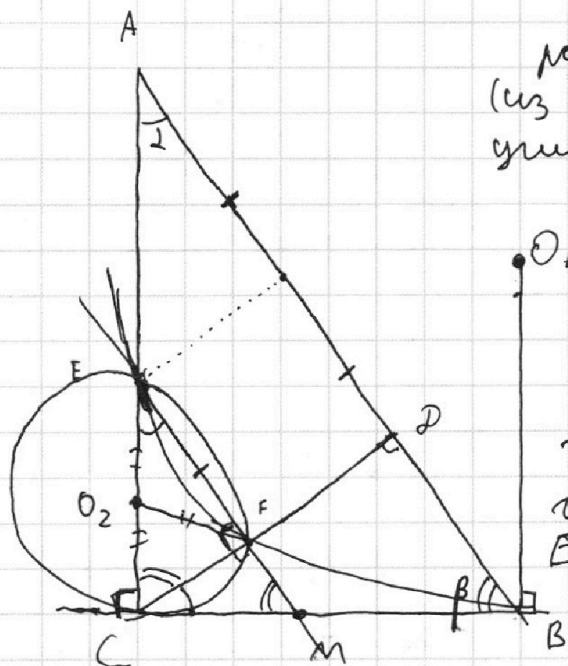
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Для начала отметим равные углы:  $\angle CAB = \angle CEF = \angle DCB$  (из параллельности и по сумме углов в  $\triangle ABC$ ). Также  $\angle ACF = \angle DCB = \angle CME$ .

$$\angle DCM = \angle CEF = \alpha \Rightarrow$$

$\Rightarrow CB$  - касательная к описанной окружности  $\triangle CEF$ . Также  $\triangle CEF$  -  $\triangle ABC \Rightarrow O_2$  - центр гипотенузы. (п.у, поскольку  $EF \parallel AB$ ;  $CF \perp AB \Rightarrow CF \perp EM$ )

Окружности с центрами

в точках  $O_1$  и  $O_2$  пересекаются в точках  $E$  и  $F$ . (это окружность из условия и описанная вокруг

$\triangle CEF$  соответственно)  $\Rightarrow EF$  - рад. ось этих окружностей, а поскольку  $CB$  - касательная к обеим окружностям, то  $CM^2 = MB^2 \Rightarrow CM = MB$ , где  $M$  -  $EF \cap CB$  (прямых).  $CM = MB$ ;  $EM \parallel AB \Rightarrow EM$  - средняя линия  $\triangle CAB \Rightarrow \frac{CF}{FD} = 1 \Rightarrow S_{\triangle CEF} = \frac{1}{4} S_{\triangle CAB}$

$$S_{\triangle CAD} = \frac{5}{14} S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_{\triangle CEF} = \frac{5}{28} S_{\triangle ABC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle BCA}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{28}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \cdot \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$\arcsin$  возвращаем значение от  $\left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = 2\pi k + \frac{\pi}{2} - x, \quad (1)$$

$$\text{если } \cos(x) \geq 0 \text{ и } \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = 2\pi k + \frac{\pi}{2} + x, \quad (2)$$

если  $\cos(x) < 0$

$$(1) \quad 10 \cdot \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi k - x \right) = \pi - 2x$$

$$5\pi + 20\pi k - 8x = \pi$$

$$-8x = -4\pi - 20\pi k$$

$$x = \frac{\pi + 5\pi k}{2}$$

$$x = \left[ \begin{array}{l} \frac{\pi + 5\pi k}{2} \\ \frac{-\pi - 5\pi m}{3} \end{array} \right]$$

, где  $k, m$  - целые числа.

$$(2) \quad 10 \cdot \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi k + x \right) = \pi - 2x$$

