



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^6 3^{10} 5^{11} \quad bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13} \quad ac: 2^{16} 3^{25} 5^{18}$$

Обозначим за $\deg_2(x)$ - ^{степень} высшей степени двойки в числе x . П.н. $ab: 2^6$, то $\deg_2(a) + \deg_2(b) \geq 6$

(т.н. при умножении мы степени складываем)

$$\text{аналогично } \deg_2(b) + \deg_2(c) \geq 14 \quad (bc: 2^{14})$$

$$\deg_2(a) + \deg_2(c) \geq 16 \quad (ac: 2^{16})$$

Сложив три неравенства получаем:

$$2(\deg_2(a) + \deg_2(b) + \deg_2(c)) \geq 36$$

$$\deg_2(a) + \deg_2(b) + \deg_2(c) \geq 18$$

$$\text{П.е. } abc: 2^{18} \xrightarrow{\text{т.к. } a, b, c > 0} \Rightarrow \min \deg_2(abc) = 18 \Rightarrow abc \geq 2^{18}$$

Аналогичные рассуждения проводим с тройкой

и пятеркой, откуда получаем $\min \deg_3(abc) =$

$$= 29,5; \quad \min \deg_5(abc) = 26$$

$$\text{Значит, } abc \geq 2^{18} \cdot 3^{29,5} \cdot 5^{26}$$

П.н. у тройки нечетная степень, посмотрим внимательно

$$\text{на то, что высходит. } \deg_3(a) + \deg_3(b) \geq 13$$

$$\deg_3(b) + \deg_3(c) \geq 21$$

$$\deg_3(c) + \deg_3(a) \geq 25$$

Пусть $\deg_3(a) = x$, если мы в неравенствах переопределим
равенство, то $\deg_3(c) = x + 8 \Rightarrow$ у тройки получаем
 $\deg_3(a) = 8,5$, т.е. $\frac{17}{2} \Rightarrow$, но $a \in \mathbb{N}$, а степени двойки

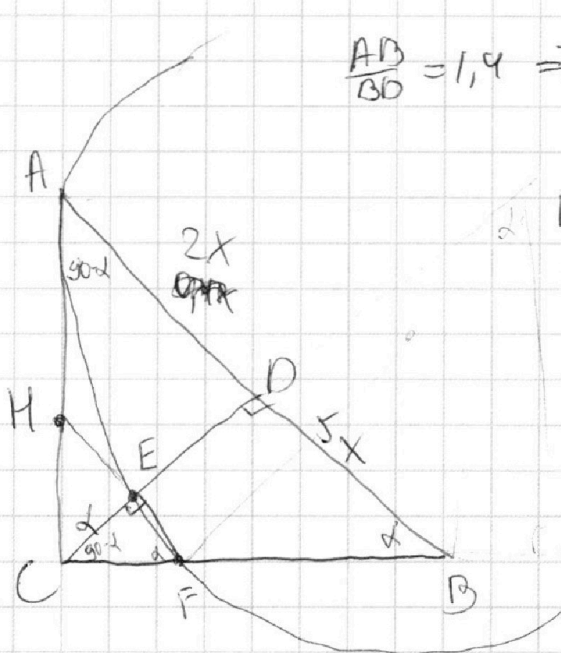
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AD}{BD} = 1,4 \Rightarrow BD = 5x; AD = 1,4x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AD = 2x$$

$EF \parallel AB \Rightarrow \text{т.е. } \angle CED = 90^\circ$
(CD - высота), но

$\angle CEF = 90^\circ \Rightarrow \Delta CEF$ - прямоугольн.

CD - высота из прямого угла $\Rightarrow CD = \sqrt{2x \cdot 5x} = \sqrt{10}x$

ΔCDB - прямоугольный \Rightarrow

$$\Rightarrow \text{по теореме Пифагора: } CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{10}x$$

прямоуг. $\Delta CEF \sim \Delta CDB$ ($\angle C$ - общий) $\Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB} =$

$$= \frac{\sqrt{10}}{35} = \frac{\sqrt{2}}{7}. \text{ Проведем } EF \text{ до пересечения с } AC.$$

$EF \cap AC = H. \Delta HCF \sim \Delta ABC$ (оба прямоугольные и $HF \parallel AB \Rightarrow \angle CFH = \angle B$)

ΔABC - прямоугольный $\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 54x$

