



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} ab &: 2^{8} 3^{14} 5^{12} \\ bc &: 2^{12} 3^{20} 5^{14} \\ ac &: 2^{14} 3^{21} 5^{39} \end{aligned}$$

} *предположим и получим, что*

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{34} 3^{55} 5^{68} \Rightarrow abc : 2^{14} 3^{28} 5^{34}; \text{ поскольку.}$$

$a^2 b^2 c^2$ - квадрат abc , то если $abc \nmid 3^{28}$, то $a^2 b^2 c^2 \nmid 3^{55} \Rightarrow$

$$\Rightarrow abc \nmid 3^{28}, \quad ac \nmid 5^{39} \Rightarrow abc \nmid 5^{39} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc \nmid 2^{14} 3^{28} 5^{39}, \text{ а } \nmid abc : 2^{14}, \text{ поскольку}$$

$a^2 b^2 c^2 \nmid 2^{34}$. минимально возможные значения
чисел $a \cdot b \cdot c$ при условии, что $abc : 2^{14} 3^{28} 5^{39} \nmid$

- это $a \cdot b \cdot c = 2^{14} 3^{28} 5^{39}$.

Пример: $a = 2^{5} 3^{7} 5^{12}$

$$b = 2^3 3^7$$

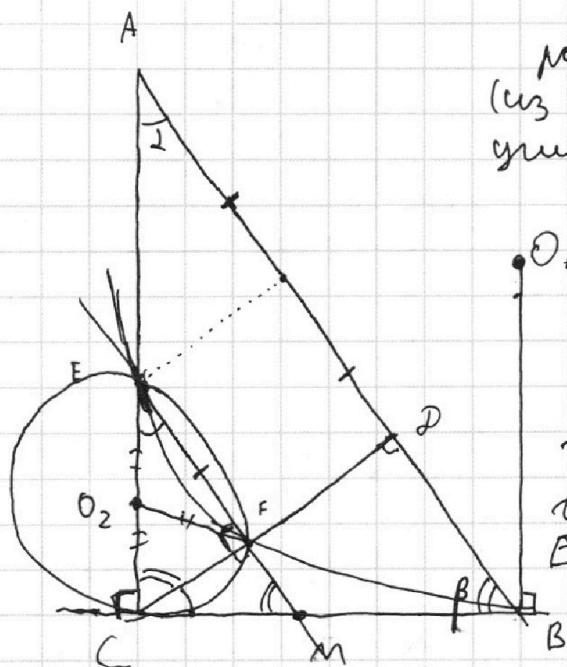
$$c = 2^9 3^{14} 5^{27}$$

$$a \cdot b \cdot c = 2^{17} 3^{28} 5^{39}$$

} *все условия вы-
полняются, а*

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Для начала отметим равные углы: $\angle ABD = \angle CEF = \angle DCB = \alpha$ (из параллельности и то же самое для углов в п/у А). Тогда $\angle ACD = \angle DBE = \angle CME$.

$$\angle DCM = \angle CEF = \alpha \Rightarrow$$

$\Rightarrow CB$ - касательный к описанной окружности $\triangle CEF$. Тогда $\triangle CEF$ - т/у $\Rightarrow O_2$ - центр симметрии. (п/у, поскольку $EF \parallel AB$; $CD \perp AB \Rightarrow CF \perp EM$)

Окружности с центрами

в точках O_1, O_2 пересекаются в точках E, F . (это окружности из условия и описанной вокруг $\triangle CEF$ симметрически) $\Rightarrow EF$ - рад. обеих этих окружностей, а лесенку CB - касательную к обеим окружностям, то $CM^2 = MB^2 \Rightarrow CM = BM$, где и - это пересечение EF и CB (одинаковых). $CM = MB$; $EM \parallel AB \Rightarrow EM$ - средний линия $\triangle CAB \Rightarrow \frac{CF}{FD} = 1 \Rightarrow S_{\triangle CEF} = \frac{1}{4} S_{\triangle CAB}$
 $S_{\triangle CAD} = \frac{5}{14} S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_{\triangle CEF} = \frac{5}{28} S_{\triangle ABC} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{28}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \cdot \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

\arcsin возвращает значение из $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = 2\pi k + \frac{\pi}{2} - x, \quad (1)$$

$$\text{если } \cos(x) \geq 0 \text{ и } \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = 2\pi k + \frac{\pi}{2} - x, \quad (2)$$

