МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1 Дано: a, b, c — натуральные числа: $ab \vdots 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$; $bc \vdots 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$; $ac \vdots 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$.

Согласно определению делимости запишем ($a,b,c \in \mathbb{N} \Rightarrow x,y,z \in \mathbb{N}$), где x, y, z — это

$$\left.\begin{aligned} ab &= x \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \\ bc &= y \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \\ ca &= z \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \end{aligned}\right\} \Rightarrow abc \overset{a,b,c\in\mathbb{N}}{=} \sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} = \sqrt{xyz} \cdot 2^{\frac{8+12+14}{2}} \cdot 3^{\frac{14+20+21}{2}} \cdot 5^{\frac{12+17+39}{2}} =$$

$$= \sqrt{xyz} \cdot 2^{\cancel{18}\,17} \cdot 3^{27} \cdot \sqrt{3} \cdot 5^{34} = \sqrt{3xyz} \cdot 2^{18} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34}$$

$3xyz$ — полный квадрат, причем $3xyz \vdots 3 \Rightarrow 3xyz \vdots 9$ (это полн. кв., т.к. числа a, b, c — натуральные). Итак $\min(3xyz) = 9$, mi
т.е. $\sqrt{xyz3} \in \mathbb{Z}$)

Оценка abc: $abc \geqslant 2^{18} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

$ac \vdots 5^{39} \Rightarrow abc \vdots 5^{39}$, $abc \geqslant 2^{18} \cdot 2^{28} \cdot 5^{39}$
т.к. a, b, c — ~~ца~~ натур

Пример:

$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{\cancel{12}\,17}$

$b = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^{\cancel{22}}$

$c = 2^9 \cdot 3^{\cancel{14}\,13} \cdot 5^{22}$

$$\left.\begin{aligned} ab &= 2^8 \cdot 3^{15} \cdot 5^{17} \vdots 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \\ bc &= 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{22} \vdots 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \\ ac &= 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \vdots 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a, b, c \text{ удовл. усл.}$$

$abc = \cancel{5^{18}}\ 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

$\Rightarrow \min(abc) = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$.

Ответ. $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$2^8 \cdot 3^{14}$

$z+x=39$
$x+y=12$
$y+z=17$

2

$2^8 \cdot 3^{15} \cdot 5^{12} = ab$

$\frac{39+12+17}{2}$

$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$ $\quad \cancel{a} = 2^{12 \cdot 2}$ $\quad 30+29=58$ $\quad z-x=5$

$ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$ $\quad a = 2^{\frac{148-12}{2}} \cdot 3^{\frac{15+21-20}{2}} \, 5^{\frac{12+39-17}{2}}$

$17+5+12=34$

$z+x=39$ $\quad 2^5 3^8 5^{17}$ $\quad 667$ $\quad 467$ $\quad 17+5=22$

$x+y \geqslant 12$ $\quad x+y+z \geqslant \frac{12+17+39}{2}$ $\quad 6+4+7$ $\quad z-x=5$
$y+z \geqslant 17 \Rightarrow$ $\quad z+x=39$
$z+x \geqslant 39$

$x+y=12$
$z+y \geqslant 17$
$x+z=39$

14
20

$15 = x+y$
$20 = y+z$
$21 = z+x$

$2y \quad 2x+y+z \geqslant 17+39$

$2x+y+z \geqslant$

$x+y+z = \frac{15+20+21}{2} = \frac{56}{2} = 28$

$x+y+z \geqslant 17+39 \cancel{-x} \geqslant$

$x+y \geqslant 12$
$y+z \geqslant 17$ $\quad x,y,z \geqslant 0$
$z+x \geqslant 39$ $\quad x+y+z \geqslant 34$

$28-15=13$
$28-20=8$
$28=21$

$\min(x+y+z)$

$39=17$
$39-17 \quad 22$

$150 \cdot 12 = 300 + 1500 = 1800$, $\; y=0$

$15 \cdot 12 = 30 + 150 = 180$

$17;12$ $\quad 18$ $\quad 30 \cdot 6$

$ax-3y=$ $\quad ax-3y+4b=0$ $\quad \sin^2 ax+1=\cos x$ $\quad \sin^2 x+$

$(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+100-36)$

$a-?$ $\quad \boxed{\sin^2 ax+1=\cos x}$ ур-ние равно 1 решение.

a $\boxed{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

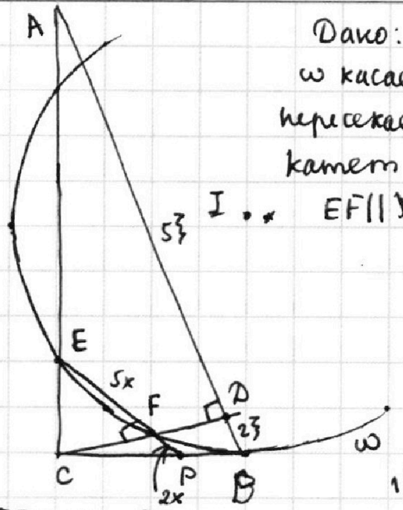
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2



Дано: $\triangle ABC$ – п/у, AB – гипотенуза;
ω касается стороны BC в точке B;
пересекает высоту CD в т. F и пересекает катет AC в точке E.

