МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1:

Пусть $a=2^{a_1}\cdot 3^{a_2}\cdot 5^{a_3}$; $b=2^{b_1}\cdot 3^{b_2}\cdot 5^{b_3}$; $c=2^{c_1}\cdot 3^{c_2}\cdot 5^{c_3}$, где $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 \in N\cup\{0\}$. Другие простые множители в условии не упоминаются, а так как нам необходимо найти наименьшее произведение abc, то a, b и c выгодно брать, считая степень при всех остальных простых множителях равной 0.

$(ab)\vdots(2^7 3^{11} 5^{14}) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+b_1\geq 7 \\ a_2+b_2\geq 11 \\ a_3+b_3\geq 14\end{cases}$ $(bc)\vdots 2^{13}3^{15}5^{18} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1+c_1\geq 13 \\ b_2+c_2\geq 15 \\ b_3+c_3\geq 18\end{cases}$ $(ac)\vdots 2^{14}3^{17}5^{43} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+c_1\geq 14 \\ a_2+c_2\geq 17 \\ a_3+c_3\geq 43\end{cases}$

$a_1+b_1+c_1=\frac{2}{2}(a_1+b_1+c_1)=\frac{a_1+b_1+b_1+c_1+a_1+c_1}{2}\geq\frac{7+13+14}{2}=\frac{34}{2}=17$. На эту оценку существует пример: $a_1=4$; $b_1=3$; $c_1=10$.

$a_2+b_2+c_2=\frac{a_2+b_2+b_2+c_2+a_2+c_2}{2}\geq\frac{11+15+17}{2}=\frac{43}{2}=21{,}5$

$a_2, b_2, c_2\in N\cup\{0\} \Rightarrow a_2+b_2+c_2\in Z$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_2+b_2+c_2\geq 22$. На эту оценку сущ. пример: $a_2=7$; $b_2=5$; $c_2=10$.

$b_3\in N\cup\{0\}\Rightarrow a_3+b_3+c_3\geq a_3+c_3\geq 43$. На эту оценку сущ. пример: $a_3=20$; $b_3=0$; $c_3=23$.

$abc=2^{a_1+b_1+c_1}\cdot 3^{a_2+b_2+c_2}\cdot 5^{a_3+b_3+c_3}\geq 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$.

Ответ: $2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2:

Дано:

$\triangle ABC$ — прям.

$\omega(O;R)$ кас. AC в т. A

$CD \perp AB$

AB — гипот. $\triangle ABC$

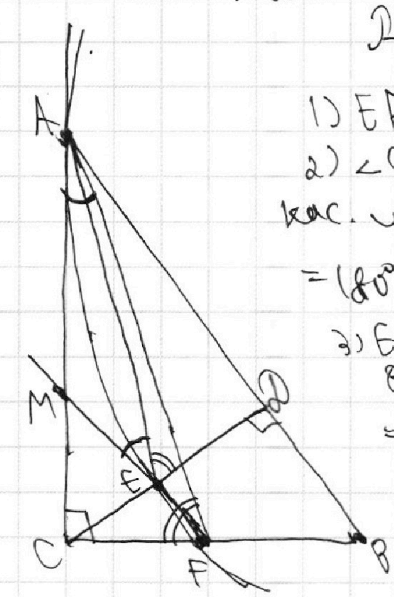
$\omega \cap CD = E$

$\omega \cap BC = F$

$AB \parallel EF$

$\frac{AB}{BD} = 1{,}3$

$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}}$ — ?



