



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1 : 4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-15; 90)$, $Q(2; 90)$ и $R(17; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
- [6 баллов] Дано треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и напомнили мне вспомогательную формулу 3^{17} , м. л.

а в данном случае неизвестное, ч. л. $\deg_3(a) \geq 9$

значит, $\deg_3(b) \deg_3(ac) \geq 3^{30}$, м. л.

$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$ (значе, можно ли у чисел $a, b, c \in \mathbb{N}$

приведен пример, когда равенство достигается, это
число называется abc:

$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$. Вычислили напомнили, если $\deg_3(ac) = 26$,

то либо все кратные, либо делители либо единица
находим, $\deg_3(a) = 13$ либо либо мы знаем, что $\deg_3 b = 0$,

значе число - некратное и $ac \geq 5^{28}$, либо

$\min \deg_3(ac) = 28 \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$.

Приведен пример, когда равенство достигается,

это и будет ответом на ваше задание:

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$$

$$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$ab: 2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^{11} - \text{верно } bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} - \text{верно}$$

$$ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} - \text{верно}$$

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^6 3^{10} 5^{11}$$

$$bc : 2^{14} 3^{21} 5^{13}$$

$$ac : 2^{16} 3^{25} 5^{18}$$

Одноминим за $\deg_2(x)$ - степень вхождения двойки в число

х. Т.н. $ab : 2^6$, то $\deg_2(a) + \deg_2(b) \geq 6$

(м.в. при умножении чисел степень удваивается)

аналогично $\deg_2(b) + \deg_2(c) \geq 14$ ($bc : 2^{14}$)

$\deg_2(a) + \deg_2(c) \geq 16$ ($ac : 16$)

Следует предположить, что:

$$2(\deg_2(a) + \deg_2(b) + \deg_2(c)) \geq 36$$

$$\deg_2(a) + \deg_2(b) + \deg_2(c) \geq 18$$

$$\text{П.ч. } abc : 2^{18} \stackrel{i.e. a,b,c > 0}{\Rightarrow} \min \deg_2(abc) = 18 \Rightarrow abc \geq 2^{18}$$

Аналогичные действия проводим с тройкой

и пятеркой, получим $\min \deg_3(abc) =$

$$= 29,5 ; \min \deg_3(abc) = 26$$

$$\text{Значит, } abc \geq 2^{18} \cdot 3^{29,5} \cdot 5^{26}$$

П.ч. у тройки нечетная степень, поэтому нам винчампиваем

на 1, то есть $\deg_3(a) + \deg_3(b) \geq 13$

$$\deg_3(b) + \deg_3(c) \geq 25$$

$$\deg_3(c) + \deg_3(a) \geq 25$$

Пусть $\deg_3(a) = x$, если мы в первом случае пересчитываем, получим, что $\deg_3(c) = x+8 \Rightarrow$ у тройки получим $\deg_3(a) = 8,5$, м.в. $\frac{1}{2} \neq 0$, то $a \in N$, а степень двойки

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

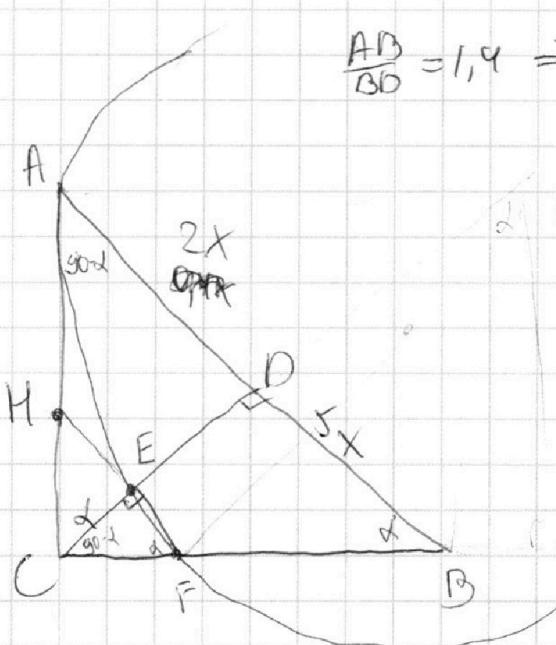
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AD}{DB} = 1,4 \Rightarrow BD = 5x; AD = \frac{7}{14}x \Rightarrow AD = 0,5x = 2x$$