I. $EF \parallel AB$; $AD:DB = 5:2$; Найти: $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$.

Решение. ω пересекает катет $\Rightarrow$ центр окр-ти ω и точка A лежат по одну ст. отн. CB.

1) $EF \parallel AB$, $CD \perp AB$ $\xRightarrow{\text{по св-ву ||-ых прямых на плоск.}}$ $EF \perp CD \Rightarrow \angle CFE = 90°$

2) Пусть $EF \cap CB = P$, по теореме о квадрате касательной для касат PB, провед. из т. P к окр-ти ω имеем: $PB = \sqrt{PF \cdot PE}$.

3) Пусть $AD = 5\xi$; Тогда по условию задачи $DB = 2\xi$. CD – высота п/у $\triangle$-ка, которая провед к гипот. п/у $\triangle CBA \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{5\xi \cdot 2\xi} = \sqrt{10}\,\xi$

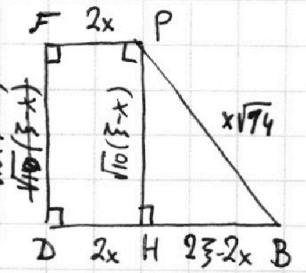
4) В $\triangle CFE$ и $\triangle CDA$: $\angle CFE = \angle CDA = 90°$; $\angle ACD$ – общ. $\xRightarrow{\text{по 2 равн. угл.}}$ $\triangle CFE \sim \triangle CDA \Rightarrow \frac{EF}{AD} = \frac{CF}{CD}$

В $\triangle CFP$ и $\triangle CDB$: $\angle CFP = \angle CDB = 90°$; $\angle DCB$ – общ $\xRightarrow{\text{по 2 рав. угл.}}$ $\triangle CFP \sim \triangle CDB \Rightarrow \frac{FP}{DB} = \frac{CF}{CD}$

Тогда $\frac{EF}{AD} = \frac{FP}{DB} \Rightarrow$ если $EF = 5x$, то $FP = \frac{2\xi}{5\xi} \cdot 5x = 2x \Rightarrow PB = \sqrt{PF \cdot PE} = \sqrt{2x \cdot 7x} = x\sqrt{14}$

5) Заметим, что CF – выс. п/у $\triangle CEP$, провед. к гип. $\Rightarrow CF = \sqrt{EF \cdot FP} = x\sqrt{10}$

Заметим, что $\square PFDB$ – п/у трапец. ($FP \parallel DB$), провед. в ней выс. PH к больш. осн. ($\xi > x$ т.к. $PE < AB$) (DB). $FD = CD - CF = \sqrt{10}(\xi - x)$



Тогда $\square DFPH$ – прямоугольник по опр,

$HB = DB - DH = DB - FP = 2\xi - 2x$

$PH = FD = \sqrt{10}(\xi - x)$, $\triangle PHB$ – п/у ($\angle PHB = 90°$, т.к. PH – выс) $\Rightarrow$ Теор. Пифагора: $PB^2 = PH^2 + HB^2$

$14x^2 = 10(\xi^2 - 2\xi x + x^2) + 4(\xi^2 - 2\xi x + x^2)$

$14x^2 = 14(\xi - x)^2$; $x^2 = (\xi - x)^2$ $(x - \xi + x)(x + \xi - x) = 0$

$\xi(2x - \xi) = 0$ $|: \xi \neq 0$, $x = \xi/2$

$$\left.\begin{aligned} S_{ABC} &= \tfrac{1}{2} CD \cdot AB = \tfrac{1}{2} \cdot \xi\sqrt{10} \cdot 7\xi \\ S_{CFE} &= \tfrac{1}{2} CF \cdot EF = \tfrac{1}{2}\, x\sqrt{10} \cdot 5x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{7}{5}\left(\frac{\xi}{x}\right)^2 = \frac{28}{5}$$

($\angle CFE = 90°$)

Ответ: $\frac{28}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 Решить уравнение: $10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$D(y) = [-1;1]$

1) Ф-я $y = 10\arcsin t$ является ограниченной ($E(y) = [-10\cdot\frac{\pi}{2}; 10\cdot\frac{\pi}{2}]$) => есть ограничения на x: $-5\pi \le \pi - 2x \le 5\pi$; $-5\pi \le 2x - \pi \le 5\pi$; $-4\pi \le 2x \le 6\pi$; $-2\pi \le x \le 3\pi$.

2) Преобразуем исх. уравнение: $10\arcsin(\cos x) + 2x = \pi$ и рассмотрим ф-цию $f(x) = 10\arcsin(\cos x) + 2x$; $D(f) = \mathbb{R}$ на отрезке $[-2\pi; 3\pi]$ (Если $x \notin [-2\pi; 3\pi]$, уравнение точно не имеет реш. в силу пункта 1)

$$f'(x) = 2 + 10\frac{-\sin x}{|\sin x|}, \text{ т.к. } \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x}} = \frac{1}{\sin x}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2-10, \text{ если } \sin x > 0 \\ 2+10, \text{ если } \sin x < 0 \end{cases}$$

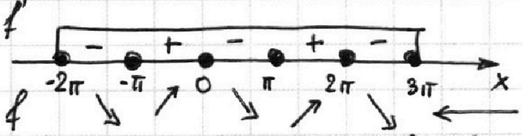
$f'(x) \ne 0$; $f'(x)$ не опр. при: $\sin x = 0$; $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Крит. точки на отрезке $[-2\pi; 3\pi]$:

$-2\pi \le \pi k \le 3\pi$; $k \in [-2; 3] \xRightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ =>

крит.т.: $\{-2\pi; -\pi; 0; \pi; 2\pi; 3\pi\}$



На числ. пр. наносится промежуток $[-2\pi; 3\pi]$

На каждом промежутке тангенс угла наклона касат = const => это прямые

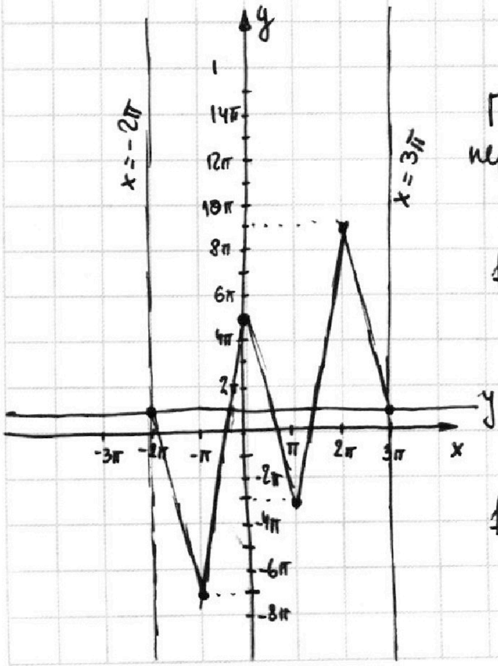
Ф-я в точках имеет излом.

$f(-2\pi) = 10(\arcsin(\cos(-2\pi))) + (-4\pi) = 10\cdot(\pi/2) - 4\pi = \pi$

$f(-\pi) = 10(\arcsin(\cos(-\pi))) - 2\pi = -5\pi - 2\pi = -7\pi$

$f(0) = 10\arcsin(\cos 0) - 0 = 5\pi$; $f(2\pi) = 10\arcsin(\cos 2\pi) + 4\pi = 9\pi$

$f(\pi) = 10\arcsin(\cos\pi) + 2\pi = -3\pi$; $f(3\pi) = 10\arcsin(\cos 3\pi) + 6\pi = \pi$



На каждом из промежутков гр-ком ~~кажется~~ является часть прямой

Гр-ки ф-ции $y = f(x)$ и $y = \pi$ имеют 5 точек пересечение (из монотонности), и решений будет равно 5

Подбираем:

$f(3\pi) = f(-2\pi) = \pi$ - это реш.

$f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 10\arcsin(\cos\frac{\pi}{2}) + 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$

$f(\frac{4\pi}{3}) = 10\arcsin(\cos\frac{4\pi}{3}) + \frac{8\pi}{3} =$

$= 10\arcsin(-\frac{1}{2}) + \frac{8\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} = \pi$

$f(-\frac{\pi}{3}) = 10\arcsin(\cos(-\frac{\pi}{3})) - \frac{2\pi}{3} = 10\arcsin(\frac{1}{2}) - \frac{2\pi}{3} = (\frac{5}{3} - \frac{2}{3})\pi$

$f(-\frac{\pi}{3}) = \pi$. Ответ: $\{-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4

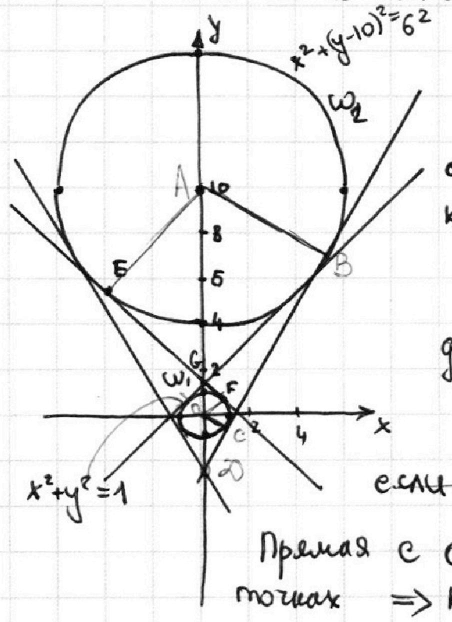
а-?, найдется значение параметра в, при котором система

$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \end{cases}$$ имеет ровно 4 решения.

Первое ур-ние системы: $y=\frac{ax+4b}{3}$ - линейная ф-я, гр-к - прямая.
Эта ф-я задает мн-во прямых с угловым коэф а (кроме вертикальной прямой), проход. через точку $(0;\frac{4b}{3})$ (если $x=0$, то $y=\frac{4b}{3}$)

2-ое ур-ние: равносильно совокупн. $\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2=36 \end{array}\right.$ 2 окр-ти; $\omega_1(O(0;0); R_1=1)$ $\omega_2(A(0;10); R_2=6)$

ω_1 и ω_2 не им. общ. точек, потому что $AO=10>R_1+R_2$



Проведем 2 общие касательные ω_1 и ω_2, они пересекаются в точке на линии центров окружностей (точка D) и общие внутренние касательные этих двух окр.