$$5\pi + 20\pi k + 10x = \pi - 2x$$

$$12x = -4\pi - 20\pi k$$

$$x = -\frac{\pi + 5\pi k}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

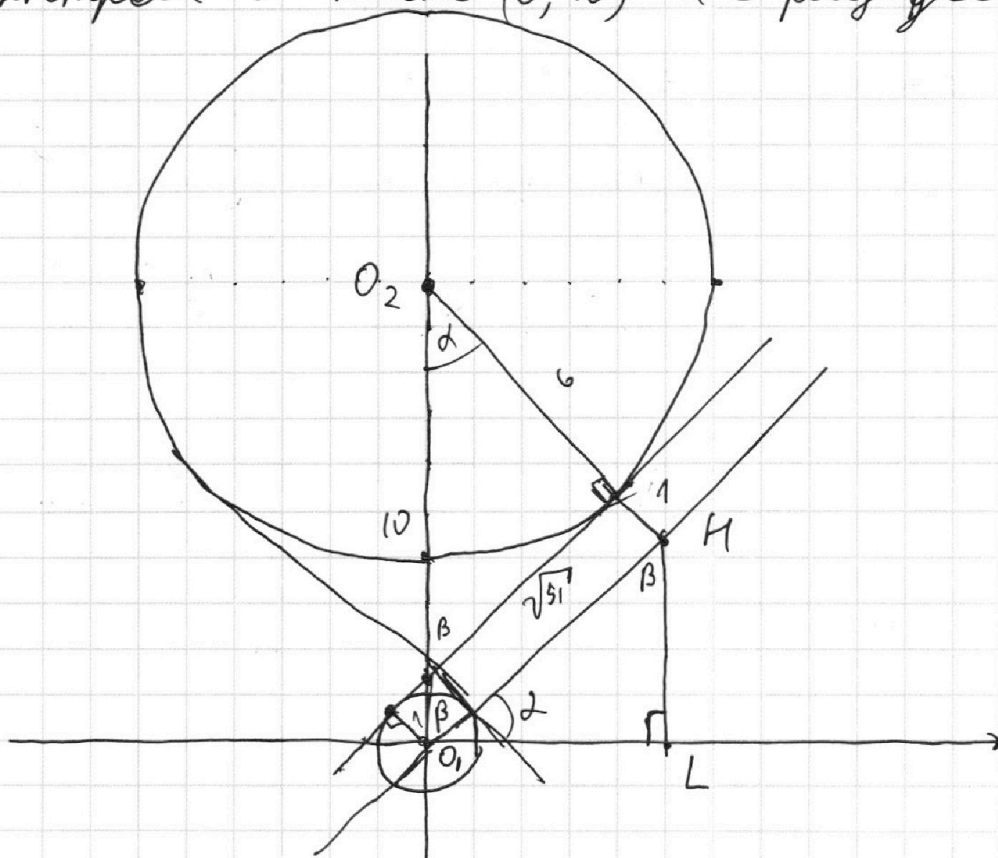


$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & \rightarrow y = \frac{ax + 4b}{3} \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 - 1 = 0$  ①  
 $x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0$  ②

① — это окружность ~~в центре~~ с центром в точке  $(0; 0)$  и с радиусом 1.

②  $x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0 \Rightarrow x^2 + (y - 10)^2 = 36$  — это окружность с центром в точке  $(0; 10)$  и с радиусом 6.



Можно заметить, что при  $|a| >$  определенного значения всегда найдется такое  $b$ , чтобы система уравнений имела ровно 4 решения.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы найти угол наклона касательной к этим окружностям построим параллельную ей касательную, проходящую через точку  $(0,0)$ .  $\triangle O_2 O_1 M$  и  $\triangle O_1 M L$  подобны  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow O_1 L = \frac{\sqrt{51}}{10} \cdot 7$$

$$ML = \frac{\sqrt{51}}{10} \cdot \sqrt{51} \Rightarrow \text{угл. коэфф. наклона} = \frac{\sqrt{51}}{7} =$$

$$= \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \alpha \text{ принадлежит промежутку} = \left( \frac{3\sqrt{51}}{7}; \infty \right)$$

$$\Rightarrow \text{ответ: } \alpha \in \left( -\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7} \right) \cup \left( \frac{3\sqrt{51}}{7}; \infty \right)$$

(Поскольку картинка симметричная относительно оси  $y$ ).

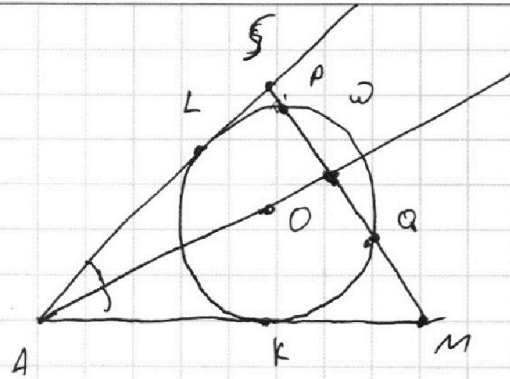
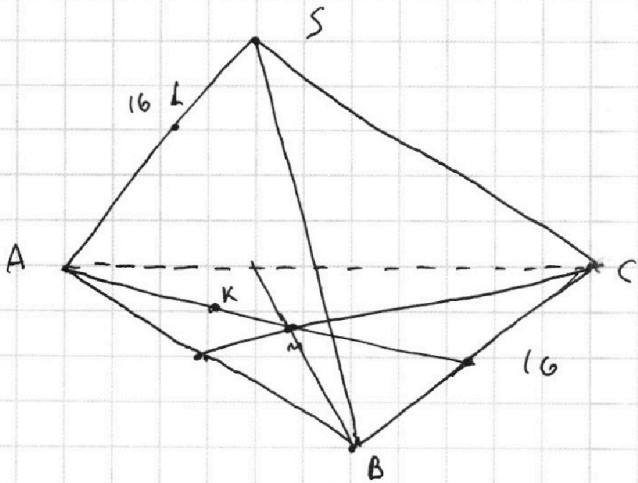
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