Решение:

1) $EF \cap AC = M$

2) $\angle CAF = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AF}$ (как угол между кас. и хордой) $= \frac{1}{2}(360° - \overset{\frown}{AF}_{внешн.}) =$
$= 180° - \angle AEF$ (как впис.) $= \angle AEM$

3) $EF \parallel BD$, $BD \perp CD$ $\Rightarrow CD \perp EF \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle MED = 90° \Rightarrow \angle AED = 90° - \angle MEA =$
$= 90° - \angle CAF$

4) Пусть $\angle CAF = \angle MEA = \alpha$. Тогда $\angle AED = 90° - \alpha$

5) $\triangle ACF$ $(\angle C = 90°)$: $\angle CFA + \angle CAF = 90°$ (по сумме углов в прям. тр-нике) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle CFA = 90° - \alpha = \angle AED$

6) $\angle ACF = \angle EDA = 90°$; $\angle CFA = \angle AED \Rightarrow \triangle CFA \sim \triangle AED$ (по 1ому призн.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{DE}{CF} = \frac{AD}{AC}$

7) $\triangle ACD$ $(\angle D = 90°)$: $\cos\angle CAD = \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CF}$

8) $\triangle ACB$ $(\angle C = 90°)$: $\sin\angle CBA = \frac{AC}{AB} = \cos\angle CAD = \frac{DE}{CF}$

9) $\triangle BCD$ $(\angle D = 90°)$: $\frac{CD}{BC} = \sin\angle CBA = \frac{DE}{CF}$

10) $\angle CEF = \angle CDB = 90°$; $\angle DCB$ — общий $\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CDF$ (по 1ому призн.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{CD}{BC} = \frac{DE}{CF} \Rightarrow CE = DE = \frac{CD}{2}$

11) $\triangle CEF \sim \triangle CDF \Rightarrow \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CBD}} = \left(\frac{CE}{CD}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle CEF} = \frac{1}{4} S_{\triangle CBD}$

11) $\frac{AB}{BD} = 1{,}3 \Rightarrow AB = 1{,}3BD \Rightarrow AD + BD = 1{,}3BD \Rightarrow AD = 0{,}3BD \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CD = 0{,}3 \cdot \frac{1}{2} \cdot BD \cdot CD \Rightarrow S_{\triangle ACD} = 0{,}3 S_{\triangle CBD} \Rightarrow S_{\triangle ACD} = 0{,}3 \cdot 4 S_{\triangle CEF} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = 1{,}2$

Ответ: 1,2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3:

$$5\arccos(\sin x)=\frac{3\pi}{2}+x \Leftrightarrow 5\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin(\sin x)\right)=\frac{3\pi}{2}+x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\pi}{2}-5\arcsin(\sin x)=\frac{3\pi}{2}+x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{5\pi}{2}-5x-10\pi n=\frac{3\pi}{2}+x\\ -\frac{\pi}{2}\le x+2\pi n\le\frac{\pi}{2}\\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{5\pi}{2}-5\pi+5x-10\pi m=\frac{3\pi}{2}+x\\ -\frac{\pi}{2}\le \pi-x+2\pi m\le\frac{\pi}{2}\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}6x=\pi-10\pi n\\ -\frac{\pi}{2}\le x+2\pi n\le\frac{\pi}{2}\\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}\\ \begin{cases}4x=4\pi+10\pi m\\ -\frac{\pi}{2}\le \pi-x+2\pi m\le\frac{\pi}{2}\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}-\frac{5}{3}\pi n\\ -\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{6}-\frac{5}{3}\pi n+2\pi n\le\frac{\pi}{2}\\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\pi+\frac{5}{2}\pi m\\ -\frac{\pi}{2}\le \pi-\pi-\frac{5}{2}\pi m+2\pi m\le\frac{\pi}{2}\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}-\frac{5}{3}\pi n\\ -\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}\le\frac{\pi}{2}\\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\pi+\frac{5}{2}\pi m\\ -\frac{\pi}{2}\le -\frac{\pi m}{2}\le\frac{\pi}{2}\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}-\frac{5}{3}\pi n\\ \left[\begin{array}{l}n=-2\\ n=-1\\ n=0\\ n=1\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x=\pi+\frac{5}{2}\pi m\\ \left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=0\\ m=1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+\frac{10}{3}\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{5}{3}\pi\\ x=\frac{\pi}{6}-0\\ x=\frac{\pi}{6}-\frac{5}{3}\pi\\ x=\pi-\frac{5}{2}\pi\\ x=\pi+0\\ x=\pi+\frac{5}{2}\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{7\pi}{2}\\ x=\frac{11\pi}{6}\\ x=\frac{\pi}{6}\\ x=-\frac{3\pi}{2}\\ x=\pi\end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$; π; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\angle O_1QA = \angle O_2QB$ (как верт.) $\Rightarrow \sin\angle O_1QA = \sin\angle O_2QB \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{O_1A}{O_1Q} = \frac{O_2B}{O_2Q} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{3}{7-x} \Rightarrow 14-2x=3x \Rightarrow 5x=14 \Rightarrow x=2,8$