Обозначим $HC = y \Rightarrow AH = 54x - y$

т.к. $\Delta ABC \sim \Delta HCF$ то CE и CD - совм. высоты

у этих треугольников, то $\frac{HE}{EF} = \frac{AD}{DB} = \frac{2}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Н.р. $\frac{HF}{HC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4x}{\sqrt{14}x} = \frac{4\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{2}$

$$HF = \frac{\sqrt{14}}{2} HC = \frac{\sqrt{14}}{2} y$$

$$HE = \frac{2}{7} HF; EF = \frac{5}{7} HF \Rightarrow HE = \frac{\sqrt{14}}{7} y \neq$$

Рассмотрим площадь точки H относительно
линии перпендикуляра, т.к. HA - перпендикуляр, $\frac{a}{\sqrt{14}}$ HF - высота,
то $HA^2 = HE \cdot HF \Rightarrow (\sqrt{14}x - y)^2 = \frac{\sqrt{14}}{7} y \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} y = y^2$

$$(\sqrt{14}x - y)^2 = y^2 \Rightarrow 14x^2 - 2\sqrt{14}xy + y^2 = y^2$$

$$\sqrt{14}x(\sqrt{14}x - 2y) = 0$$

$$x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{14}x = 2y \Rightarrow y = \frac{\sqrt{14}x}{2}$$

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{2}{7} S_{\Delta ABC} \quad (CD - \text{общая высота } h; \text{ а } \frac{AD}{AB} = \frac{2}{7})$$

и то, что $y = \frac{\sqrt{14}x}{2}$ получаем $y = \frac{AC}{2}$. т.к. HF || AB,

то HF - средняя линия $\Delta ABC \Rightarrow S_{\Delta HCF} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC}$

$$(k = \frac{1}{2}) \text{ а } \frac{S_{\Delta HCF}}{S_{\Delta ABC}} = k^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{EF}{HF} = \frac{5}{7} \Rightarrow \text{т.к. CE - общая высота } \Delta CEF \text{ и } \Delta HCF,$$

$$\text{то } S_{\Delta CEF} = \frac{5}{7} S_{\Delta HCF} = \frac{5}{28} S_{\Delta ABC}$$

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta CEF}} = \frac{\frac{2}{7} S_{\Delta ABC}}{\frac{5}{28} S_{\Delta ABC}} = \frac{8}{5} = 1,6 \quad \text{Ответ: } 1,6.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(2) ; I случай : $-54a - b \geq 0 \Rightarrow -54a \geq -5\sqrt{25+36a^2}$

Тогда

$$\frac{-54a + 5\sqrt{25+36a^2}}{\sqrt{25+36a^2}} = 2$$

$$-54a = -2\sqrt{25+36a^2} \quad | \cdot 2$$

$$18a = \sqrt{25+36a^2} \quad a > 0 \rightarrow \text{возм. в обе стороны}$$

$$324a^2 = 25 + 36a^2$$

$$288a^2 = 25$$

$$a^2 = \frac{25}{288}$$

$$a = \frac{5}{12\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \kappa b = -5 \sqrt{25 + \frac{3 \cdot 25}{288}} =$$

$$= -5 \frac{\sqrt{5 \cdot 3}}{2\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{75}{2\sqrt{2}}$$

Неравенство выполняется.

Ответом, что при втором случае

$$-54a - b < 0$$

$$\frac{54a + b}{\sqrt{25+36a^2}} = 2$$

$$54a = 2\sqrt{25+36a^2}$$

При втором случае a не существует.

Значит, прямая имеет вид:

$$y = -2\sqrt{2}x + 12$$

$$\frac{b}{6a} = \frac{-75 \cdot 12\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot 6 \cdot 5} = -15$$

Ответом при условии, a не получится

т.е. $a \in \left(\frac{5}{12\sqrt{2}}; +\infty \right)$

Внимательно $a \in \left(-\frac{5}{12\sqrt{2}}; -\infty; -\frac{5}{12\sqrt{2}} \right) \cup a=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

