МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)\,(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Заметим, что если у какого-то из чисел a, b или c есть простой делитель отличный от 2, 3 и 5, то если мы его уберем, число abc уменьшится, а на делимость чисел ab, bc, ac на числа $2^7 3^{11} 5^{14}$, $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ это не повлияет. Значит мы можем считать, что $a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$ $b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$ $c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$, где $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{N}_0$. Тогда т.к. $ab \vdots 2^7$ $bc \vdots 2^{13}$ и $ac \vdots 2^{14}$: $a_1 + b_1 \geq 7$ $c_1 + b_1 \geq 13$ $a_1 + c_1 \geq 14$, сложив эти три неравенства и поделив на 2 получаем, что $a_1 + b_1 + c_1 \geq 17$, равенство достижимо при $a_1 = 4$ $b_1 = 3$ $c_1 = 10$, значит $abc \vdots 2^{17}$. Действуя аналогично получаем: $a_2 + b_2 \geq 11$; $a_2 + c_2 \geq 17$; $b_2 + c_2 \geq 15$ $\Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 21{,}5$, т.к. a_2, b_2 и $c_2 \in \mathbb{Z}$: $a_2 + b_2 + c_2 \geq 22$, равенство достигается при $a_2 = 6$, $b_2 = 5$, $c_2 = 11 \Rightarrow abc \vdots 3^{22}$

~~$a_3 + b_3 \geq 17$ $b_3 + c_3 \geq 18$ $a_3 + c_3 \geq 43$ $a_3 + b_3 + c_3 \geq 37{,}5 \Rightarrow a+b+c \geq 38$, равенство достигается при $a_3 =$~~ $a_3 + c_3 \geq 43 \Rightarrow b_3 + c_3 + a_3 \geq 43$, равенство достигается при $a_3 = 20$ $c_3 = 23$ $\rightarrow abc \vdots 5^{43}$.

Значит $abc \vdots 2^{17} \cdot 3^{23} \cdot 5^{43}$, т.к $abc \in \mathbb{N}$ наименьшее значение abc равно $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{23} \cdot 5^{43}$

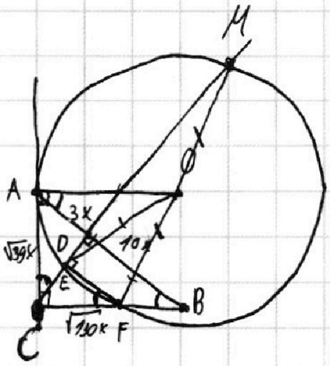
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



т.к. $(CD)\perp(AB)$ и $(EF)\parallel(AB)$: $(CD)\perp(EF)$ и $\angle CEF=90°$

т.к. $(DB)\parallel(EF)$: $\angle ABF=\angle DFC \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CDB$ по двум углам

Пусть O - центр окружности, тогда $(OA)\perp(CA)$, т.к. A - т. касания, а значит $\angle BCA+\angle CAO=180° \Rightarrow (OA)\parallel(CB)$, тогда $\angle OAB=\angle ABC$. ~~Из прямоуголь~~ $\triangle CDA\sim\triangle ACB$ по двум углам. ~~$\angle ACD=180$~~ $\triangle ACB\sim\triangle ADB$ по двум углам.

Если $|AB|=13x$, то $|DB|=\frac{13}{1{,}3}=10x$, а значит $|AD|=13x-\overset{10}{\cancel{3}}x=3x \Rightarrow$

т.к. $[CD]$ - высота прямоугольного Δ-ка, $|CD|=\sqrt{|AD|\cdot|DB|}=\sqrt{30}x$

Из прямоугольных Δ-ков ADC и CDA находим:

$|CB|=\sqrt{30x^2+100x^2}=\sqrt{130}x$ $|AC|=\sqrt{30x^2+9x^2}=\sqrt{39}x$.