~~Угловой~~ Угловой коэфф. l_1 равен $tg\angle O_2QB = \frac{O_2B}{BQ} = \frac{O_2B}{\sqrt{O_2Q^2-O_2B^2}}$ (по теор. Пифаг.) =

$= \frac{3}{\sqrt{(7-x)^2-3^2}} = \frac{3}{\sqrt{(7-2,8)^2-9}} = \frac{3}{\sqrt{17,64-9}} = \frac{3}{\sqrt{8,64}} = \frac{3}{\sqrt{6\cdot 1,44}} = \frac{3}{1,2\sqrt{6}} =$

$= \frac{5}{2\sqrt{6}}$. ~~Угловой~~ Угловой коэфф. l_2 равен $-tg\angle O_2QD = -tg\angle O_2QB$ (т.к. QO_2 — бис-са $\angle BQD$) $=$ ~~[illegible]~~ $-\frac{5}{2\sqrt{6}}$.

Если угловой коэфф. прямой больше угл. коэфф. l_1 или меньше угл. коэфф. l_2, то эта прямая не может пересекать обе ок-ти одновременно, значит, точек пересечения будет меньше 4 — не подходит.

Если угловой коэфф. прямой равен угл. коэфф. l_1 или l_2, то точек пересечения будет не больше двух (прямая не может ~~пересечь обе ок-ти одновременно~~ иметь общих точек с обоими ок-тями одновременно за исключением случая, когда она касается обеих ок-тей) — не подходит.

Для остальных прямых ~~найдётся такое~~ типа $y=cx+d$, где $-\frac{5}{2\sqrt{6}} < c < \frac{5}{2\sqrt{6}}$ найдётся такое d, что точек пересечения будет 4.

При любом $a\neq0$ $\frac{7b}{3a}$ принимает все знач. на $(-\infty;+\infty)$ в зависимости от b, значит для наличия 4 точек перес. достаточно, чтобы

$$\begin{cases} -\frac{5}{2\sqrt{6}} < -\frac{1}{3a} \\ \frac{5}{2\sqrt{6}} > -\frac{1}{3a} \\ a\neq0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\sqrt{6}}{15a} < 1 \\ -\frac{2\sqrt{6}}{15a} < 1 \\ a\neq0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>0 \\ a>\frac{2\sqrt{6}}{15} \\ a>-\frac{2\sqrt{6}}{15} \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ a<\frac{2\sqrt{6}}{15} \\ a<-\frac{2\sqrt{6}}{15} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a>\frac{2\sqrt{6}}{15} \\ a<-\frac{2\sqrt{6}}{15} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4:

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 & (1) \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 & (2) \end{cases}$$ имеет 4 решения при каких a?

Решение:

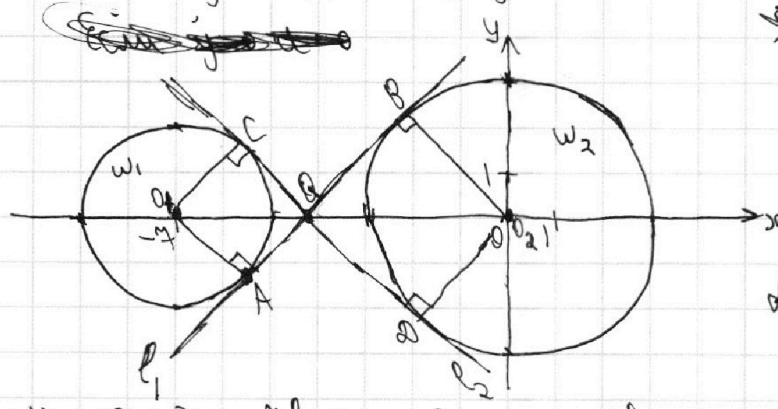
(2): $(x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+14x+49+y^2-4=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=2^2 \text{ — ур.-ок-ть } \omega_1 \text{ с центром } (-7;0) \text{ и радиусом } 2 \\ x^2+y^2=3^2 \text{ — ур.-ок-ть } \omega_2 \text{ с центром } (0;0) \text{ и радиусом } 3 \end{array}\right.$