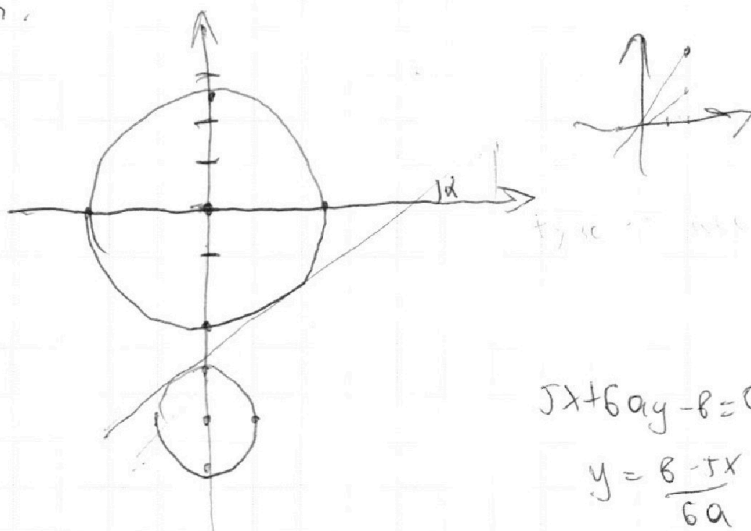
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Предположим, что вектор нормали определяет,
линию кас.



$$5x + 6ay - b = 0$$

$$y = \frac{b - 5x}{6a} = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

$$\frac{b}{6a} = c$$

Или, $\frac{1-b}{\sqrt{5^2+36a^2}} \geq 5$

$$\frac{1-(54a-b)}{\sqrt{5^2+36a^2}} \leq 2$$

Рассмотрим случаи касания обеих окружностей
(ан.кас)
Понятно естественно, что параллельно переводя
прямую мимо не получим. Увеличив уменьшив
max угол x, y как можно больше не пропустим
пересечения обеих окружностей
Посмотрим на вид выпукл. кас.

$$\frac{1-b}{\sqrt{5^2+36a^2}} = 5$$

$$\frac{1-(54a-b)}{\sqrt{5^2+36a^2}} = 2$$

$$b < 0 \Rightarrow (1) = 5\sqrt{5^2+36a^2} = b$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Прямая вида $y = kx + c$. Рассмотрим $k > 0$,

$$\text{т.е. } -\frac{5}{6a} > 0 \Rightarrow a < 0 \quad (a \neq 0)$$

Для того, чтобы рассмотреть это,

нужно проверить $a = 0$, т.е. $5x - 6 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{6}{5}. \text{ Очевидно, что } b = 0 \text{ пересекает,}$$

потому что прямая $x = 0$ пересекает через
диагонали обеих окружностей.

Также т.е. центры окружностей лежат
на прямой $x = 0$, то b симметрично, если
 $a > 0$ пересекает, то a пересекает.

Если пересекает пересечение с окружностью, то
расстояние от центра до прямой меньше
радиуса. Напишем уравнение для правой окружности.

$$\text{Формула: } \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} < r$$

$$\text{Для первой окружности получаем: } \frac{|1 - b|}{\sqrt{5^2 + 36a^2}} < 5 \quad (1)$$

$$\text{Для второй окружности: } \frac{|1 - 54a - b|}{\sqrt{5^2 + 36a^2}} < 2$$

если $b > 0$, то (1) $\Rightarrow \sqrt{5^2 + 36a^2} > b \quad b > 0 \Rightarrow$ во все в кв.

$$25 + 25 + 25 \cdot 36a^2 - b^2 > 0$$
$$25 \cdot 36a^2 + 75 - b^2 > 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{Вз } (2) \text{ пусть } -54a - b < 0 \quad (b > 0; a > 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow | -54a - b | = 54a + b$$

$$\frac{54a+b}{25a+\sqrt{25+36a^2}} < 2 \quad | \cdot \sqrt{25+36a^2} > 0$$

$$54a+b < 2\sqrt{25+36a^2} \quad 54a+b > 0 \Rightarrow \text{возв. в квадр.}$$

$$54^2 a^2 + 108ab + b^2 < 100 + 72a^2$$

$$2916a^2 - 2844a^2 - 108ab + 100 - b^2 > 0$$

Сложим сложим:

$$\begin{cases} 900a^2 + 625 - b^2 > 0 \\ -2844a^2 - 108ab + 100 - b^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Phi_1 = -4 \cdot 900 \cdot (625 - b^2) = -3600 \cdot 625 + 3600b^2$$

$\Phi_2 > 0$, иначе т.е. $-2844 < 0$ не будем рассуждать

$$a, \text{ т.е. } \Phi_2 = 108b^2 + 4 \cdot 2844 \cdot (100 - b^2) = 4268b^2 + 1137600 > 0$$