EF \parallel AB \Rightarrow \text{m.r. } \angle CED = 90^\circ \\ (\text{CD - высота}), \text{ но}

$\angle CEF = 90^\circ \Rightarrow \triangle CEF - \text{прямоугр.}$

CD - высота чз прямое
угола $\Rightarrow CD = \sqrt{2x \cdot 5x} =$
 $= \sqrt{10}x$

$\triangle CDB - \text{прямоугольный} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{катет } CB \text{ чз теорему Пифагора: } CB = \sqrt{CB^2 + DB^2} =$
 $= \sqrt{35}x$

треугр. $\triangle CEF \sim \triangle CDB$ ($\angle C - \text{общий}$) $\Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB} =$

$= \frac{\sqrt{10}}{35} = \sqrt{\frac{2}{7}}$. Пусть EF до пересечения с AC .

$EF \cap AC = M$. $\triangle MCF \sim \triangle ABC$ (така прямые углы и
и $HF \parallel AB \Rightarrow \angle CFM = \angle B$

$\triangle ABC - \text{прямоугольный} \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{14}x$

Обозначим $MC = y \Rightarrow AM = \sqrt{14}x - y$

П.д. $\triangle ABC \sim \triangle MCF$ (и $CE \perp CD$ - катет, высота)

и противолежащие, т.к. $\frac{HE}{EF} = \frac{AB}{DB} = \frac{2}{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Задача } 2: \frac{HF}{HC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4x}{\sqrt{14}x} = \frac{4\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$HF = \frac{\sqrt{14}}{2} HC = \frac{\sqrt{14}}{2} y$$

$$HE = \frac{2}{7} HF; EF = \frac{5}{7} HF \Rightarrow HE = \frac{\sqrt{14}}{7} y =$$

Рассмотрим оценку точки H относительно

этой окружности, т.к. HA -расстояние, то HF -длина,
тогда $HA^2 = ME \cdot MF \Rightarrow (\sqrt{14}x - y)^2 = \frac{\sqrt{14}}{7}y \cdot \frac{\sqrt{14}}{2}y = y^2$

$$(\sqrt{14}x - y)^2 = y^2 \Rightarrow 14x^2 - 2\sqrt{14}xy + y^2 = y^2$$

$$\sqrt{14}x(\sqrt{14}x - 2y) = 0$$

$$x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{14}x = 2y \Rightarrow y = \frac{\sqrt{14}x}{2}$$

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{2}{7} S_{\Delta ABC} \quad (\text{CD - общая высота}; \text{а } \frac{AD}{AB} = \frac{2}{7})$$

из этого, что $y = \frac{\sqrt{14}x}{2}$ получаем $y = \frac{4C}{2} \cdot \text{мнжн. } HF \parallel AB,$

тогда HF - средняя линия $\triangle ABC \Rightarrow S_{\Delta HCF} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC}$

$$(k = \frac{1}{2}, \text{а } \frac{S_{\Delta HCF}}{S_{\Delta ABC}} = k^2 = \frac{1}{4})$$

$\frac{EF}{HF} = \frac{5}{7} \Rightarrow$ т.к. CE - общая высота $\triangle CEF$ и $\triangle HCF,$

$$\text{тогда } S_{\Delta CEF} = \frac{5}{7} S_{\Delta HCF} = \frac{5}{28} S_{\Delta ABC}$$