график ур-я (2) — две непересек. ок-ти ω_1 и ω_2

~~(1): x+3ay−7b=0 ⇔ 3ay=−x+7b~~

~~Если ур-е~~



~~По условию~~ График ~~ур~~ ур-я (1) должен иметь 4 точки перес. с графиком ур-я (2), тогда и только тогда система будет иметь 4 решения.

(1): $x+3ay-7b=0 \Leftrightarrow 3ay=-x+7b$

Если $a=0$, то $x=7b$, ур.-верт. прямая, 4 точки пересечения быть не может — не подходит.

Если $a \neq 0$:

$$y=-\frac{1}{3a}x+\frac{7b}{3a}$$

Проведём ~~две~~ прямые l_1 и l_2, касающиеся обеих ок-тей ω_1 и ω_2, l_1 кас. ω_1 в т. A и ω_2 в т. B; l_2 кас. ω_1 в т. C и ω_2 в т. D, $l_1 \cap l_2 = Q$, ~~...~~ при этом угловой коэфф. l_1 больше угл. коэфф. l_2.

Пусть O_1 — центр ω_1; O_2 — центр ω_2. Тогда QO_1 — бис-са $\angle CQA$ (т.к. QC и QA кас. ω_1) и QO_2 — бис-са $\angle BQD$ (т.к. QB и QD кас. ω_2), при этом $Q \in O_1O_2$, т.к. QO_1 и QO_2 — бис-сы вертик. углов ($\angle CQA$ и $\angle BQD$).

$O_1O_2=\sqrt{(-7-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{49}=7$

Пусть $O_1Q=x$. Тогда $O_2Q=7-x$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5:

1) $\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4.$

Пусть $t = \log_7 6x$. Тогда:

$\begin{cases} 6x \neq 1 \\ t^4 - 2t^{-1} = \frac{3}{2}t^{-1} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{6} \\ t^4 - \frac{7}{2}t^{-1} + 4 = 0 \end{cases}$ (2)

2) $\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4$

Пусть $p = \log_7 y$. Тогда:

$\begin{cases} y \neq 1 \\ p^4 + 6p^{-1} = \frac{5}{2}p^{-1} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 1 \\ p^4 + \frac{7}{2}p^{-1} + 4 = 0 \end{cases}$ (1)

3) $x \neq \frac{1}{6}; y \neq 1$:

$(1)-(2): p^4 - t^4 + \frac{7}{2p} + \frac{7}{2t} = 0 \Leftrightarrow (p-t)(p+t)(p^2+t^2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$p^3+t^3+p^2t+pt^2-2t^3-2pt^2=(p+t)^3-2t^2(p+t)=$
$=(p+t)((p+t)^2-2t^2)=-3,5$

5. $\log_7^4(6x)-2\log_{6x}7=\log_{36x^2}343-4$

$\log_7^4 y+6\log_y 7=\log_{y^2}(7^5)-4$

$\cancel{\log_{6x}7=t}$ $\log_7(6x)=t$

$p=\log_7 y$

$t^4-2t^{-1}=\frac{3}{2}t^{-1}-4$

$p^4+6p^{-1}=\frac{5}{2}p^{-1}-4$

$t^4-\frac{7}{2}t^{-1}+4=0$

$p^4+\frac{7}{2}p^{-1}+4=0$

$2t^5+8t-7=0$

$2p^5+8p+7=0$

$\frac{\log_7\frac{6x}{y}\cdot\log_7 y}{\log_7 6x\,\log_7 y}=\frac{1}{\log_7 y}-\frac{1}{\log}$

$t^5=p^5$

$\cancel{t=p \Leftrightarrow \log_7(6x)=\log_7 y \Leftrightarrow} \begin{cases}6x=y\\ y>0\\ y\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{y^2}{6}\\ y\neq 0\\ y\neq\frac{1}{6}\end{cases}$ $\cancel{y\in(0;\frac{1}{216})\cup(\frac{1}{216};\frac{1}{6})\cup(\frac{1}{6};+\infty)}$.