рассмотрим плоскость  $ASM$ :  $\omega$  касается

$AS$  и  $AM$ , значит поскольку  $SP = MQ$ , то

точки  $P$  и  $Q$  лежат симметрично отно-

сительно центра отрезка  $SM$ , можно заметить

заметить, что если ~~то~~  $AS = AM$ , то все

равенства выполняются, ~~если~~ и если

~~мы можем двигать одну из точек~~

~~увеличивая расстояние от  $A$ , то пер.~~

~~пер. к отрезку  $SM$  где не будет принадлежать~~

мы можем крутить  $AQ$  по дуге  $PQ$   
с сохранением расстояний до  $O$ , то одна из  
расстояний  $SP, MQ$  будет уменьшаться, а дру-  
гие увеличиваться (и  $S$  и  $M$  принадлежат дуге)

$\angle K$  от точки  $A$  соответственно  $\Rightarrow$  функции  
будут монотонными при вращении в 1 ~~сторону~~  
направлении пока выполняются эти условия!

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\Rightarrow$  возьмем только вариант, когда  $AS = AM \Rightarrow$

$\Rightarrow AM = AS = 16.$

медиа медиана

в отношении 2:1 медиана

пересекает  $\Rightarrow MA_1 = 8$

$\Rightarrow CA_1 = A_1B \Rightarrow \triangle BCM - \text{ну}$

(мед. =  $\frac{1}{2}$  стороны)  $S_{ABS} = 100 = 16 \cdot \frac{AH}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$  высота в  $\triangle BMC$  к  $BC$

3 раза меньше  $h$  (теорема Фалеса,

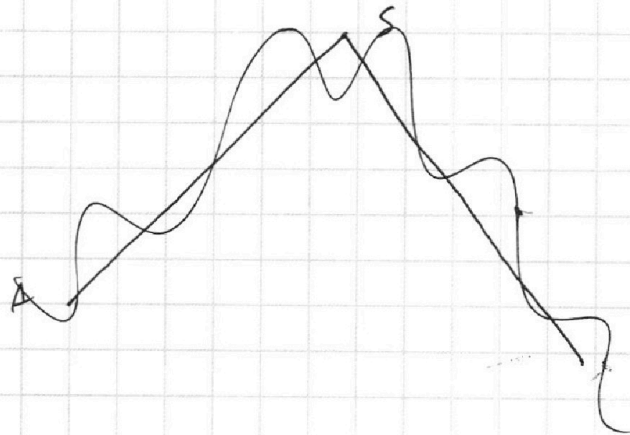
если провести через  $M$  прямую  $\parallel BC$ )  $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{BMS} = \frac{25}{6} \cdot 16 : 2 = \frac{CM \cdot MB}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow CM \cdot MB = \frac{400}{6} = CC_1 \cdot BB_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow CC_1 \cdot BB_1 = \frac{100 \cdot 3}{2} \Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{24 \cdot 100 \cdot 3}{2} =$