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta CEF}} = \frac{\frac{2}{7} S_{\Delta ABC}}{\frac{5}{28} S_{\Delta ABC}} = \frac{8}{5} = 1,6 \quad \text{Ответ: 1,6.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(2) \text{, I случай: } -54a - b \geq 0 \Rightarrow -54a \geq 5\sqrt{25+36a^2}$$

Проверка

$$\frac{-54a + 5\sqrt{25+36a^2}}{\sqrt{25+36a^2}} = 2$$

$$-54a = 3\sqrt{25+36a^2} \quad |^2$$

$$18a = \sqrt{25+36a^2} \quad a > 0 \rightarrow \text{без б. в.} \\ \text{свободном}$$

$$324a^2 = 25 + 36a^2$$

$$288a^2 = 25$$

$$a^2 = \frac{25}{288}$$

$$a = \frac{5}{\sqrt{288}} \Rightarrow \alpha \beta = -5 \sqrt{25 + \frac{36 \cdot 25}{288}} =$$

Очевидно, что при втором случае

$$-54a - b < 0$$

$$\frac{54a + b}{\sqrt{25+36a^2}} = 2$$

$$54a = 7\sqrt{25+36a^2}$$

$$= -5 \frac{\sqrt{5 \cdot 3}}{\sqrt{252}} =$$

$$= -\frac{75}{252}$$

Неравенство
выполнимо.

Третий второй случай останется.

Значит, правильный ответ будет:

$$y = -2\sqrt{2}x + 12$$

$$\frac{b}{6a} = \frac{-75 \cdot 12}{252 \cdot 6 \cdot 5} = -15$$

Очевидно что условие $a \neq 0$ не выполнено

T.T.e. $a \in (-\frac{5}{12}, 0)$

Возможны $a \in (-\frac{5}{12}, -15) \cup a=0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

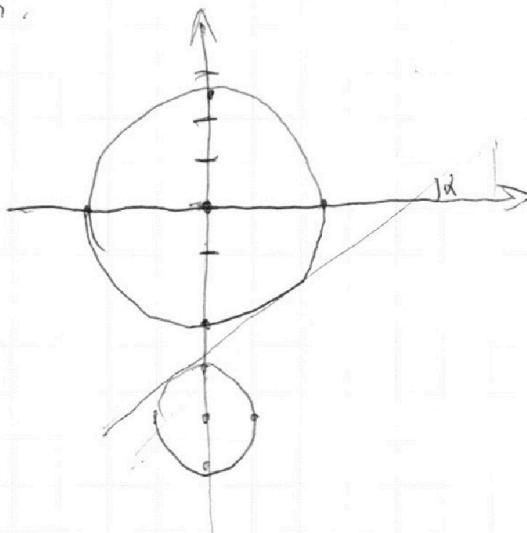
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Предположим, что видно осями симметрии
первую кас.



$$5x + 6ay - b = 0$$

$$y = \frac{b - 5x}{6a} - \frac{5}{6a} - \frac{b}{6a}$$

ан.е.

$$\frac{|-b|}{\sqrt{5^2+36a^2}} \geq 5$$

$$\frac{|-54a-b|}{\sqrt{5^2+36a^2}} \leq 2$$

$$\frac{b}{6a} = c$$

Рассмотрим случай касания обеих осями симметрий
(ан.кас.)

тогда получим, что касательного пересечения
прямую никак не получим. Убивши Уменьшив
угол \angle , у нас такое тоже не произойдет
пересечение обеих осями симметрий

Посмотрим на вид вектора, как.

$$\frac{|-b|}{\sqrt{5^2+36a^2}} = 5$$

$$\frac{|-54a-b|}{\sqrt{5^2+36a^2}} = 2$$

$$b < 0 \Rightarrow |b| = 5\sqrt{5^2+36a^2} = b. \text{ Заданный левый угол}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Прямая вида $y = kx + c$. Тогда имеем $k \neq 0$,

$$\text{т.е. } -\frac{5}{6a} > 0 \Rightarrow a < 0 \quad (a \neq 0)$$

Давайте, чтобы рассмотреть это,

$$\text{проверим } a=0, \text{ т.е. } 5x - b = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{b}{5}. \text{ Давайте, что } b=0 \text{ пересчитем,}$$

помня что прямая $x=0$ проходит через

единицу обеих осях симметрий.