если $\cos(x) < 0$

$$(1) \quad 10 \cdot (\frac{\pi}{2} + 2\pi k - x) = \pi - 2x$$

$$(2) \quad 10 \cdot (\frac{\pi}{2} + 2\pi k + x) = \pi - 2x.$$

$$5\pi + 20\pi k - 8x = \pi$$

$$5\pi + 20\pi k + 10x = \pi - 2x.$$

$$-8x = -4\pi - 20\pi k$$

$$12x = -4\pi - 20\pi k$$

$$x = \frac{\pi + 5\pi k}{2}$$

$$x = -\frac{\pi + 5\pi k}{3}$$

$$x = \begin{cases} \frac{\pi + 5\pi k}{2} \\ -\frac{\pi + 5\pi m}{3} \end{cases}$$

где k, m - целые числа.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

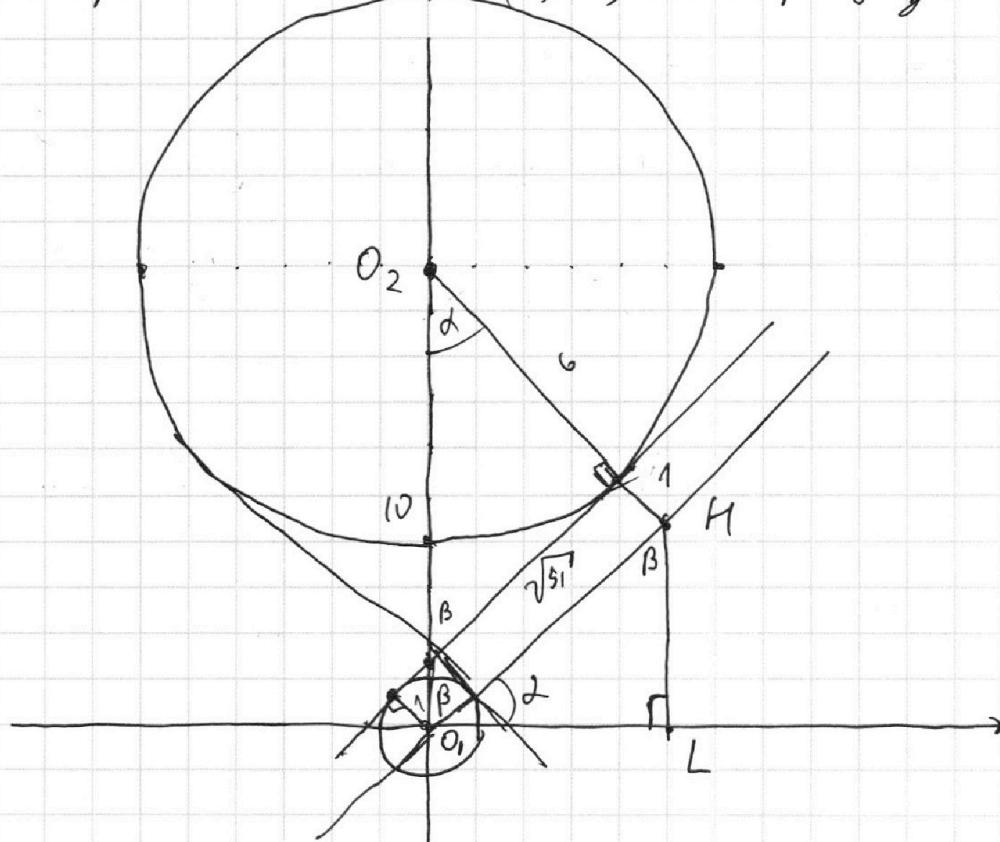
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases} \rightarrow y = \frac{ax + 4b}{3}$$
$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \textcircled{1}$$
$$x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0 \quad \textcircled{2}$$

① – это окружность в центре с центром
в точке $(0; 0)$ и радиусом 1.

② $x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0 \Rightarrow x^2 + (y - 10)^2 = 36$ – это окружность
с центром в точке $(0; 10)$ и радиусом 6.