$2(t^5-p^5)=14 \Leftrightarrow t^5-p^5=7 \Leftrightarrow \log_7^5(6x)=\log_7^5 y+7$

$\frac{AB}{BD}=1,3$

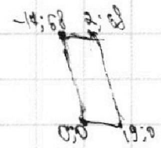
$AB=1,3BD$

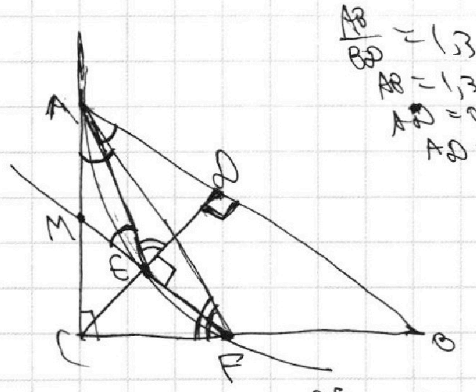
$AD=0,3BD$

$AD=\frac{3}{13}AB$

6. x_2-x_1 | 0 | 1 | 2 | 3 | ... | 9 | 10
y_2-y_1 | 40 | 36 | 32 | 28 | ... | 4 | 0

2.





$\log_7^4(6x)-2\log_{6x}7=\log_{36x^2}343-4$

$\log_7 6x=t$

$\log_7 y=p$

$t^4-2t^{-1}=\frac{3}{2}t^{-1}-4$

$t^4-\frac{7}{2}t^{-1}+4=0$

$p^4+\frac{7}{2}p^{-1}+4=0$

$\frac{DE}{CF}=\frac{AD}{AC}$

$\frac{DE}{CF}=\frac{CD}{BC}$

$\begin{cases}\frac{DE}{CD}=\frac{CF}{BC}\\ \frac{CF}{BC}=\frac{CE}{CD}\end{cases} \Rightarrow DE=CE$

$p^4-t^4+\frac{7}{2}p^{-1}+\frac{7}{2}t^{-1}=0$

$(p-t)(p+t)(p^2+t^2)+\frac{7}{2}\cdot\frac{p+t}{pt}=0$

$(p+t)\left((p-t)(p^2+t^2)+\frac{7}{2pt}\right)=0$

$(p-t)(p^2+t^2)+\frac{7}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{p}\right)=0$

$p+t=\log_7 y+\log_7 6x=\log_7(6xy)$

$\frac{p^4t+p^2t^3-p^3t^2-pt^4+3,5}{pt}=0$

$pt(p^3-t^3)+p^2t^2(p-t)=-3,5$

$pt(p^3-t^3+p^2t-pt^2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

1. $a = 2^4$, $b = 2^3$, $c = 2^{10}$

$a = 2^{a_1}\cdot 3^{a_2}\cdot 5^{a_3}$ $\quad b = 2^{b_1}\cdot 3^{b_2}\cdot 5^{b_3}$ $\quad c = 2^{c_1}\cdot 3^{c_2}\cdot 5^{c_3}$

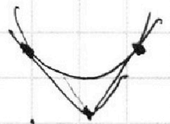
$a_1+b_1=7$ $\quad a_2+b_2=11$ $\quad a_3+b_3=14$

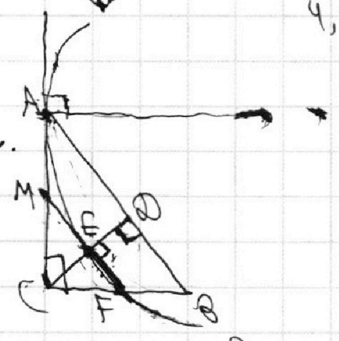
$a_1+c_1=14$ $\quad a_2+c_2=17$ $\quad a_3+c_3=43$