Проверим т.е. четырьмя способами

что прямой $x=0$, то б. симметрии, если

$a > 0$ пересчитем, что $-b$ — о. пересчитем.

Если прямая пересечет с осями симметрии, то

расстояние от единицы до прямой должно

находить. Напишем уравнение для второй осясиметрии,

$$\text{Формула: } \frac{|ax_0 + b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} < r$$

$$\text{Для первой осясиметрии получаем: } \frac{|-b|}{\sqrt{5^2 + 36a^2}} < r \quad (1)$$

$$\text{Для второй осясиметрии: } \frac{|1 - 54a - b|}{\sqrt{5^2 + 36a^2}} < r$$

$$\text{Если } b > 0, \text{ то } (1) \Rightarrow \underline{5\sqrt{5^2 + 36a^2} > b} \quad b > 0 \Rightarrow \text{без } b \text{ не}$$

$$25 \cdot 25 + 25 \cdot 36a^2 - b^2 > 0$$

$$25 \cdot 36a^2 + b^2 - 25 \cdot b^2 > 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Вр (2) } \text{шаруц} - 54a - b < 0 \quad (b > 0; a > 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 54a - b = 54a + b$$

$$\frac{54a+b}{25+36a^2} < 2 \quad 1 + \sqrt{25+36a^2} > 0$$

$$54a + b < 2\sqrt{25+36a^2} \quad 54a + b > 0 \Rightarrow \text{бог. в. квадр.} \\ \text{отсюда,}$$

$$54^2a^2 + 108ab + b^2 < 100 + 72a^2$$

$$256a^2 - 2844a^2 - 108ab + 100 - b^2 > 0$$

Находим симметрию:

$$\begin{cases} 900a^2 + 625 - b^2 > 0 \\ -2844a^2 - 108ab + 100 - b^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Delta_1 = -4 \cdot 900 \cdot (625 - b^2) = -3600 \cdot 625 + 3600b^2$$

$\Delta_2 > 0$, иначе т.к. $-2844 < 0$ не будет корней

$$\text{а, т.е., } \Delta_2 = 108b^2 + 4 \cdot 2844 \cdot (100 - b^2) = -47268b^2 + 288$$

$+ 1137600 > 0$ при любом $b > 0$ верно

$$1137600 > 47268b^2 \quad a = \frac{108b \pm \sqrt{288b^2 + 1137600}}{-5688}$$

$$b^2 < 101 \Rightarrow b < 10 \quad a \in \left(\frac{108b + \sqrt{288b^2 + 1137600}}{-5688}, \frac{108b - \sqrt{288b^2 + 1137600}}{-5688} \right)$$

Заметим, что изображив b на Φ , получим

что $\Phi_1 < 0 \Rightarrow$ при всех корнях

a это второе, это первое иное обрач изображим



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

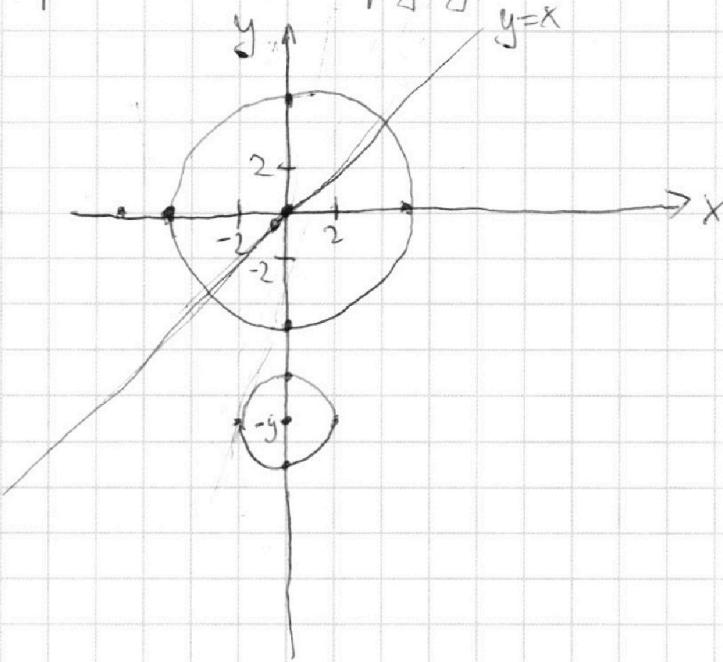
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим (2): $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$