Можно заметить, что при $|a| >$ определенного
значения всегда находится такая b , чтобы
система уравнений имела ровно 4 решения.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы найти угол наклона расстояния к эллиптической гиперболе проходящей через точку $(0, 0)$. $\Delta O_2O, M$ и $\Delta O, ML$ подобны \Rightarrow

$$\Rightarrow O, L = \frac{\sqrt{51}}{10} \cdot 7$$

$$ML = \frac{\sqrt{51}}{10} \cdot \sqrt{51} \Rightarrow \text{угол наклона} = \frac{\sqrt{51}}{7} =$$

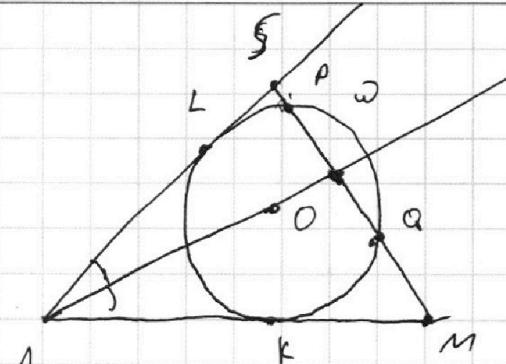
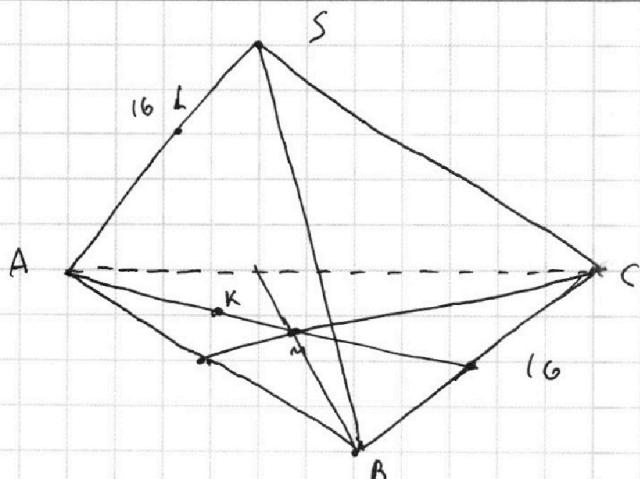
$$= \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \alpha \text{ предельный пределочный} = \cancel{3} \cancel{\frac{\sqrt{51}}{7}} =$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \alpha \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$$

(Поскольку картина симметрична относительно оси y).

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



рассмотрим высоты ASM : ω касается

AS и AM , так как $SP = MQ$, то

точки P и Q лежат симметрично относительно центра отрезка SM . можно заметить, что если ~~$AS = AM$~~ , то все

равенства вероятностные, ~~если~~ и если ~~если~~ мы можем двигать одну из точек ~~увеличивая расстояние от A~~, то сер.

т.к. к отрезку SM уже не будет присоединяться

мы можем принести $AQ \rightarrow$ пришить PQ с сохранением расстояния до O , то одна из расстояний SP, MQ будет уменьшаться, другое увеличиваться (A, S и M находятся дальше)

Л.к. от точки A состоятельство ил. \Rightarrow функции будут меняться при кругении в 1 ~~сторону~~ направлении рока выполняются эти условия!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

⇒ возможны только варианты, когда $AS = AM$

⇒ $AM = AS = 16$.

медианы делятся

в отношении 2:1 может

пересекаться ⇒ $MA_1 = 8$

$= CA_1 = A_1B \Rightarrow \triangle BCMA_1 \sim \triangle$

(медианы $\Rightarrow \frac{1}{2}$ стороны) $S_{\triangle ABS} = 100 = 16 \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h = \frac{50}{4} = \frac{25}{2} \text{ высота } \triangle BMA_1 \text{ к } BC \text{ в}$$

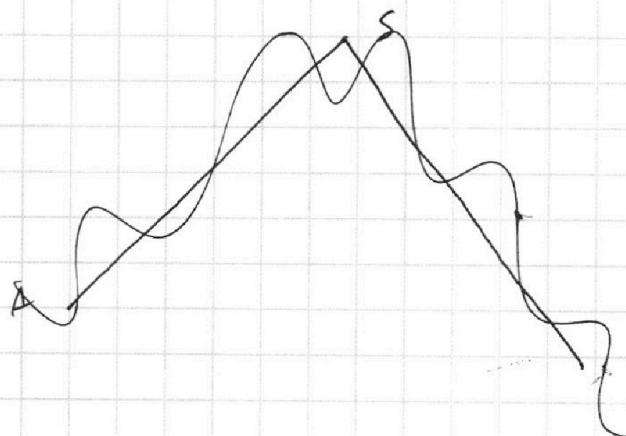
3 раза меньше h (\Rightarrow теорема Фалеса,
если провести через M прямую $\parallel BC$) \Rightarrow