$= 3600.$







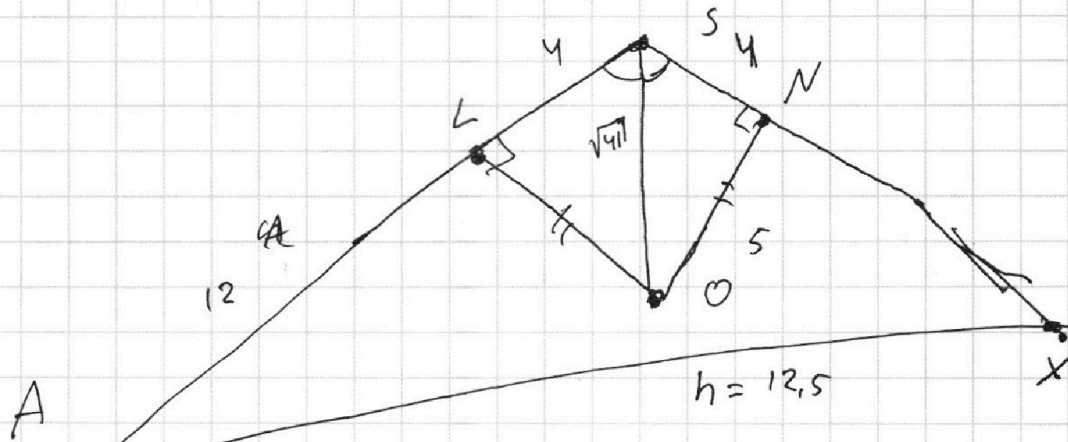
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Можно заметить, что в плоскости  $ASN$  угол  $AXL$  — это двугранный угол при ребре  $BC$ , где  $X$  — точка пересечения  $SN$  и  $BC$ . Также можно заметить, что эта плоскость перпендикулярна плоскости  $ABC \Rightarrow AX \perp BC \Rightarrow AX = h = \frac{25}{2}$  ( $\perp$  обоим плоскостям  $\Rightarrow \perp$  пересечению плоскостей).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y) + 64 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 1 \neq \emptyset$$

$$x^2 + y^2 = -64 + 20y$$

$$x^2 + (y - 10)^2 - 100 = -64$$

$$x^2 + (y - 10)^2 = 36$$

$R = 6$ .