Графиком первого является окружность с центром
(0;0) и радиусом 5. Графиком второго является окружность
с центром (-9;0) и радиусом 2.



Посмотрим на (1): $5x + 6ay - b = 0 \Rightarrow y = \frac{b - 5x}{6a} = \frac{-5x}{6a} + \frac{b}{6a}$ (a ≠ 0)

т.е. графиком первого является прямая.

Прямая имеет с окружностью не более 2 точек пересечения,

значит, для того, чтобы система имела 4 решения,
нужно, чтобы прямая пересекала обе окружности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0. \text{ Если } t < 0, \text{ то } t^5 < 0, 5t < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^5 + 5t - \frac{16}{3} < 0. \text{ Противоречие.}$$

$t \neq 0 \Rightarrow t > 0$, значит, t^5 -множитель буд. положит.

Мы $t > 0$; $5t$ -множитель буд. отрицателен. \Rightarrow

$\Rightarrow t^5 + 5t$ -множитель буд. отрицательное.

Значит, у нас образовалось другое значение, когда

$$t^5 + 5t = \frac{16}{3}. \text{ Обозначим искомое } t \text{ за } b.$$

Использовано замечание, что $a^5 + \frac{16}{3} + 5a = 0$

Если $a > 0$, то $a^5 + 5a > 0 \Rightarrow$ ищем брачев
не целое, (знач. 0 при приближ. $\frac{16}{3}$).

$a < 0$ ($a \neq 0$) \Rightarrow ~~а~~ и $a < 0$ ион. буд.

Значит, что мы получили $-b$. Поэтому, $-b^5 - 5b +$
 $+\frac{16}{3} = b^5 + 5b - \frac{16}{3} = 0$ (из первого).

Больше замечаний нет. Т.к. $a^5 + 5a$ -мон. буд.

Значит, $\log_{11} x = b \Rightarrow x = 11^b$

$$\log_{11} 0,5y = -b \Rightarrow 0,5y = \frac{1}{11^b}$$

$$0,5xy = 11^b \cdot \frac{1}{11^b} = 1 \Rightarrow xy = 2$$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5 \quad \begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}$$

$$\log_{11} x = \frac{1}{\log_{x^3} 11} \Rightarrow \cancel{\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x} = \cancel{\frac{2}{3} \log_{11} 11} - 5$$

$$\log_{11} x = t \quad \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = \frac{2}{3} - 5$$

+ ≠ 0 означает что $t \neq 0$ т.к. $x \neq 1$

$$t^4 - 6t = \frac{2}{3} t - 5 \quad t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3} t - 5$$

$$t^4 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$

$$- \frac{16}{3} t + 5t^4 - 1 = 0$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5 \quad \begin{matrix} y > 0 \\ y \neq 2 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{\log_{0,5y}} \log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{0,5y} 11} = -\frac{13}{3} \log_{0,5y} 11 - 5$$

$$\log_{11} 0,5y = 0 \quad 0 \neq 0 \text{ означает что } y \neq 0 \quad \text{т.к. } y \neq 2$$