$$\Rightarrow S_{\triangle BMN} = \frac{25}{6} \cdot 16 : 2 = \frac{CM \cdot MB}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CM \cdot MB = \frac{400}{6} = CC_1 \cdot BB_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CC_1 \cdot BB_1 = \frac{100 \cdot 3}{2} \Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{24 \cdot 100 \cdot 3}{2} =$$

$$= 3600,$$





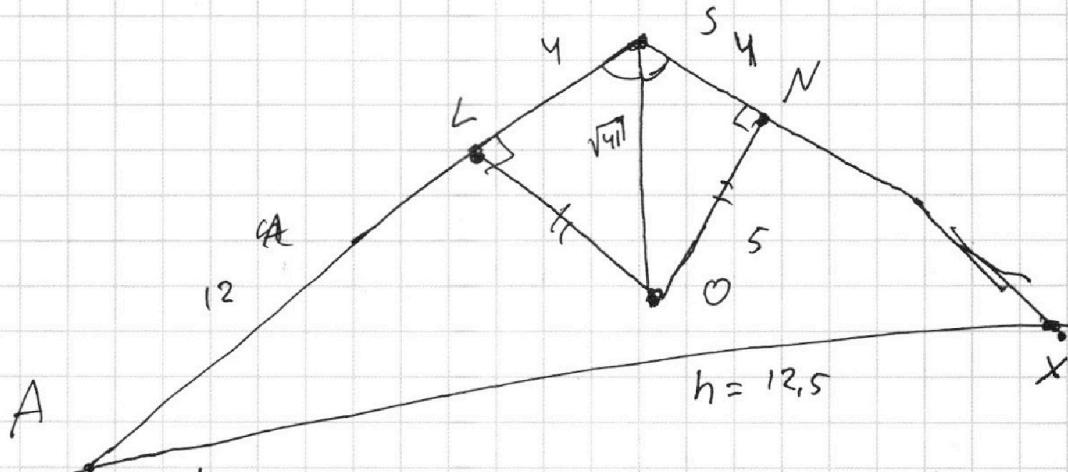
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Можно заметить, что в мас-
ковости ASN угол AXL - это двугранный
угол при ребре BC , где L - места не-
пересечения SN и BC . Таким образом мож-
но заметить, что эта масковость перпендикулярна
масковости $ABC \Rightarrow AX \perp BC \Rightarrow Ax = h = \frac{25}{2}$
(\perp обеим масковым $\Rightarrow \perp$ пересечению мас-
ковий).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y) + 64 = 0 \end{array} \right.$$

$$x^2 + y^2 - 1 \neq 0? \quad \emptyset$$

$$x^2 + y^2 = -64 + 20y$$

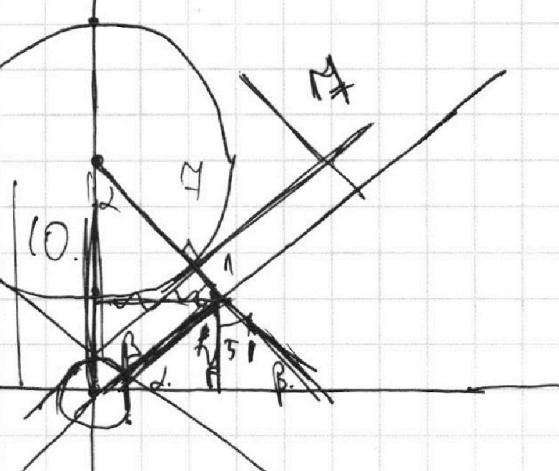
$$x^2 + (y-10)^2 - 100 = -64 \quad \frac{7}{10} =$$

$$x^2 + (y-10)^2 = 36$$

$$R=6.$$

$$ax - 3y + 4b = 0.$$

$$y = \frac{ax + 4b}{3}$$



$$R_x = \cancel{R}$$

$$y = R_x$$

$$(y-10)^2 + x^2 = 36.$$

$$(R_x - 10)^2 + x^2 = 36.$$

$$R_x^2 - 20R_x + 100 + x^2 = -64.$$

$$\begin{aligned} -20R_x &= \sqrt{R_x^2 + 8} \\ -20R_x &\geq 16 \Rightarrow \\ R_x &= 0,8? \end{aligned}$$

$$(k^2 + 1)x^2 - 20R_x x + 64 = 0.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