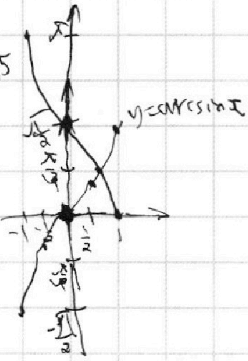
$b_1+c_1=13$ $\quad b_2+c_2=15$ $\quad b_3+c_3=18$

$a_1+b_1+c_1=17$ $\quad a_2+b_2+c_2=21{,}5$ $\quad a_3+b_3+c_3=37{,}5$

4, 3, 10 $\quad$ 7, 5, 10







2.

1 a/m — 5
2 ✓ — 6 ?
3 ✓ — 7 ?
4 ✓

3. $5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $n \in \mathbb{Z}$

$\frac{5\pi}{2} - 5\pi + 5x - 10\pi n = \frac{3\pi}{2} + x$

$6x = \pi - 10\pi n$ $\quad x = \frac{\pi}{6} - \frac{5}{3}\pi n$, $x + 2\pi n \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$4x = 4\pi + 10\pi n$ $\quad x = \pi + \frac{5}{2}\pi n$, $\pi - x + 2\pi n \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{11\pi}{6}$, $x = \pi$

$\frac{\pi}{6} - \frac{5}{3}\pi n + 2\pi n = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3} = \frac{\pi + 2\pi n}{6}$

$\pi - \pi - \frac{5}{2}\pi m + 2\pi m = -\frac{\pi m}{2}$

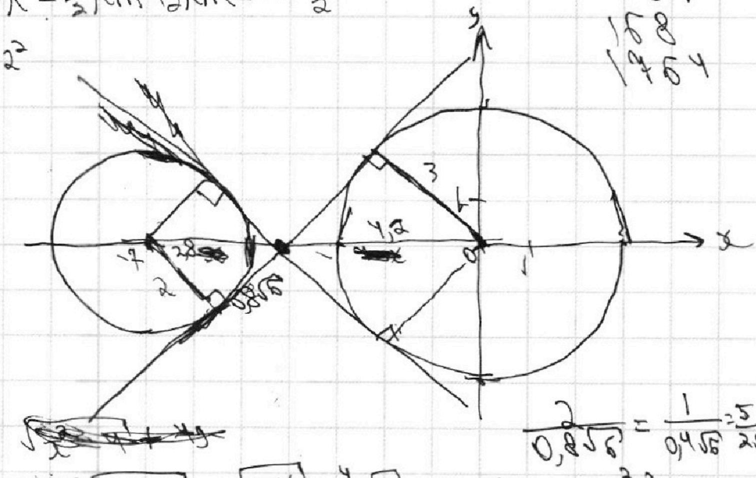
42 · 42 = 84; $\sqrt{68}$, $\sqrt{764}$

4. $\begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{cases}$

$x + 3ay - 7b = 0$

$a \neq 0$: $3ay = -x + 7b$

$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$



$\frac{3}{7-x} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x = 14 - 2x \Leftrightarrow 5x = 14 \Leftrightarrow$

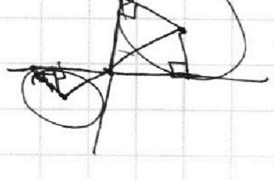
$\Leftrightarrow x = 2{,}8$

$\frac{2}{0{,}8\sqrt{6}} = \frac{1}{0{,}4\sqrt{6}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{3}{\ldots\sqrt{6}}$

$\sqrt{\left(\frac{14}{5}\right)^2 - 4} = \sqrt{\frac{49\cdot 4 - 25\cdot 4}{25}} = \sqrt{\frac{24\cdot 4}{25}} = \sqrt{\frac{6\cdot 16}{25}} = \frac{4}{5}\sqrt{6} = 0{,}8\sqrt{6}$

1,44 · 6 = 8,64

$0{,}64\cdot 6 + 4 = 3{,}84 + 4 = 7{,}84$



2,24 · 3,5 = 7,84

2,29 · 41 → 821

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