$$a^4 + \frac{1}{a} = -\frac{13}{3a} - 5$$

$$a^5 + \frac{16}{3} + 5a = 0$$

Показаем, что $a^5 + t^5 + 5(a+t) = 0$

1) $a > 0; t > 0$, то тогда $a^5 + t^5 > 0; 5(a+t) > 0$
не можем быть

2) $a < 0; t < 0$, то тогда $a^5 + t^5 < 0; 5(a+t) < 0$
не можем быть



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

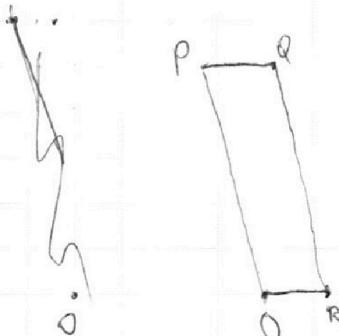
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

III. $6x_2^2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ и $48 \div 6$ и $6x_2 - 6x_1 \div 6$,

то $y_2 - y_1 \div 6$.



PO - прямая, имеющая вид:

$y = kx$, нормалью к линии
P, получим

$$90 = -15k \Rightarrow k = -6$$

$$y = -6x$$

Это QR - прямая, имеющая
вид $y = -6x + 102$

Значит, точки внутри или на границе
полученного района - точки, имеющие вид:

$$y \geq 0 \text{ и } y \leq 90 \text{ и } y \geq -6x \text{ и } y \leq -6x + 102$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



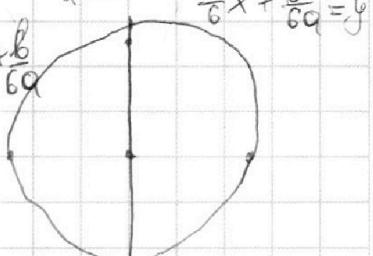
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

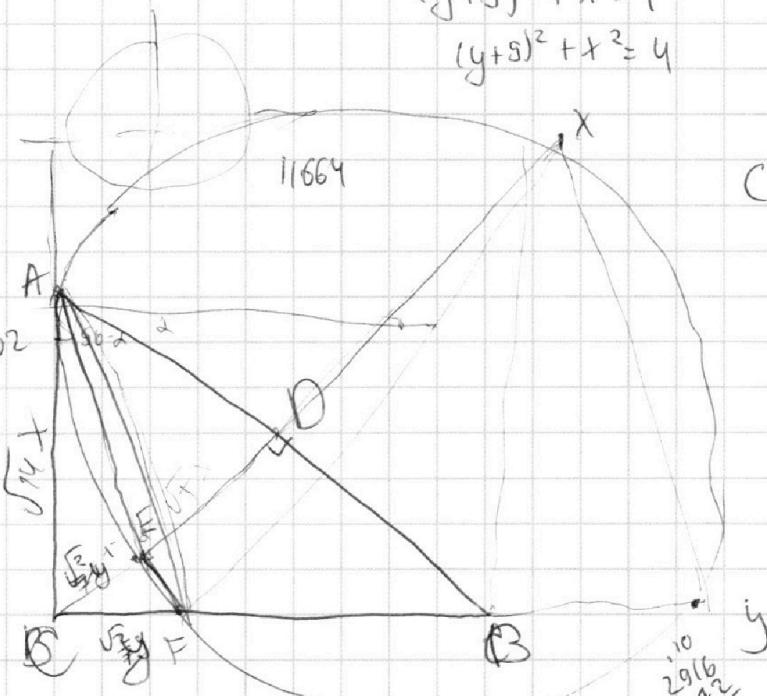
$$x = \sqrt{1 - 0.05} \quad y = \frac{\sqrt{5x - b}}{6a} \quad \frac{b - 5x}{6a} = -\frac{5x + b}{6a} \quad a = 1 \quad -\frac{5}{6}x + \frac{b}{6a} = y$$

$$\begin{cases} 5x \cdot (x^2 + y^2 - 25) \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \quad (y + g)^2 + x^2 = 4 \quad (y + 5)^2 + x^2 = 4$$