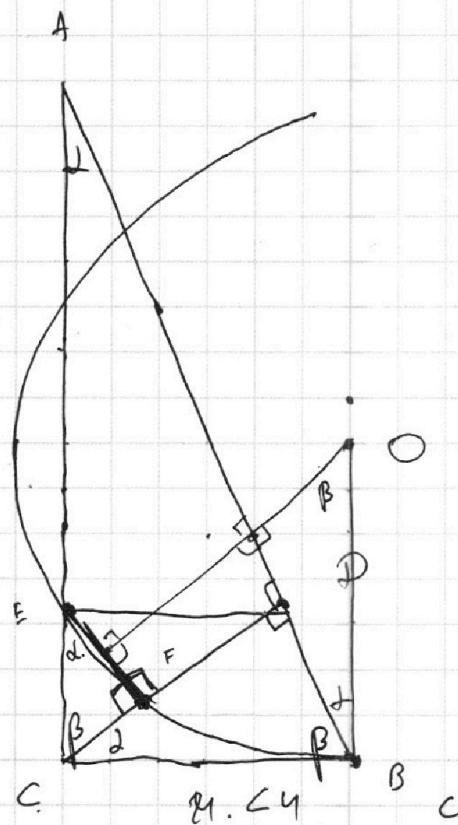
6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

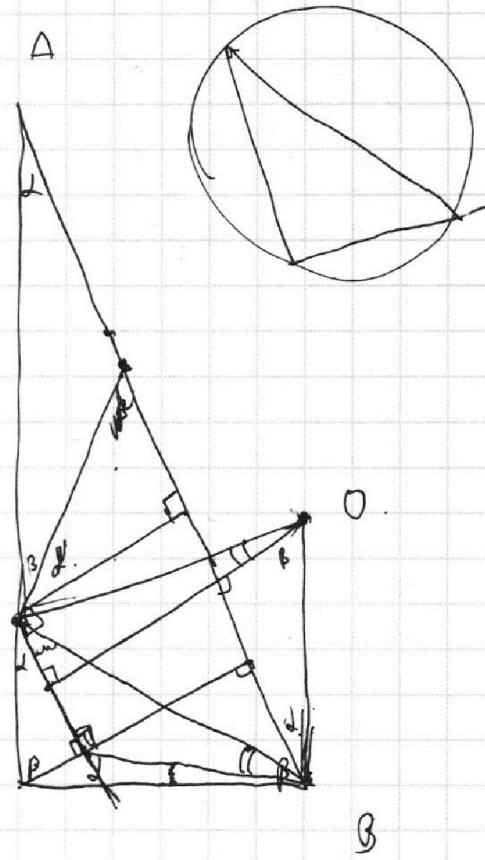
№2746.



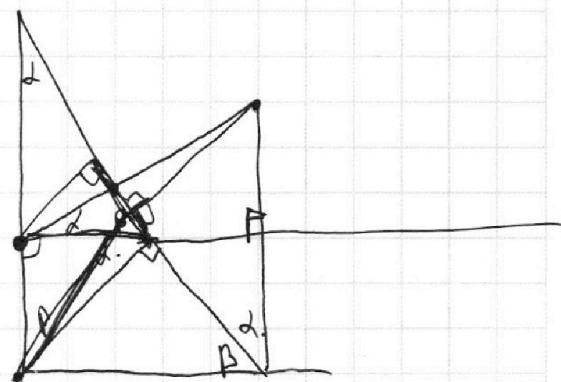
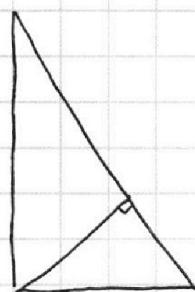
и. $\angle 4$.

$$\frac{AD}{CP} = \frac{CD}{CB} =$$

$$\frac{CD}{EF} = \frac{CF}{BD}$$



$$\frac{CF}{CP} = \frac{CE}{CA} = \frac{EF}{AD}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