при любом $b > 0$ верно

$$1137600 > 4268b^2 \quad a = \frac{108b \pm \sqrt{288b^2 + 1137600}}{-5688}$$

$$b^2 < 101 \Rightarrow b < 10 \quad a \in \left(\frac{108b + \sqrt{288b^2 + 1137600}}{-5688}; \frac{108b - \sqrt{288b^2 + 1137600}}{-5688} \right)$$

Заметим, что подставив во Φ_1 значение

b , получим, что $\Phi_1 < 0 \Rightarrow$ не все рассуждения

a для второго, для первого тоже будем получать

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

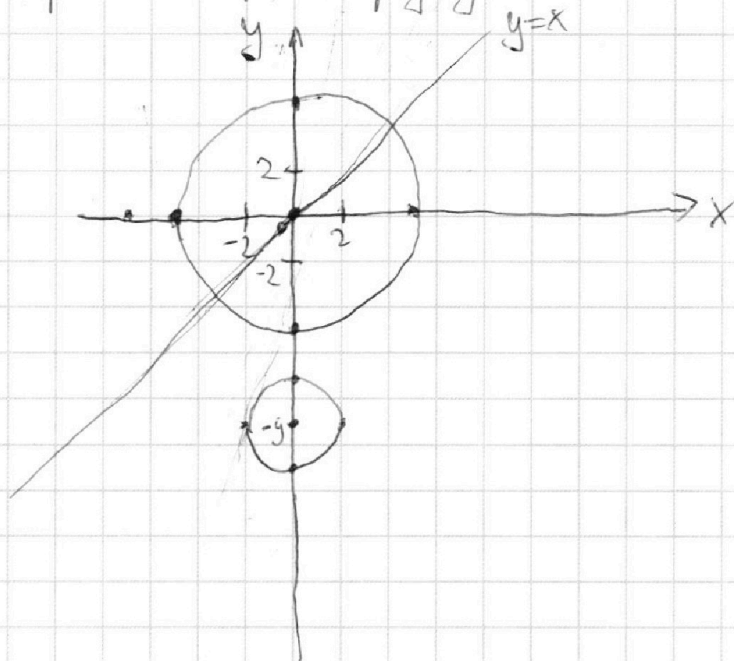
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим (2): ~~мысли~~ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$

Графиком первого является окружность с центром $(0;0)$ и радиусом 5. Графиком второго является окружность с центром $(-9;0)$ и радиусом 2.



Рассмотрим на (1): $5x + 6ay - b = 0 \Rightarrow y = \frac{b-5x}{6a} = \frac{-5x}{6a} + \frac{b}{6a}$ ($a \neq 0$)

Т.е. графиком первого является прямая.

Прямая имеет с окружностью не более 2 точек пересечения,

значит, для того, чтобы система имела 4 решения,
нужно, чтобы прямая пересекала обе окружности.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0. \text{ Если } t < 0, \text{ то } t^5 < 0; 5t < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^5 + 5t - \frac{16}{3} < 0. \text{ Противоречие.}$$

$t \neq 0 \Rightarrow t > 0$, Значит, t^5 -монотонно возрастает.

При $t > 0$; $5t$ - монотонно возрастает. \Rightarrow

$\Rightarrow t^5 + 5t$ - монотонно возрастает.

Значит, у нас будет ровно одно значение, когда

$$t^5 + 5t = \frac{16}{3}. \text{ Обозначим такое } t \text{ за } b.$$

Аналогично заметим, что $a^5 + \frac{16}{3} + 5a = 0$

Если $a > 0$, то $a^5 + 5a > 0 \Rightarrow$ такое быть не может, (знач. 0 при прибавке $\frac{16}{3}$).

$a < 0$ ($a \neq 0$) $\Rightarrow a^5$ при $a < 0$ мон. убав.

Заметим, что нам требуется $-b$. Действительно, $-b^5 - 5b + \frac{16}{3} = b^5 + 5b - \frac{16}{3} = 0$ (из первого).