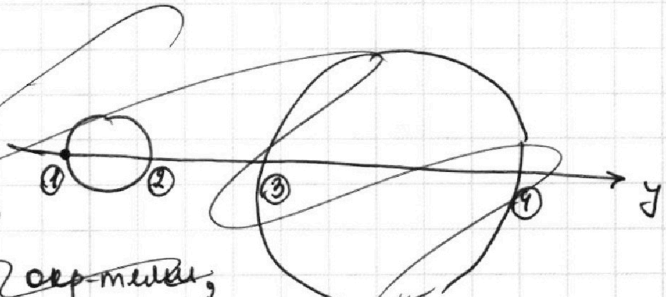
FE-одна из внутр. касат, $EF\cap AO=G$

g_y; d_y - ординаты точек G и D соотв.

~~если $\frac{4b}{3}\le d_y$, то это зн. подходит усл.~~

Прямая с окр. пересекается не более чем в двух точках => ~~каждая~~ для того чтобы было ровно 4 реш. нужно, чтобы прямая, заданная $y=\frac{ax+4b}{3}$ пересекла каждую окр. дважды.

если ~~d~~ ~~$\frac{4b}{3}$~~ $\le$



~~Возьмем $a=10^{15}$, и заметим, что $y=\frac{10^{15}x+4b}{3}$ обязательно будет иметь 4 т. перес с окр-тями, потому что~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

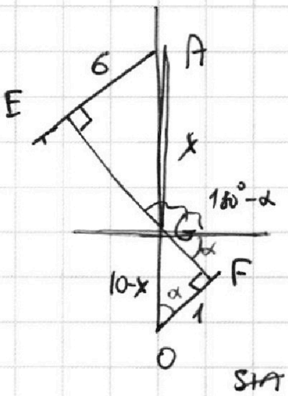
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Если ~~прямая~~ $y = \frac{ax+4b}{3}$ ~~при некоторых a, b пересекает окр.~~ ω_1, ~~то (в 2 т.), то она обязательно пересечёт~~ и окр. ω_2 в двух ~~точках~~

№5 продолж.

Пусть $-k_1$ - угл. коэф. наклона прямой EF. Усл. задачи выполн., если $a \in [-k_1; k_1]$



$AE \perp EF$ и $FO \perp EF$ как радиусы, провед. в т.кас.

$\Delta AEG \sim \Delta OFG$ т.к. $\angle E = \angle F = 90^\circ$, $\angle AGE = \angle OGF$ (как верт.)

Тогда: $\frac{x}{6} = \frac{10-x}{1}$; $x = 60 - 6x$; $x = \frac{60}{7}$

$10 - x = \frac{10}{7}$

~~sin tgα~~ ~~sinα =~~ $GF = \sqrt{GO^2 - OF^2} = \sqrt{\frac{100}{49} - 1} = \frac{\sqrt{51}}{7}$

$tg\,OF = \frac{GF}{OF} = \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow k_1 = -tg\,\alpha = -\frac{\sqrt{51}}{7}$

Ответ: $[-\frac{\sqrt{51}}{7}; \frac{\sqrt{51}}{7}]$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 $\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3 \\ \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3}0{,}2 - 3 \end{cases}$ (*)

ОДЗ: $\begin{cases} 2x>0 \\ 2x \neq 1 \\ 8x^3>0 \text{ - следует из усл. } 2x>0 \\ 8x^3 \neq 1 \text{ - следует из усл. } 2x\neq 1 \\ y>0 \\ y \neq 1 \\ y^3>0 \text{ - следует из усл. } y>0 \\ y^3 \neq 1 \text{ - следует из усл. } y\neq 1 \end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases} x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty) \\ y \in (0;1) \cup (1;+\infty) \end{cases}$

Пусть $a = \log_5(2x) \Rightarrow \frac{1}{a} = \log_{2x}(5)$; $\log_{8x^3}(625) = \frac{4}{3}\log_{2x}5 = \frac{4}{3a}$

$b = \log_5(y)$; $\log_y 5 = \frac{1}{b}$; $\log_{y^3}0{,}2 = -\frac{1}{3}\log_y 5 = -\frac{1}{3b}$; $\cancel{\boxed{a,b>0}}$ $xy = 5^a \cdot 5^b = 5^{a+b}$.

Условия: $\boxed{a,b \neq 0}$

Система примет вид:

$\begin{cases} a^4 - 3\cdot\frac{1}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \quad (1) \\ b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \quad (2) \end{cases}$

~~Рассмотрим для начала ур-ние (2).~~

~~$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \;\Big|\cdot 3b > 0$~~

~~$b^5 + 12 = -1 - 9b$~~

~~$\underbrace{b^5 + 9b + 13}_{>0} = 0$ т.е. уравнение $b^5 + 9b + 13 = 0$ не имеет решения~~

~~Ну и получается, что не сущ. такого $b>0$, чтобы рав-во (2) выполн. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ у системы (*) решений нет вовсе.~~

~~Ответ: таких пар x, y, удовл. одновременно обеим равенствам не существует.~~

~~$\begin{cases} b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \\ a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \end{cases}$~~

~~$\begin{cases} b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0 \;\Big|\; 3b \neq 0 \\ a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \;\Big|\; 3a \end{cases}$ (−) $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow b^4 - a^4 + \frac{13}{3}\frac{(a+b)}{ab} = 0$; $(b^2-a^2)(b^2+a^2) + \frac{13}{3}(a+b)\frac{1}{ab} = 0$;~~