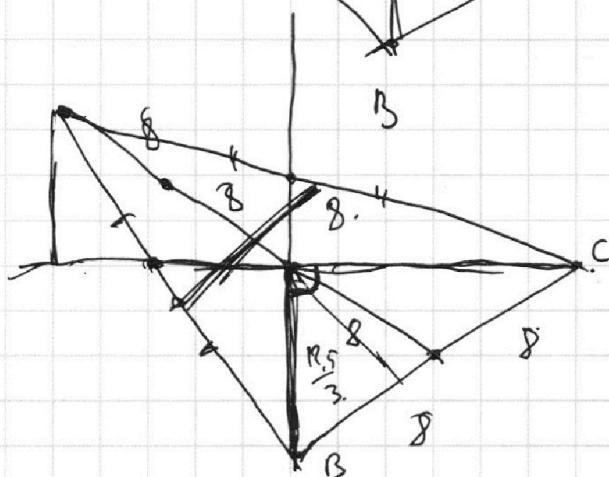
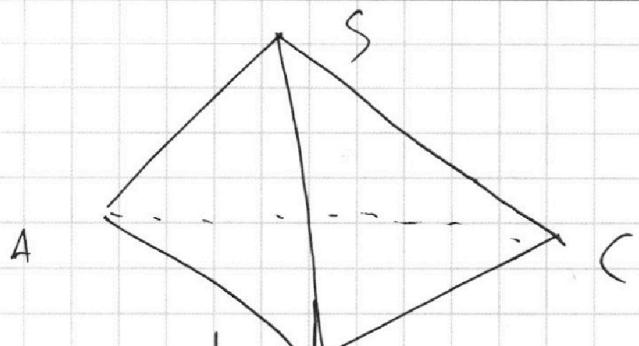
5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



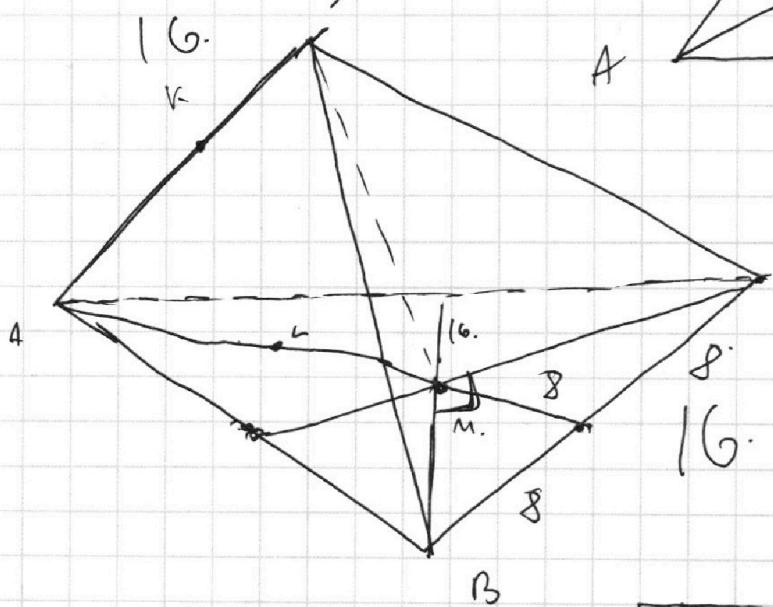
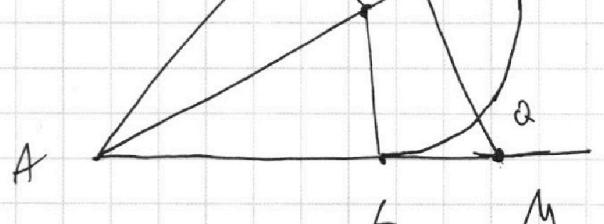
$$16 \cdot \frac{h}{2} = 100$$

320.