$$ax - 3y + 4b = 0$$

$$y = \frac{ax + 4b}{3}$$

$$y = kx$$

$$(y - 10)^2 + x^2 = 36$$

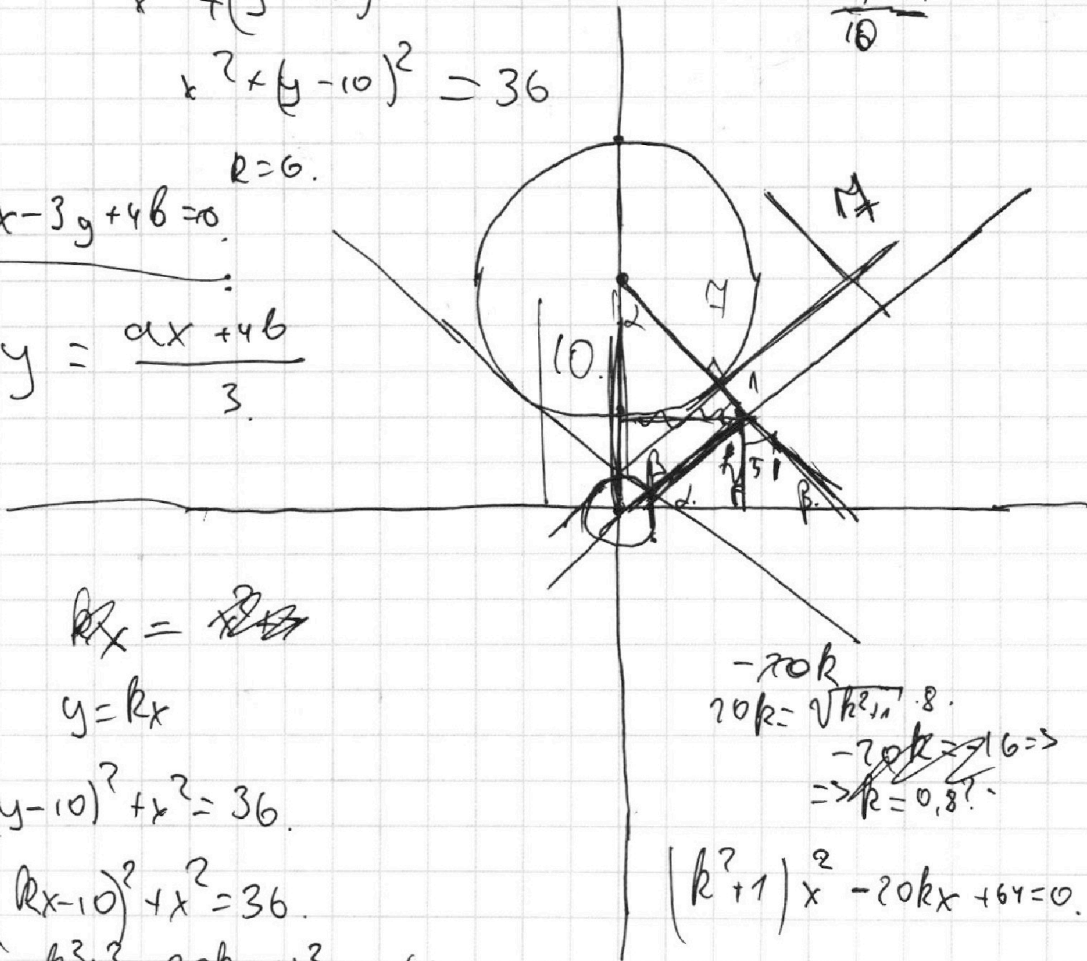
$$(kx - 10)^2 + x^2 = 36$$

$$k^2 x^2 - 20kx + x^2 = -64$$

$$20k = \sqrt{k^2 + 1} \cdot 8$$

$$-20k = 16 \Rightarrow k = 0,8$$

$$(k^2 + 1)x^2 - 20kx + 64 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

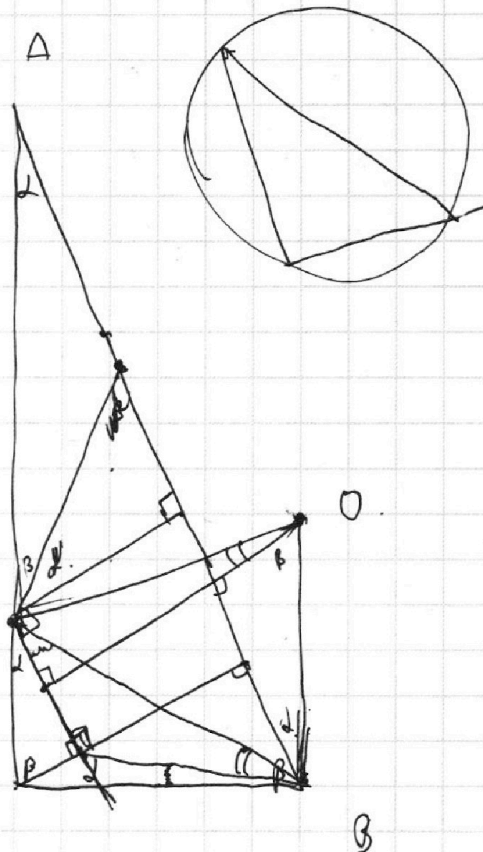
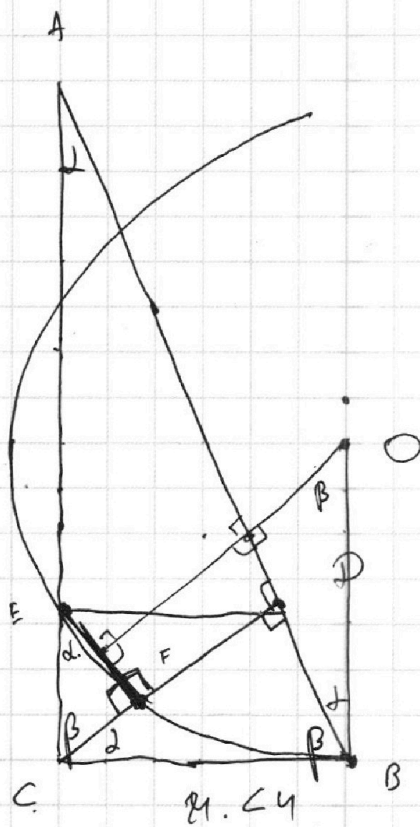
- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



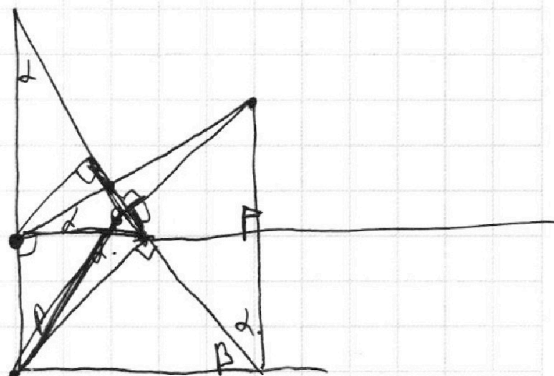
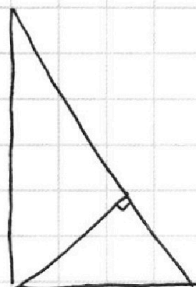
№2746



$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{CB} =$$

$$\frac{CD}{EF} = \frac{CF}{BD}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{CE}{CA} = \frac{EF}{AD}$$