~~$(a+b)\left((b-a)(a^2+b^2) + \frac{13}{3ab}\right) = 0$;~~

~~$\left[\begin{array}{l} (a+b) = 0 \\ (b-a)(a^2+b^2) = -\frac{13}{3ab} \end{array}\right.$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5. Продолжение (условия на a, b: $ab \neq 0$)

$$\begin{cases} a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \\ b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0 \quad (*) \end{cases} \Rightarrow$$

1) $\underbrace{a^4+b^4+6}_{>0} - \frac{13}{3}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\frac{b-a}{ab} > 0} \Big| \cdot (a^2b^2) > 0$ т.к. $ab \neq 0$ $\Rightarrow \boxed{ba(b-a) > 0}$

2) $a^4 - b^4 - \frac{13}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 0$; $(a-b)(a+b)(a^2+b^2) - \frac{13}{3} \cdot \frac{a+b}{ab} = 0$;

$\frac{(a+b)}{ab}\left(\underbrace{\frac{13}{3} + (b-a)ab(a^2+b^2)}_{>0 \text{ т.к. } \frac{13}{3}>0,\ a^2+b^2>0 \text{ т.к. } ab\neq 0,\ (b-a)(ab)>0}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{a+b=0}$ единств. случай. $(ab \neq 0)$

Найдутся ли такие a, b, что $a+b=0$?

Р-м ур-ние $(*)$ при $b<0$; домножим обе части ур. на $b<0$

$b^5 + \frac{13}{3} b \cdot \frac{1}{b} + 3b = 0$; $3b^5 + 13 + 9b = 0$

$f_1(b) = 3b^5$; $f_2(b) = 9b$ ↗ на ~~$(0;+\infty)$~~ $(-\infty;0)$; $13 = const \Rightarrow f(b) = 3b^5 + 9b + 13$ ↗ на $(-\infty;0)$.

Причем $f(-2) = -3 \cdot 32 + 13 - 9 \cdot 2 < 0$; $f(-1) = 13 - 9 - 3 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ корень b_0 есть у ур-ния на $(-2;-1)$ т.к. $f(x)$ возр. и непрерывна на этом от.

Т.е. нашлось b_0: $b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0$. Возьмем $a_0 = -b_0$ и заметим, что ур-ние $a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0$ становится ~~тождест~~ рав-вом: $b_0^4 + \frac{13}{3}b + 3 = 0$

Т.е. $a+b=0$ возможно! Других вариантов, к сожалению, нет.

$xy = 5^{a+b} = 5^0 = 1$.

Ответ: 1

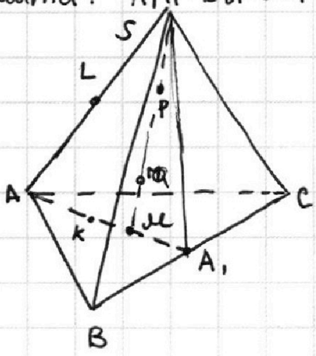
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

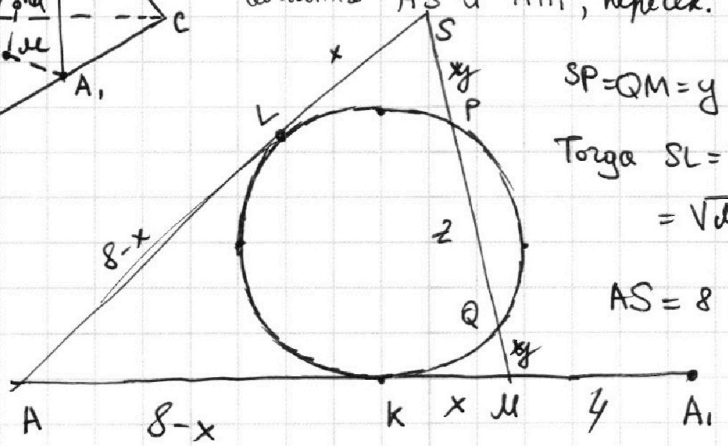
№7 Дано: SABC – треугольная пирамида; AA_1; BB_1; CC_1 – медианы $\triangle ABC$; M – т. пересечения медиан $\triangle ABC$; Ω кас. [AS] в т. L; Ω кас. $(ABC) = k$; $k \in AM$; $\Omega \cap [SM] = P, Q$; $SP = MQ$; $S_{ABC} = 100$; $SA = BC = 16$

а) Найти: $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1$ – ?



Пусть: [SM] содерж. P. для определённости

Р-м сечение Ω пл-тью AKS. Это окр, которая касается AS и AA_1, пересек. SM в P и Q



$SP = QM = y$; $PQ = z$

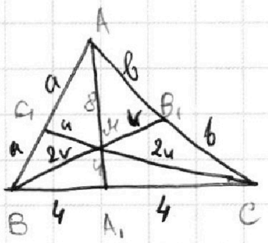
Тогда $SL = \sqrt{SP \cdot SQ} = \sqrt{y(y+z)} = \sqrt{MQ \cdot MP} = KM$,

$AS = 8 \Rightarrow AL = 8 - x = Ak$ (отр. кас.)

Тогда $AM = 8 - x + x = 8$;

$MA_1 = \frac{8}{2} = 4$

(медианы $\triangle$ дел. т. перес. ~~пополам~~ в отн 2:1, считая от верш.)