$$16 \cdot h = 200$$

$$16 \cdot h = \frac{200}{4}$$

$$h = 12,5$$



$$16 \cdot$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

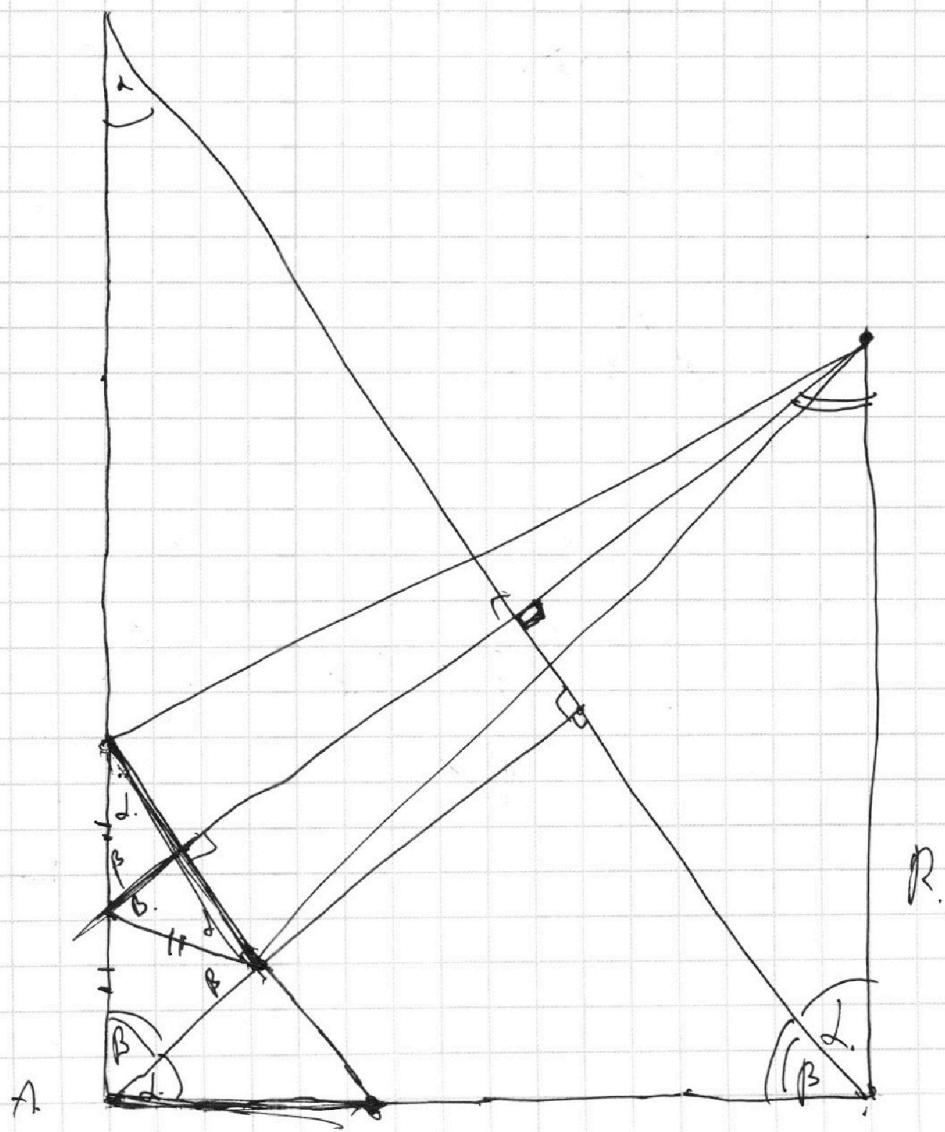
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^y(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$