Если мы продлим $[CD]$ до пересечения с окружностью в точке M, то $\triangle MEF$ окажется прямоугольным $\Rightarrow [FM]$ - диаметр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$ по определению арккосинуса означает:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{x}{5}\right) = \sin x \\ \left(\frac{3\pi}{10}+\frac{x}{5}\right) \in [0; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sin\left(\frac{8\pi}{10}+\frac{x}{5}\right) = \sin x \\ \left(\frac{3\pi}{2}+x\right) \in [0; 5\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sin\left(\frac{4\pi}{5}+\frac{x}{5}\right) = 0 \\ x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{x+\frac{x}{5}+\frac{4\pi}{5}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-\frac{x}{5}-\frac{4\pi}{5}}{2}\right) = 0 \\ x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{3x}{5}+\frac{2\pi}{5}\right)\cdot\cos\left(\frac{2x}{5}-\frac{2\pi}{5}\right) = 0 \\ x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{3x}{5}+\frac{2\pi}{5}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{2x}{5}-\frac{2\pi}{5}\right) = 0 \end{array}\right. \\ x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{3x}{5}+\frac{2\pi}{5} = \pi n \\ \frac{2x}{5}-\frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{2}+\pi n \end{array}\right. n \in \mathbb{Z} \\ x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x = 5\pi n - 2\pi \\ 2x = 5\pi n + \frac{9\pi}{2} \end{array}\right. n \in \mathbb{Z} \\ x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{5}{3}\pi n - \frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{5}{2}\pi n + \frac{9}{4}\pi \end{array}\right. n \in \mathbb{Z} \\ x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Если $x = \frac{5}{3}\pi n - \frac{2\pi}{3}$:

$-\frac{3\pi}{2} \leqslant \frac{5}{3}\pi n - \frac{2\pi}{3} \leqslant \frac{7\pi}{2}$

$-9\pi \leqslant 10\pi n - 4\pi \leqslant 21\pi$

$0 \leqslant 10n + 7 \leqslant 30$

$-5 \leqslant 10n \leqslant 25$

$-\frac{5}{10} \leqslant n \leqslant \frac{25}{10}$

$n = 0$ или $n = 1$ или $n = 2$ т.к $n \in \mathbb{Z}$

Значит:

$x = -\frac{2\pi}{3}$ или $x = \frac{5\pi}{3}$ или $x = 3\pi$

Если $x = \frac{5}{2}\pi n + \frac{9}{4}\pi$:

$-\frac{3\pi}{2} \leqslant \frac{5}{2}\pi n + \frac{9\pi}{4} \leqslant \frac{7\pi}{2}$

$-3\pi \leqslant 5\pi n + \frac{9}{2}\pi \leqslant 7\pi$

$-7{,}5 \leqslant 5n \leqslant 2{,}5$

$-1{,}5 \leqslant n \leqslant 0{,}5$

$n = -1$ или $n = 0$, т.к. $n \in \mathbb{Z}$

Значит:

$x = \frac{9}{4}\pi$ или $x = -\frac{\pi}{4}$

Ответ: $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

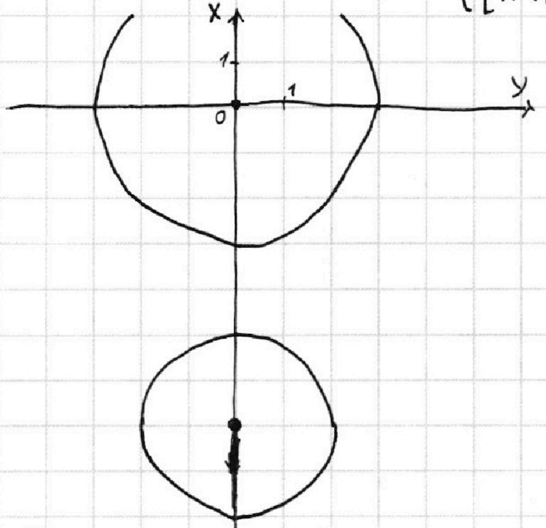
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+14x+49+y^2-4=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3ay+7b \\ \left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=2^2 \\ x^2+y^2=3^2 \end{array}\right. \end{cases}$$



Эта система задаёт две окружности с центрами (0,0) и (0,-7) и радиусами 3 и 2 соответственно, которые прямая $x=-3ay+7b$ для выполнения условия задачи должна пересекать в четырех точках.