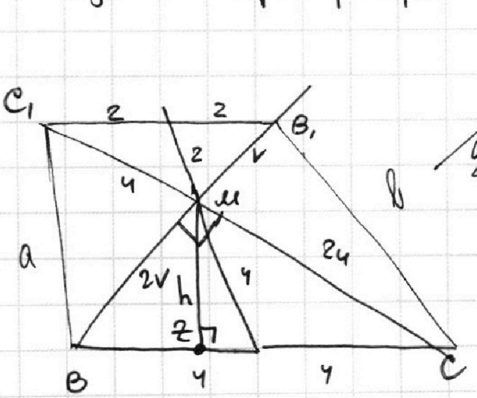


$C_1M = u \Rightarrow MC = 2u$;

$BM = 2v \Rightarrow MB_1 = v$

в $\triangle$-ке MBC: $MA_1 = BA_1 = A_1C \Rightarrow \angle BMC = 90°$,

Тогда по теор. пифагора: $MB^2 + MC^2 = 4v^2 + 4u^2 = 8^2$; $u^2 + v^2 = 16$



~~$a = \sqrt{u^2 + 4v^2}$; $b = \sqrt{v^2 + 4u^2}$~~

$S_{BMC} = \frac{1}{3} S_{ABC} = 100/3$ (медианы делят $\triangle$ на 6 равновеликих)

$\frac{1}{2} BM \cdot MC = \frac{100}{3}$; $\frac{200}{3} = 4uv \Rightarrow \begin{cases} uv = \frac{50}{3} \\ u^2 + v^2 = 16 \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7. Продолжение.

$$\begin{cases} uv = \frac{50}{3} \\ u^2+2uv+v^2-\frac{100}{3}=16 \end{cases} \qquad \begin{cases} uv = \frac{50}{3} \\ (u+v)^2=\frac{148}{3} \end{cases}$$

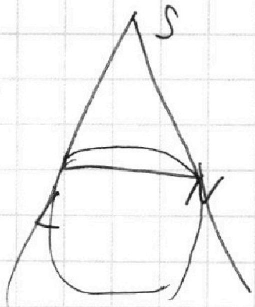
$u+v$

$u>0, v>0$

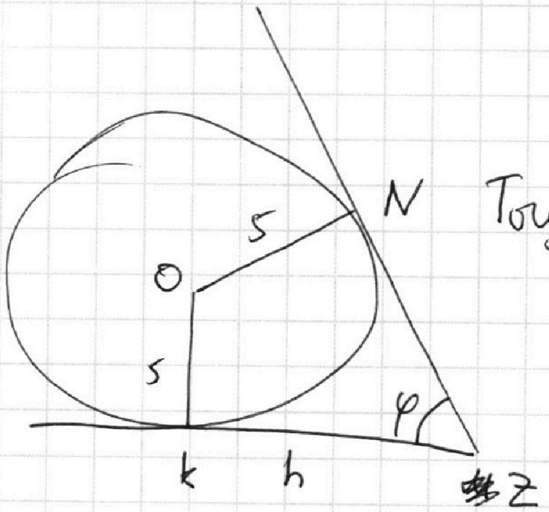
$9uv = 150$

Произв длин медиан: $9uv\cdot 12 = 150\cdot 12 = 1800.$

б) Сфер. касс. грани $\Rightarrow SN = SL = 4 \Rightarrow x = 4.$



Р-м сечение ~~шар~~ сферы пл-ью ~~KMNLNZ~~



, $(ZKN)\perp$ ребру BC по постр.

Тогда O лежит в этой пл.

$NZ = KZ = h =$

$= \frac{2u\cdot 2v}{BC} = \frac{\frac{200}{3}}{8} = \frac{50}{3\cdot 2} = \frac{25}{3}$ (выс. п/у $\triangle BCM$)

(высота ~~...~~ $\triangle$)

$tg\frac{\varphi}{2} = \frac{OK}{KZ} = \frac{5}{\frac{25}{3}} = \frac{3}{5}$

~~cos~~ Тогда $\varphi = 2arctg\frac{3}{5}$ − это и есть линейный угол двугр угла

Ответ: а) 1800

б) $2arctg\frac{3}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

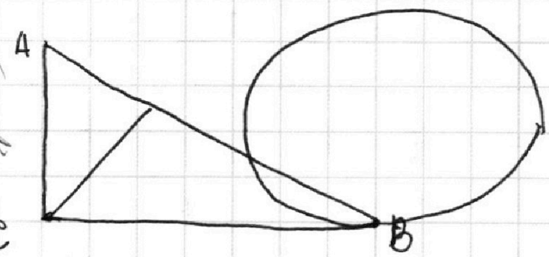
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

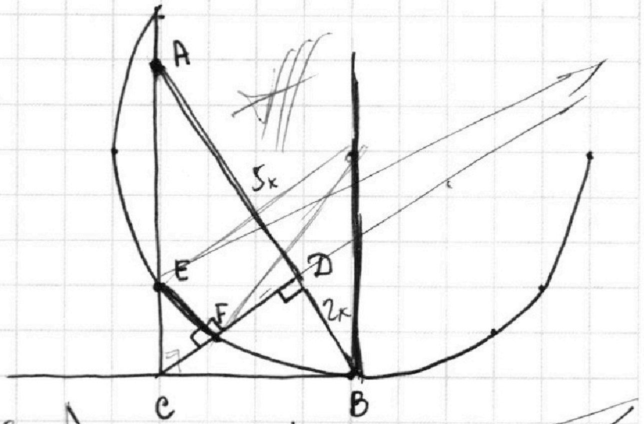
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$14+20+21 = 55$