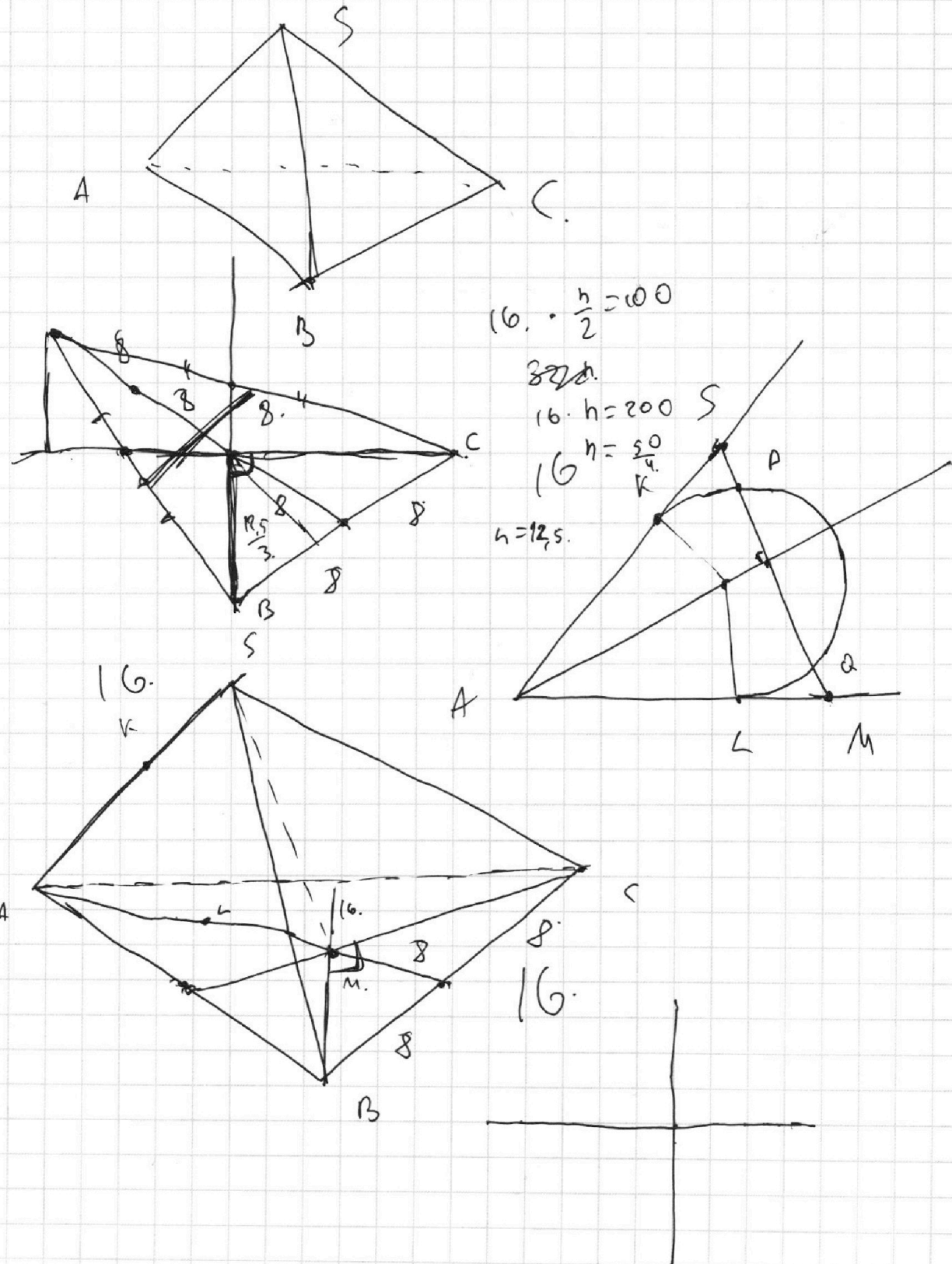
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