Примечание: x сейчас - это ось ординат, а y - абсцисс, поэтому координаты точки задаются, как (y, x)

Для этого расстояние от центра каждой из окружностей до прямой $x+3ay-7b=0$ должно быть меньше их радиусов. Именно тогда прямая пересечет каждую из окружностей в двух точках. Так как расстояние от точки $(x_1;y_1)$ до прямой $A\cdot x+B\cdot y+C=0$ выражается формулой:

$$\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

можем сказать, что:

$$\begin{cases} \dfrac{|1\cdot 0+3a\cdot 0-7b|}{\sqrt{1^2+a^2\cdot 9}} < 3 \\ \dfrac{|1\cdot 0-3a\cdot 7-7b|}{\sqrt{1^2+9a^2}} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |7b| < 3\sqrt{a^2\cdot 9+1} \\ 7|3a+b| < 2\sqrt{9a^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b| < \frac{3}{7}\sqrt{a^2\cdot 9+1} \\ |3a+b| < \frac{2}{7}\sqrt{9a^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 < \dfrac{81a^2+9}{49} \\ 9a^2+6ab+b^2 < \dfrac{36a^2+4}{49} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 49b^2 < 81a^2+9 \\ a^2\cdot 9\cdot 49+6\cdot 49ab+49b^2-36a^2<4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$\Leftrightarrow \begin{cases} b\in \\ 405a^2+294ab+49b^2-4<0 \end{cases}$~~

~~$\Leftrightarrow \begin{cases} b\in\left(-\frac{3}{7}\sqrt{a^2\cdot 9+1};\ \frac{3}{7}\sqrt{a^2\cdot 9+1}\right) \\ \begin{cases} 3a+b<\frac{2}{7}\sqrt{a^2\cdot 9+1} \\ 3a+b>-\frac{2}{7}\sqrt{a^2\cdot 9+1} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow \begin{cases} b\in\left(-\frac{3}{7}\sqrt{a^2\cdot 9+1};\ \frac{3}{7}\sqrt{a^2\cdot 9+1}\right) \\ 3a<\frac{5}{7}\sqrt{a^2\cdot 9+1} \\ 3a>-\frac{5}{7}\sqrt{a^2\cdot 9+1} \end{cases}$~~

~~Т.к. нас интересует число a, для которого существует нужное число b и число b всегда определено от a, условие на b можно отбросить.~~

~~$\begin{cases} 3a<\frac{5}{7}\sqrt{a^2\cdot 9+1} \\ 3a>-\frac{5}{7}\sqrt{a^2\cdot 9+1} \end{cases} \Leftrightarrow 9a^2<\frac{25}{49}\cdot 9a^2+\frac{25}{49} \Leftrightarrow \frac{24}{49}\cdot 9a^2<\frac{25}{49} \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow 216a^2<25 \Leftrightarrow a^2<\frac{25}{216} \Leftrightarrow a\in\left(-\frac{5}{6\sqrt6};\ \frac{5}{6\sqrt6}\right)$~~

$\begin{cases} \frac{|1\cdot 0+3a\cdot 0-7b|}{\sqrt{9a^2+1}}<3 \\ \frac{|1\cdot(-7)+3a\cdot 0-7b|}{\sqrt{9a^2+1}}<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7|b|<3\sqrt{9a^2+1} \\ 7|b+1|<2\sqrt{9a^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow$ ~~$\begin{cases} 49b^2<81a^2+9 \\ 49b^2+98b+49<36a^2+4 \end{cases}$~~