$$\log_5^y(f) - 3 \log_5 5 = \log_{13} 625 - 3$$

$$\log_y^y(s(y)) + 4 \log_y 5 = \log_y^3 0,2 - 3$$

$$\log_y(xy) = \log$$



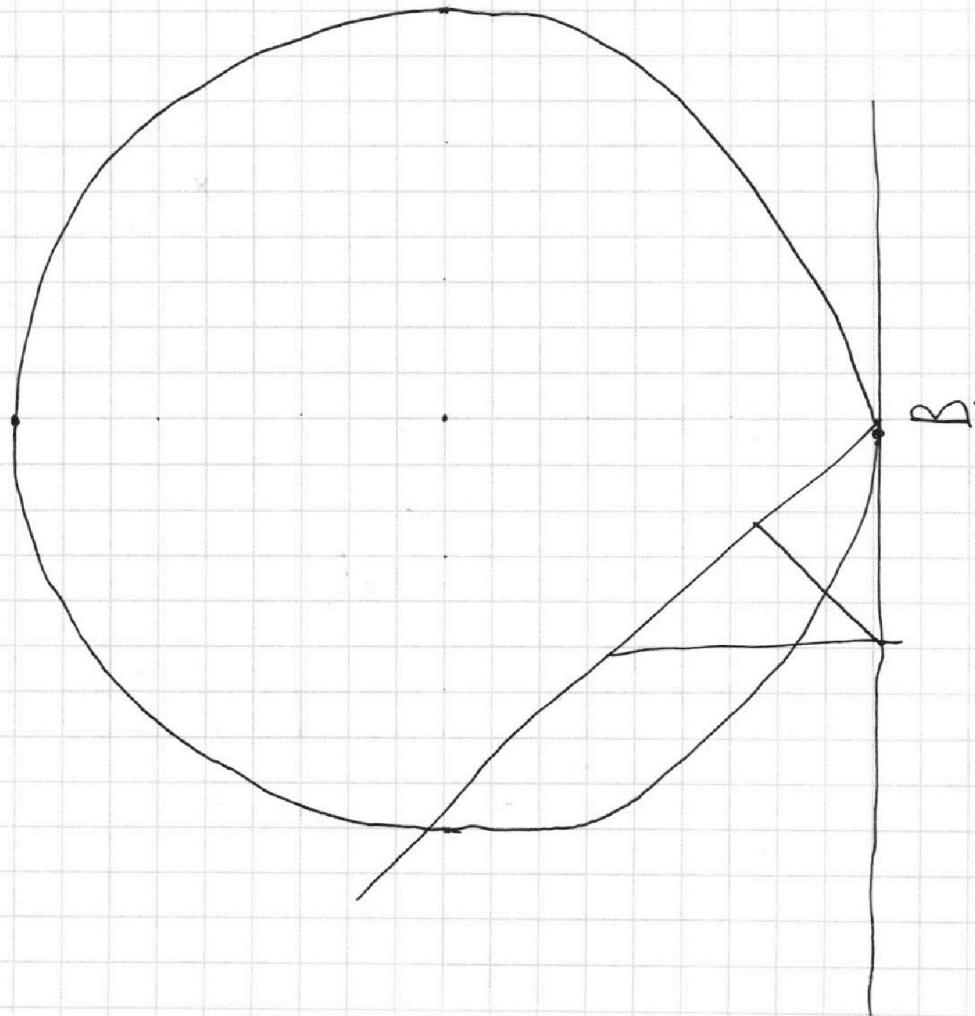
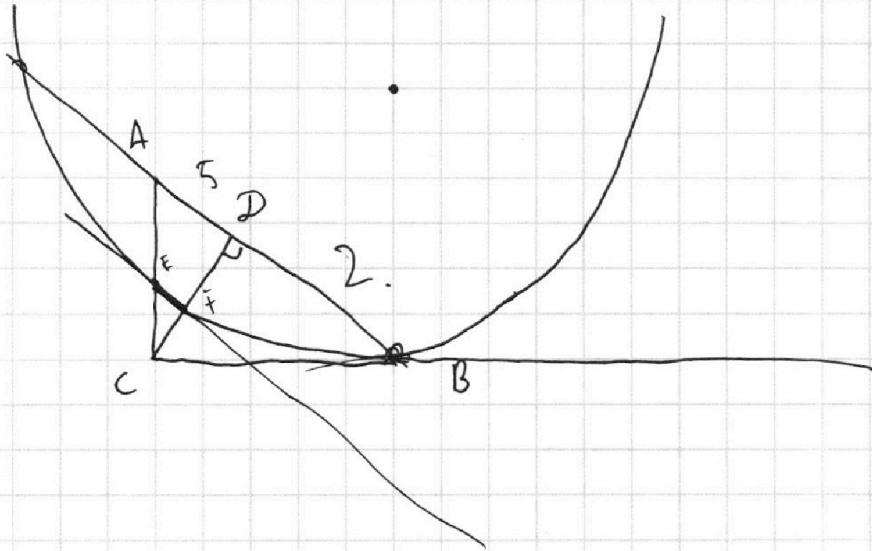
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^8 3^{14} 5^{12}$$

$$bc : 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$ac : 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{34} 3^{55} 5^{68}$$

$$abc : \underline{2^{14} 3^{28} 5^{39}}$$

$$a^2 b^2 c^2$$

$$b = 2^3 3^7$$

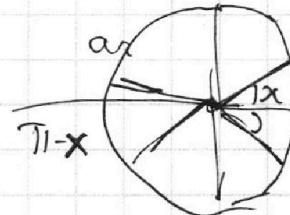
$$a = 2^5 3^7 5^{12}$$

$$c = 2^9 3^{14} 5^{24}$$

$$10 \cdot \arcsin(\cos x) = \pi - 2x.$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi - 2x$$



$$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 2\pi k - x\right) = \pi - 2x.$$

$$5\pi - 20\pi k - x = \pi - 2x.$$

$$4\pi + x = 20\pi k.$$

$$-8\pi x = 20\pi k - 4\pi$$

$$-8\pi x = 4(5\pi k - \pi)$$

$$x = \frac{\pi - 5\pi k}{2}$$

$$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k + x\right) = \pi - 2x,$$

$$5\pi + 20\pi k + 10x = \pi - 2x$$

$$12x = -4\pi - 20\pi k$$

$$3x = -4\pi - 5\pi k$$

$$x = \frac{5\pi k + 4\pi}{3}$$