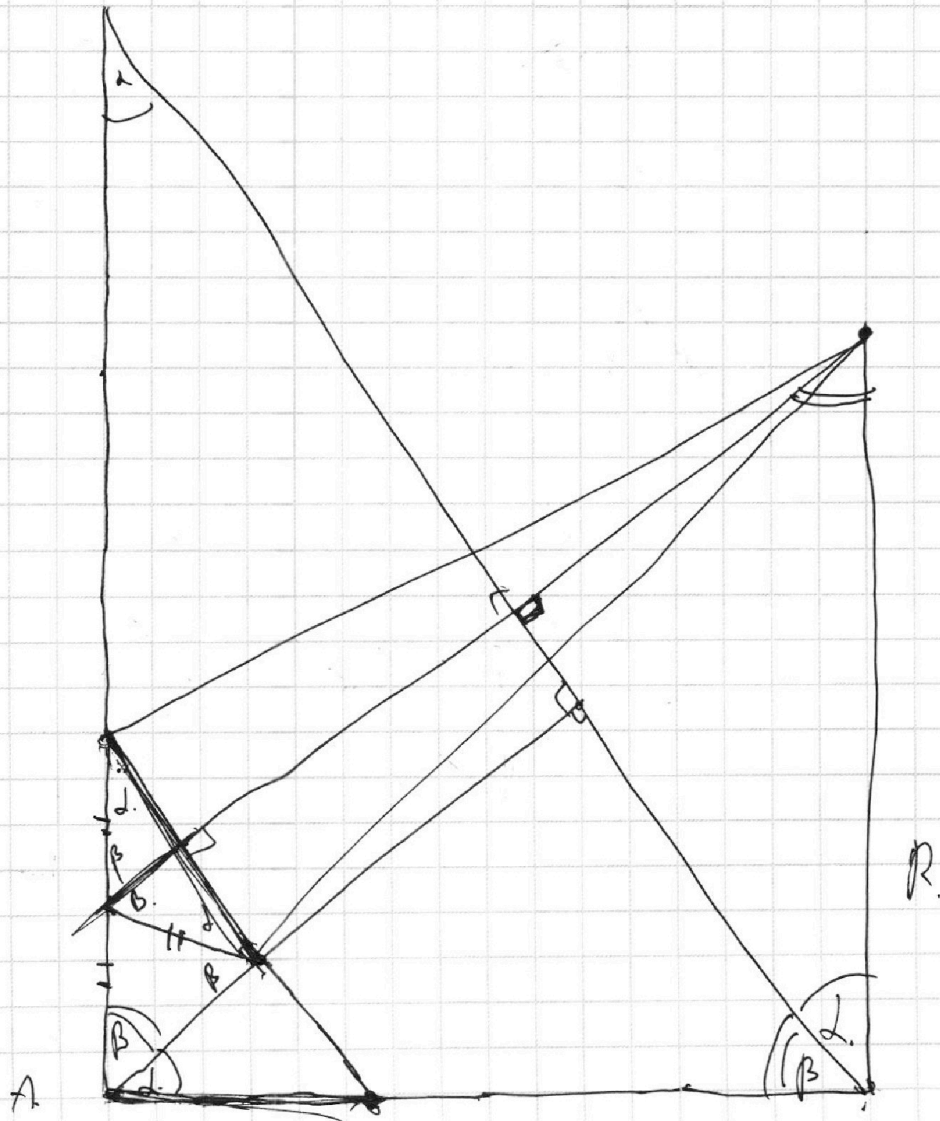
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$