$\Leftrightarrow \begin{cases} b\in\left(-\frac{3}{7}\sqrt{9a^2+1};\ \frac{3}{7}\sqrt{9a^2+1}\right) \\ b+1<\frac{2}{7}\sqrt{9a^2+1} \\ b+1>-\frac{2}{7}\sqrt{9a^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\in\left(-\frac{3}{7}\sqrt{9a^2+1};\ \frac{3}{7}\sqrt{9a^2+1}\right) \\ b<\frac{2}{7}\sqrt{9a^2+1}-1 \\ b>-\frac{2}{7}\sqrt{9a^2+1}-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b\in\left(-\frac{3}{7}\sqrt{9a^2+1};\ \frac{3}{7}\sqrt{9a^2+1}\right) \\ \frac{3}{7}\sqrt{9a^2+1}>-\frac{2}{7}\sqrt{9a^2+1}-1 \\ -\frac{3}{7}\sqrt{9a^2+1}<\frac{2}{7}\sqrt{9a^2+1}-1 \end{cases}$

Т.к. нас интересует число a, для которого существует нужное число b и число b всегда определено от a, условие на b можно отбросить

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит:

$$\begin{cases} \frac{5}{7}\sqrt{9a^2+1} > -1 \\ \frac{5}{7}\sqrt{a^2+1} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{7}\sqrt{a^2+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{25}{49}(a^2+1) > 1 \Leftrightarrow 25a^2 > 24 \Leftrightarrow a^2 > \frac{24}{25} \Leftrightarrow$$

всегда верно т.к. корень неотрицателен

$$\Leftrightarrow a \in (-\infty; -\tfrac{2\sqrt{6}}{5}) \cup (\tfrac{2\sqrt{6}}{5}; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{5}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{5}; +\infty)$

МФТИ

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2} 7^5 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_7^4(6x) - \dfrac{2}{\log_7(6x)} = \dfrac{3}{2}\cdot\log_{6x} 7 - 4 \\ \log_7^4 y + \dfrac{6}{\log_7 y} = \dfrac{5}{2}\log_y 7 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_7^4(6x) - \dfrac{2}{\log_7 6x} = \dfrac{3}{2\log_7(6x)} - 4 \\ \log_7^4(y) + \dfrac{6}{\log_7 y} = \dfrac{5}{2\log_7 y} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_7^5(6x) + 4\log_7(6x) - \frac{7}{2} = 0 \\ 6x \neq 1 \\ y \neq 1 \\ \log_7^5(y) + 4\log_7^5(y) + \frac{7}{2} = 0 \end{cases}$$

Обозначив $\log_7(6x)$ за a, а $\log_7(y)$ за b и сложив первое уравнение с последним, мы получим:

$$a^5 + 4a + b^5 + 4b = 0$$

$$4(a+b) + (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = 0$$

$$(a+b)(4 + \tfrac{1}{2}a^4 + \tfrac{1}{2}a^4 - 2\cdot\tfrac{1}{2}a^2\cdot ab + \tfrac{1}{2}(ab)^2 + \tfrac{1}{2}(ab)^2 - ab\cdot b^2\cdot 2\cdot\tfrac{1}{2} + b^4) = 0$$

$(a+b)(4 + \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{2}(a^2+ab)^2 + \frac{1}{2}(ab+b^2)^2 + \frac{1}{2}b^4) = 0$, заметим, что число $4 + \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{2}(a^2+ab)^2 + \frac{1}{2}(ab+b^2)^2 + \frac{1}{2}b^4$ строго положительно, т.к. является суммой положительного числа 4 и четырех неотрицательных чисел. Значит

$(a+b) = 0 \Leftrightarrow$ ~~a=-b~~ $\log_7(6x) + \log_7 y = 0 \Leftrightarrow \log_7(6xy) = \log_7 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6xy = 1 \Leftrightarrow xy = \frac{1}{6}$