$$\begin{aligned} x &= 108 \\ &\overline{108} \\ &860 \\ &\overline{108} \\ &11664 \\ &\overline{108} \\ &QR = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 17x + b \\ g_0 &= 2x + b \\ 102 &= 2x + b \\ x &= -b \\ y &= \end{aligned}$$



$$CE \cdot CA = CF \cdot CY = AC^2 = 14x^2$$

$$x = \frac{14x^2}{y}$$

$$CY = \frac{14x^2}{\sqrt{\frac{2}{7}}y}$$

$$\frac{196x^4}{\frac{2}{7}y^2} - \frac{196x^4}{\frac{2}{7}y^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{196 - 25x^4}{y^2} &= \\ &= 14 \cdot 0.5 \sqrt{10} x^2 = \\ &= 70 \sqrt{10} x^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (y + g)^2 \end{cases}$$

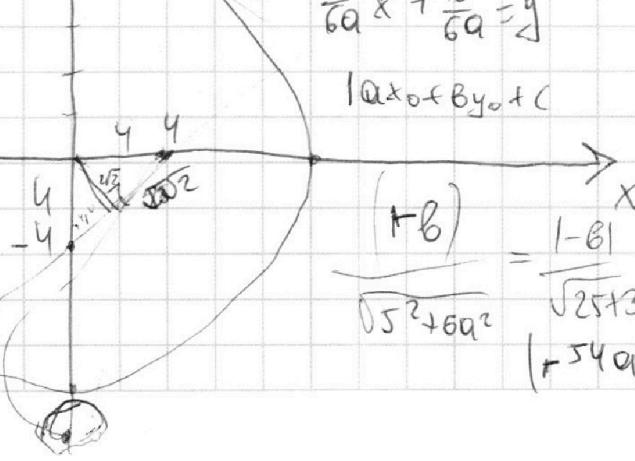
$$\begin{aligned} y &= x - 4 \\ x - 4 - y &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$10x_0 + By_0 + C$$

$$\frac{5x - b}{6a} = y$$

$$\frac{5}{6a}x - \frac{b}{6a} = y$$



$$\frac{(r - b)}{\sqrt{r^2 + 6a^2}} = \frac{|-b|}{\sqrt{25 + 36a^2}}$$

$$(r - 5\sqrt{a}) = \frac{14a}{\sqrt{25 + 36a^2}}$$

L

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{16}$$

$$\deg_2(a) + \deg_2(b) \geq 6$$

$$1 \frac{2}{3} \cdot \frac{32}{243} + \frac{810}{243} =$$

$$bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$\deg_2(b) + \deg_2(c) \geq 14$$

$$= \frac{942}{243}$$

$$ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$\deg_2(a) + \deg_2(c) \geq 16$$

X

$$\deg_2(a+b+c) \geq 18$$

$$\deg_3(a) + \deg_3(b) \geq 11$$

$$\deg_3(a+b+c) \geq 19,5$$

$$\deg_3(b) + \deg_3(c) \geq 13$$

$$\deg_3(a+b+c) \geq 26$$

$$\deg_3(c) + \deg_3(a) \geq 28$$

$$2x+2 \leq 28$$

$$x=13 \quad b=-2$$

$$\min 2^{18} \cdot 3^{29,5} \cdot 5^{26}$$

$$\frac{AC}{CF} = \frac{AD}{EC}$$

$$\begin{array}{r} 311 \\ \times 4 \\ \hline 1244 \\ 1230 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11376911268 \\ - 11268 \end{array} \overline{)10800}$$