$$\log_5^4(t) - 3 \log_t 5 = \log_{t^3} 625 - 3$$

$$\log_5^4(y) + 4 \log_y 5 = \log_y^3 0,2 - 3$$

$$\log_7(xy) = \log$$



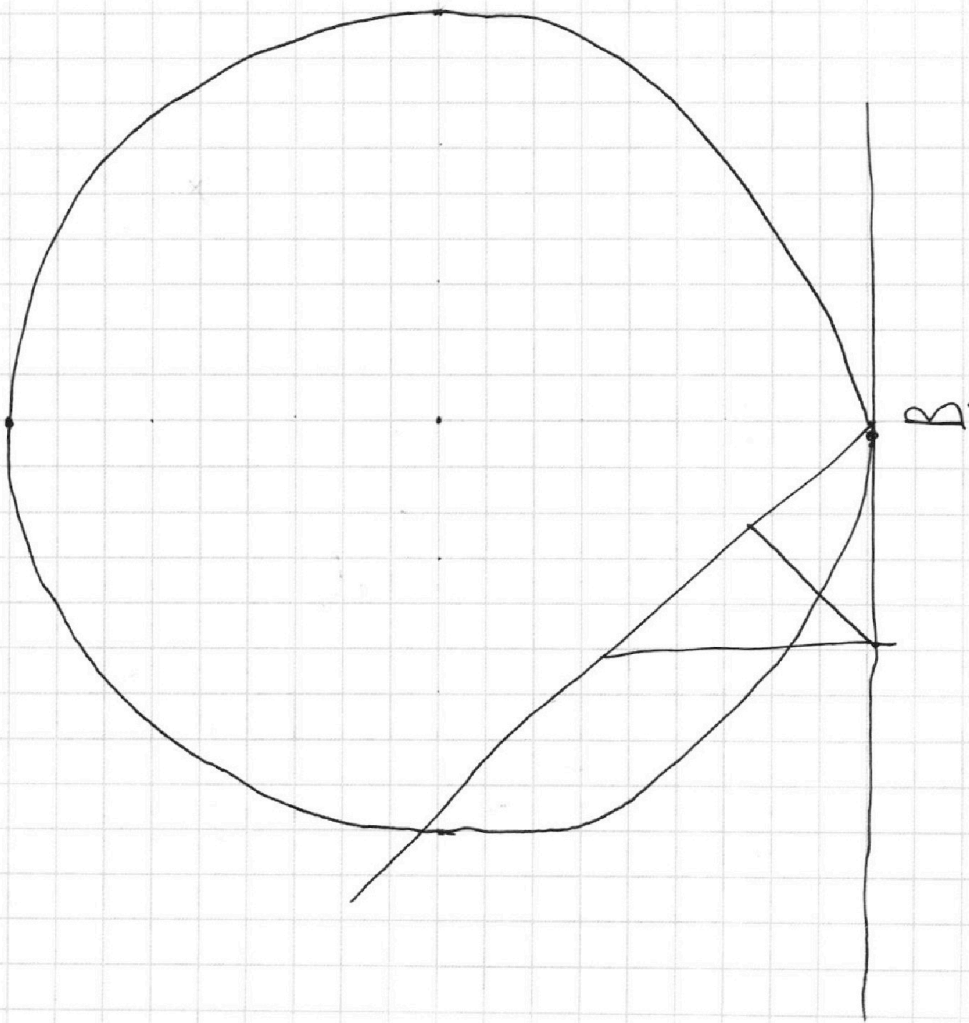
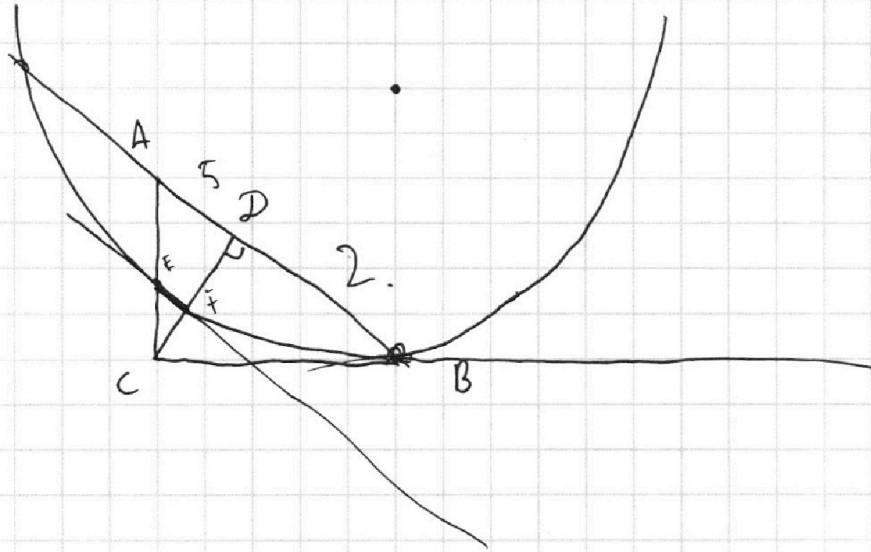
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^8 3^{14} 5^{12}$$

$$bc: 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$ac: 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$a^2 b^2 c^2: 2^{34} 3^{55} 5^{68}$$

$$abc: 2^{17} 3^{28} 5^{39}$$

$a_7$

$$b = 2^3 3^7$$

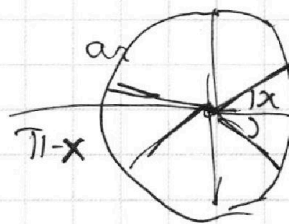
$$a = 2^5 3^7 5^{12}$$

$$c = 2^9 3^{14} 5^{27}$$

$$10 \cdot \arcsin(\cos x) = \pi - 2x.$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi - 2x$$



$$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 2\pi k - x\right) = \pi - 2x.$$

$$5\pi - 20\pi k - x = \pi - 2x.$$

$$4\pi + x = 20\pi k.$$

$$-84x = 20\pi k - 4\pi$$

$$-84x = 4(5\pi k - \pi)$$

$$x = \frac{\pi - 5\pi k}{2}$$

$$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k + x\right) = \pi - 2x.$$

$$5\pi + 20\pi k + 10x = \pi - 2x.$$

$$12x = -4\pi - 20\pi k.$$

$$3x = -\pi - 5\pi k.$$

$$x = \frac{5\pi k - \pi}{3}$$