Больше значений нет. И.е. $a^5 + 5a$ - мон. возр.

$$\text{Значит, } \log_{11} x = b \Rightarrow x = 11^b$$

$$\log_{11} 0,5y = -b \Rightarrow 0,5y = \frac{1}{11^b}$$

$$0,5xy = 11^b \cdot \frac{1}{11^b} = 1 \Rightarrow xy = 2$$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{x11} = \log_{x3} \frac{1}{|2|} - 5 \quad \begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}$$

$$\log_{11} x = \frac{1}{\log_{x11}} \Rightarrow \frac{1}{\log_{x11}^4} - 6 \log_{x11} = \frac{2}{3 \log_{x11}} - 5$$

$$\log_{11} x = t \quad \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = \frac{2}{3 \log_{11} x} - 5$$

$t \neq 0$ ~~определено~~ ~~множителем~~ ~~на~~ ~~то~~ ~~м.в.~~ ~~$x \neq 1$~~

$$\frac{1}{t^4} - 6t = \frac{2}{3t} - 5 \quad t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3}t - 5$$

$$\frac{1}{t^4} + \frac{16}{3}t + 5 \geq 0 \quad t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$

$$-\frac{16}{3}t^4 + 5t^5 - 1 = 0$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y3} (11^{-13}) - 5 \quad \begin{matrix} y > 0 \\ y \neq 2 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{\log_{0,5y} 11} \log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} 0,5y} = -\frac{13}{3} \log_{0,5y} 11 - 5$$

$$\log_{11} 0,5y = a \quad a \neq 0 \quad \begin{matrix} \text{м.в. } y \neq 2 \\ \text{определено множителем } a = 0 \end{matrix}$$

$$a^4 + \frac{1}{a} = -\frac{13}{3a} - 5$$

$$a^5 + \frac{16}{3} + 5a = 0$$

Получаем, что $a^5 + t^5 + 5(a+t) = 0$

1) $a > 0; t > 0$ по модулю $a^5 + t^5 > 0$; $5(a+t) > 0$
не можем быть

2) $a < 0; t < 0$ по модулю $a^5 + t^5 < 0$; $5(a+t) < 0$
не можем быть

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

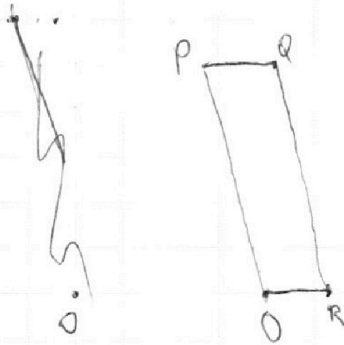
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Реш. $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ и $48 \leq 6$ и $6x_2 - 6x_1 \leq 6$,
то $y_2 - y_1 \leq 6$.



PO - прямая, имеющая вид:

$y = kx$, подставив координаты точки P, получим

$$90 = -15k \Rightarrow k = -6$$

$$y = -6x$$

для QR - прямая, имеющая вид $y = -6x + 102$

Значит, точки внутри или на границе параллелограмма - точки, имеющие вид:

$$y \geq 0; y \leq 90; y \geq -6x; y \leq -6x + 102$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

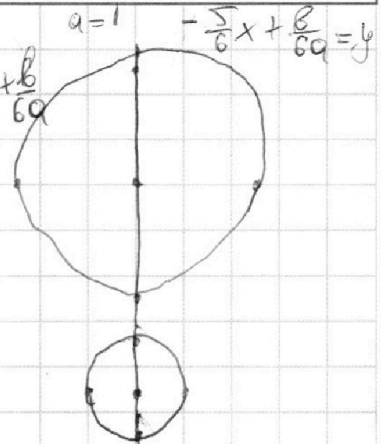
$$y = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{6a} \quad \frac{b - 5x}{6a} = \frac{-5x + b}{6a} = \frac{-5x + b}{6a}$$

$$a=1 \quad -\frac{5}{6}x + \frac{b}{6a} = y$$

$$\begin{cases} 5x \cdot (x^2 + y^2 - 25) (x^2 + y^2 + 18y + 47) = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$(y+9)^2 + x^2 = 4$$

$$(y+9)^2 + x^2 = 4$$



$$CE \cdot CA = CF \cdot CY = AC^2$$

$$= 14x^2$$

$$Cx = \frac{14x^2}{y}$$

$$Cy = \frac{14x^2}{\sqrt{\frac{7}{3}}y}$$

$$\frac{196x^4}{\frac{7}{3}y^2} - \frac{196x^4}{\frac{7}{3}y^2}$$

$$\frac{196 \cdot 2,5x^4}{y^2}$$

$$= \frac{14 \cdot 0,5\sqrt{10}x^2}{y}$$

$$= \frac{7\sqrt{10}x^2}{y}$$

$$\begin{array}{r} x \ 108 \\ \times 108 \\ \hline 108 \\ 108 \\ \hline 11664 \end{array}$$