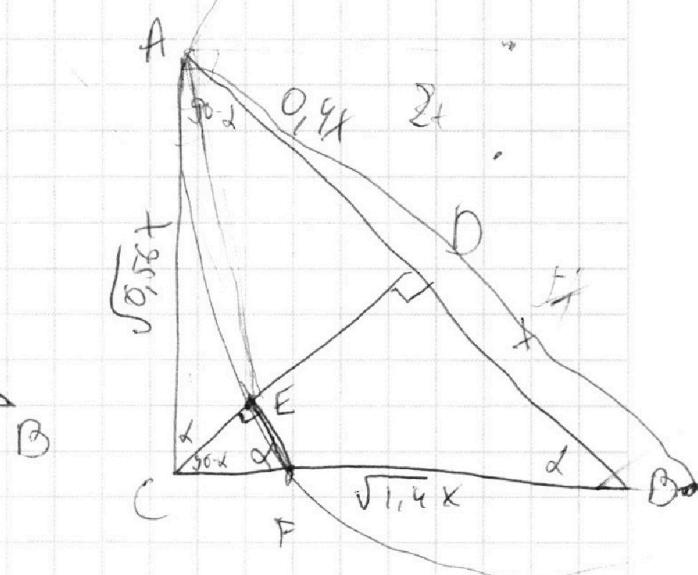
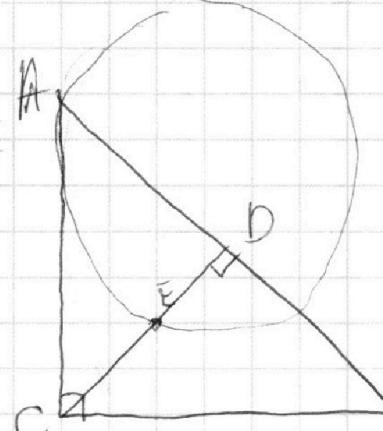
$$\begin{aligned} \deg_3(a) + \deg_3(b) &\geq 13 \\ \deg_3(b) + \deg_3(c) &\geq 23 \\ \deg_3(a) + \deg_3(c) &\geq 25 \end{aligned}$$

$$2x+8=25$$

$$x=8,5$$

$$\frac{AC}{CF} = \frac{AD}{EP}$$

$$\frac{BC}{CB} = \frac{CF}{CE}$$



$$\frac{\sqrt{1,4}x}{\sqrt{0,4}x} =$$

$$= \sqrt{3,5}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$$

$$BC^2 = AB \cdot BD$$

$$1,4x^2$$

$$BE = \sqrt{1,4}x$$

$$0,4x^2 = CB^2$$

$$CB = x \cdot \sqrt{0,4}$$

$$S \triangle ACB = 0,4x^2 \sqrt{0,4}$$

$$\frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CB}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

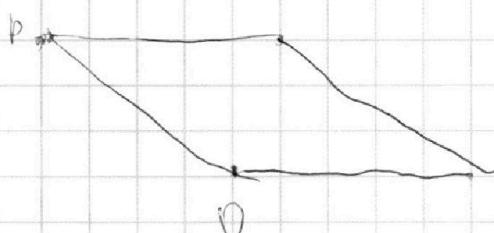
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10\sqrt{1-x^2} = 9\sqrt{1-2x}$$

$$t^5 + t^5 + 5(a+t) = 0$$

если $a > 0$ $t < 0$



$$\left. \begin{array}{l} t^5 + st - \frac{16}{3} = 0 \\ t > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} t < 0 \text{ или } t > 0 \\ t^5 - 80y^5 - st - 80y^5 \end{array}$$

$$t^4 + t^4 + s = \frac{16}{3}$$

$\frac{1}{3}$

$$\frac{2}{\sqrt{14}}xy \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}xy = y^2$$

$$(\sqrt{14}x - y)^2 = y^2$$

$$14x^2 - 2\sqrt{14}xy + y^2 - y^2 = 0$$

$$\sqrt{14}x - (\sqrt{14}x - 2y) = 0$$

$$\sqrt{14}x = 2y$$

$$y = \frac{\sqrt{14}}{2}x$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{14}x}{7x} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

$$AC = \frac{\sqrt{14}}{7}AB$$

$$AF = \frac{7}{\sqrt{14}} -$$

$$\frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