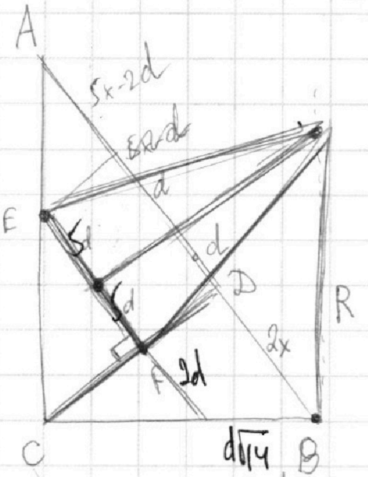




$\frac{45}{2}$

$\frac{24+21}{2} =$

$17+12+5$

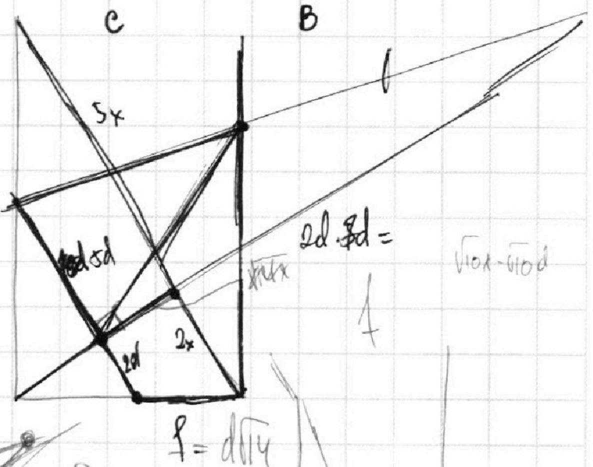


34

$d(x) - ?$

$68/2$

$17+$

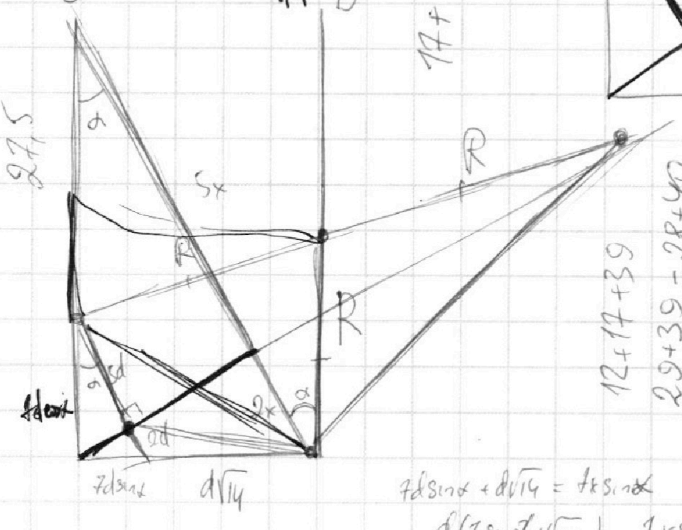


$\sqrt{10x} - \sqrt{10d}$

$4+6+8 = 18$

$7+10+10,5 = 27,5$

$27,5$

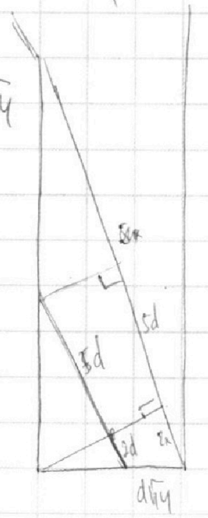


$12+17+39$

$29+39 = 28+40$

68

6



$7d\sin\alpha + d\sqrt{14} = 7x\sin\alpha$

$d(7\sin\alpha + \sqrt{14}) = 7x\sin\alpha$

$ab = k\cdot 2^8\cdot 3^{14}\cdot 5^{12}$

$bc = n\cdot 2^{12}\cdot 3^{30}\cdot 5^{17}$

$ac = m\, 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{39}$

$abc = \sqrt{knm}\ 2$

$\sqrt{knm}\ 2^{4+6+7}\cdot 3^{7+15+\frac{21}{2}}$

$(2x-2d)^2 + (\sqrt{10x} - \sqrt{10}d)^2 = (d\sqrt{14})^2$

$4x^2+4d^2-4dx+10x^2+10d^2-20xd =$
$= 14d^2$

$14x^2 - 24dx = 0$

$ab = 2^8$

$bc = 2^{12}$

$ac = 2^{14}$

$a^2\cdot 2^{12} = 2^8\cdot 2^{14}$

$a^2 = 2^{(4+7-c)2}$

$a = 2^5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ Черновик

$\arcsin t$: $t\in[-1;1]$; $\arcsin \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$\cos x$

$-5\pi \le 10\arcsin(\cos x) \le 5\pi$; $\boxed{-5\pi \le \pi - 2x \le 5\pi}$; $-3\pi \le -2x \le 7\pi$; $x\in[-\frac{7\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$

$\cos x$ 10 $1\le \cos x \le 1$ $\cos x = \sqrt{1-\sin^2}$

$\arcsin(\cos x) + \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2}$; $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$.