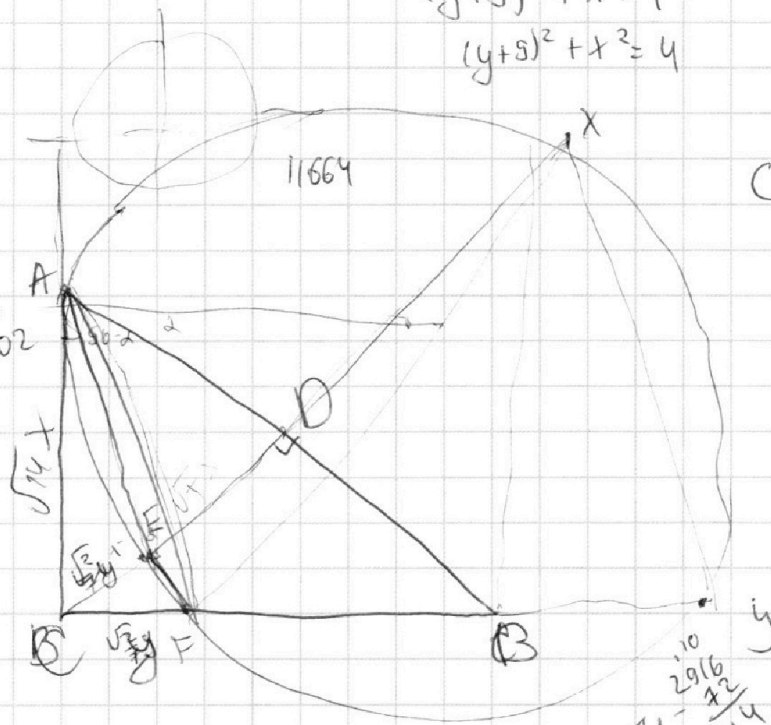
QR =

$$0 = 17x + b$$

$$90 = 2x + b$$

$$x = -6$$

$$y =$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (y+9)^2 \end{cases}$$

$$y = x - 4$$

$$x - 4 - y = 0$$

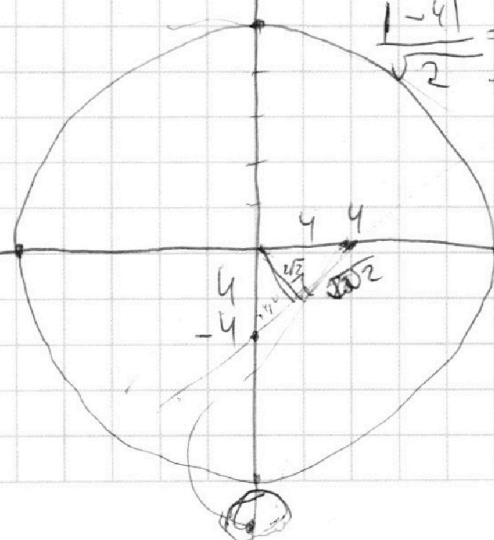
$$\frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$-\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a} = y$$

$$|ax_0 + by_0 + c|$$

$$\frac{5x - b}{6a} = y$$

$$\frac{5}{6a}x - \frac{b}{6a} = y$$



$$\frac{|-b|}{\sqrt{5^2 + 6a^2}} = \frac{|-b|}{\sqrt{25 + 36a^2}} < 5$$

$$|-54a| = \frac{149}{\sqrt{25 + 36a^2}} < 5$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ab: $2^6 3^{13} 5^{11}$

bc: $2^4 3^{21} 5^{13}$

ac: $2^{10} 3^{25} 5^{28}$

$\deg_2(a+b) \geq 6$

$\deg_2(b)+\deg_2(c) \geq 14$

$\deg_2(a)+\deg_2(c) \geq 16$

$\deg_2(a+b+c) \geq 18$

$\deg_3(a+b+c) \geq 29,5$

$\deg_5(a+b+c) \geq 26$

min $2^{18} \cdot 3^{29,5} \cdot 5^{26}$

$\deg_3(a)+\deg_3(b) \geq 13$

$\deg_3(b)+\deg_3(c) \geq 21$

$\deg_3(a)+\deg_3(c) \geq 25$

$2x+8=25$

$x=8,5$

$1 \frac{2}{3} \frac{32}{243} + \frac{810}{243} = \frac{842}{243}$

$\deg_5(a)+\deg_5(b) \geq 11$

$\deg_5(b)+\deg_5(c) \geq 13$

$\deg_5(c)+\deg_5(a) \geq 28$

$2x+2=28$
 $x=13 \quad b=-2$

$\frac{AC}{CF} = \frac{AD}{EC}$

$a=2^4 \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$
 $b=2^2 \cdot 3^0$