$\frac{\pi}{2} - 2x$

$f(x) = \arccos x$; $g(x) = \arcsin x$; $f(x)+g(x) = \frac{\pi}{2}$ если $x\in[0;1]$.

если $x\in(0;1)$, то $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$ $\arcsin x = (a - \arccos x)$

$\arcsin x$ $\sin(\arcsin x) = \sin(a - \arccos x)$;

arc если $\cos x \in[0;1]$, то имеет место равенство $\cos(\arccos x) = \cos(\frac{\pi}{2} - a + \arccos)$

$\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) = \pi - 2x$; $\arccos(\cos x) + \frac{\pi}{2} = 2x$ $\boxed{\arccos x + \frac{\pi}{2} - a = \arccos x +}$

если $x\in(0;\frac{\pi}{2})$: $\arccos x \in -\frac{\pi}{2}$;

$5\pi + \arccos$

$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$-5\pi \le \pi - 2x \le 5\pi$; $-6\pi \le -2x \le 4\pi$; $-2\pi \le x \le 3\pi$

если $2x + 10\arcsin(\cos x) = \pi$ $f(x)$ $\arcsin$

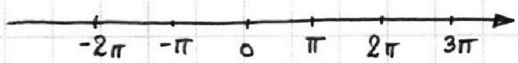
$\arcsin x$ возрастает на

$\cos x$. На каждом $2x + 10\arcsin(\cos x) = \pi$

$f'(x) = 2 + 10\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\sin x =$ $f(x) = 2x + 10\arcsin(\cos x)$

$= 2 + 10\frac{|\sin x|}{\sin x}$ Крит. точки $\sin x = 0$:

Излом произв. $x = \pi n, n\in\mathbb{Z}$



Значения в крит. т.:

f $12\pi - 15\pi =$

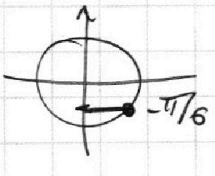
$y = 12\pi$

$y =$ $f(\frac{\pi}{3})$ $y = 12x - 15\pi$ $y = 12x - 15\pi$ $24 - 15 =$
$= 29 - 20 =$
$= 9$.

$y = kx + b$

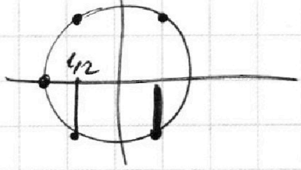
y $-$ $\begin{cases} -3\pi = k\pi + b \\ 9\pi = 2k\pi + b\end{cases}$ $\begin{cases} -3\pi - 9\pi = -k\pi \\ b = -3\pi - k\pi\end{cases}$ $k = 12$ $b = 3\pi - 12 = +5\pi$

$\pi = 12x - 15\pi$; $12 = 16\pi$; $x = \frac{4\pi}{3}$



$\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - x$

$x = \pi - \frac{4\pi}{3} = -\pi/3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3 \\ \log_5^4(y) + 4\log_y 5 = \log_{y^3}0{,}2 - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ x \neq 1/2 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3}\log_5(2x) - 3$$

$ax - 3y + 4b = 0$

$$\log_5^4(y) + \frac{4}{\log_5(y)} = -\frac{1}{3}\log_5 y - 3$$

ОДЗ.
Реш.

$3b^3$

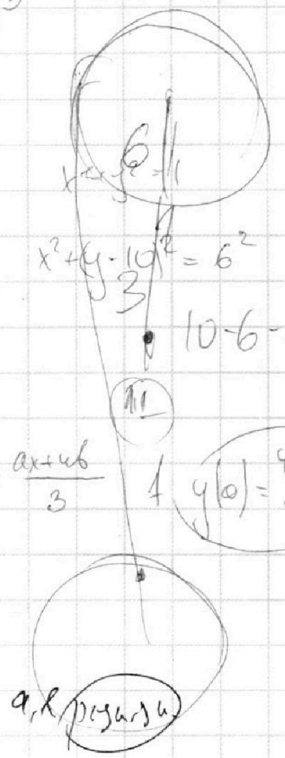
$$\begin{cases} a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3}a - 3 \\ b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3}b - 3 \quad \Big| \cdot 3b \quad 4b^3 + b^2 + 3b \end{cases}$$

$3b$

$3b^5 + 12 = - \quad 3b^5 + 12\cancel{b} + b^2 + 9b = 0$

$3b^5 + b^2 + 9b + 12 = 0$

$-3+1-9+12$ //



$(b^4 - a^4) + \frac{4}{b} \qquad 4+^1$

$y = \frac{ax+4b}{3} \qquad y(0) = \frac{4b}{3}$

$\frac{3}{3} \qquad \frac{4}{3} + \frac{9}{3}$

$$a^4 + b^4 + 6 + \underbrace{\left(\frac{13}{3b} - \frac{13}{3a}\right)}_{<0} = 0$$

$\exists \ a, b$ (рещ.ли)

$\frac{13}{3b} - \frac{13}{3a} < 0$

$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}; \qquad \frac{b-a}{ab} > 0$

$(b-a)((b-a)^2$

$SP =$