$\begin{array}{r} 311 \\ 2844 \\ \times 4 \\ \hline 11876 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1137691268 \\ -112681100 \\ \hline 10800 \end{array}$

$\frac{AC}{CF} = \frac{AD}{EF}$

$\frac{BC}{CB} = \frac{CF}{CE}$

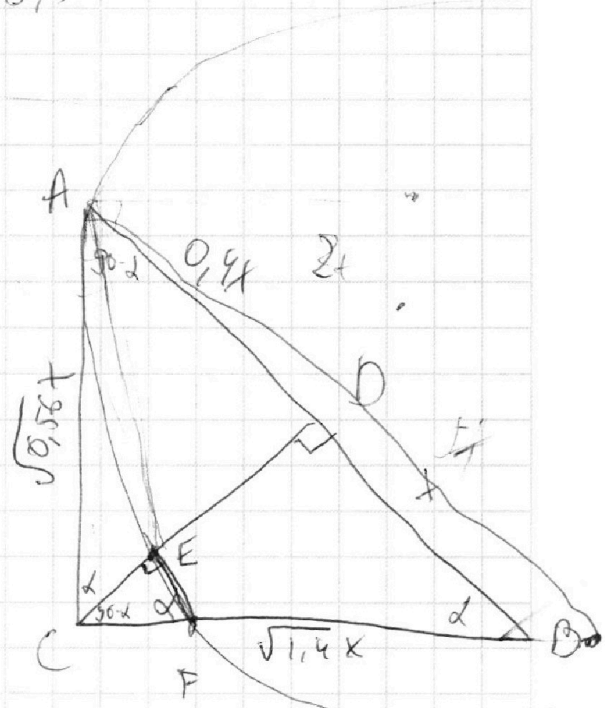
$\frac{\sqrt{1,4}x}{\sqrt{0,4}x} = \sqrt{3,5}$

$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$

$BC^2 = AB \cdot BD$

$1,4x^2$

$BC = \sqrt{1,4}x$



$0,4x^2 = CD^2$

$\frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CB}$

$CB = x \cdot \sqrt{0,4}$

$S_{\triangle ACB} = 0,4x^2 \sqrt{0,4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10\sqrt{1-x^2} = 9\sqrt{1-2x}$$

$$a\sqrt{t} + t^5 + 5(a+t) = 0$$

Если $a > 0$ / $t < 0$

$$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0 \quad t \geq 0 \quad t < 0$$

$\frac{1}{3}$

$$t(t+5) = \frac{16}{3}$$

$\frac{1}{3}$

$$\frac{2}{\sqrt{14}y} \cdot \frac{7}{\sqrt{14}y} = y^2$$

$$(\sqrt{14}x - y)^2 = y^2$$

$$14x^2 - 2\sqrt{14}xy + y^2 = y^2$$

$$\sqrt{14}x(\sqrt{14}x - 2y) = 0$$

$$\sqrt{14}x = 2y$$

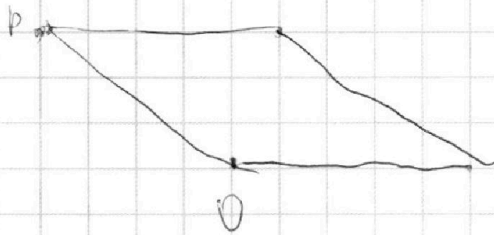
$$y = \frac{\sqrt{14}}{2}x$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{14}x}{7x} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

$$AC = \frac{\sqrt{14}}{7} AB$$

$$XF = \frac{7}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$



$\frac{7}{\sqrt{14}}$
 $\frac{2}{\sqrt{14}}$

$$t = \frac{1}{3}$$

$$a = -6$$

$$\log_{11} x = 6$$

$$x = 11^6$$

$$\log_{11} 0,1y = -6$$

$$0,15y = \frac{1}{11^6}$$

$$0,15xy = 1 \Rightarrow xy = 2$$

$\frac{7}{\sqrt{14}}$