Ответ: $\frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Leftrightarrow \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right), \quad \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \in [0; \pi]$

$\begin{cases} \sin x = -\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{8\pi}{10}\right) \\ x + \frac{3\pi}{2} \in [0; 5\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{8\pi}{10}\right) = 0 \\ x \in \left[\frac{-3\pi}{2}; \frac{4\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{3x}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) \cdot \cos\left(\frac{2x}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) = 0 \\ x \in \left[\frac{-3\pi}{2}; \frac{4\pi}{2}\right] \end{cases}$

$\frac{5\pi}{10}$ $\frac{6\pi}{10}$ $\frac{3\pi}{5}$

$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{|1\cdot 0 + 3a\cdot 0 - 7b|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|7b|}{2} < 3$

$26 + 17$

43

$7|b| < 6$

$\frac{|1\cdot 0 - 21a - 7b|}{\sqrt{1^2+3^2}} =$

$|b| < \frac{6}{7}$

$-\frac{6}{7} < b < \frac{6}{7}$

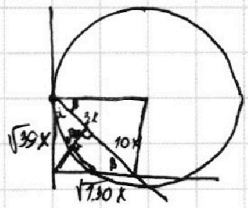
$\frac{\times 36 \atop 6}{216}$

$= \frac{|21a+b|}{2} < 2$

$|21a+b| < 4$

$-4 < 21a + b < 4$

$\frac{5\pi}{10}$



$49 \cdot 9 = 490 - 49 = 441$

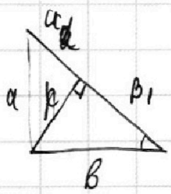
$300 - 6$

294

$\frac{21a}{\sqrt{9a^2+1}}$

$441a^2$

$81a^2 + 9$



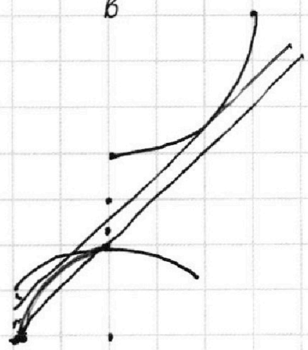
$30x^2 + 9x^2$

$h = b_1 \cdot 9 = \frac{b_1 \cdot a_1}{h}$

$49b^2 < 81a^2 + 9$

$49(9a^2 + 6ab + b^2) < 36a^2 + 4$

$b \in \left(-\frac{3}{7}\sqrt{a^2 \cdot 9 + 1}; \frac{3}{7}\sqrt{a^2 + 9 + 1}\right)$



$3a + b <$

$4,5$

$24 \cdot 9$

$(-7; 0)$

$\frac{10\pi}{4} - \frac{9\pi}{4}$

$\frac{\times 240 \atop 24}{216}$

$(0; 0)$

$4,5\pi$

$2x - 2\pi = 4,5\pi + 5\pi n$

$4,5\pi$

-7

$\frac{4\pi}{10} + \frac{5\pi}{10} = \frac{9\pi}{10}$

$\frac{10\pi}{3} - \frac{2\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5 6 32+43

$a = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5}$

$b = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{b_5}$

$c = 2^{c_2} \cdot 3^{c_3} \cdot 5^{c_5}$

26−17 19 5 11 75

$a^5 + b^5 + 4(a+b) = 0$

$a_2 + b_2 \geq 7$ 26+17

$b_2 + c_2 \geq 13$ 43

$a_2 + c_2 \geq 14$

$2(a_2+b_2+c_2) \geq 34$

$a_2 = 4$

$b_2 = 3$

$c_2 = 10$

$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 6x} - 4$

$\log_7^4(6x) = \frac{7}{2\log_7(6x)} - 4$

$\log_7^4(y) + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4$

$2\sin(x+\frac{\pi}{2}) \cdot \sin(\pi) = 0$

$a^5 + b^5 \,|\, a+b$, $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$

$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 4 = 0$

$\frac{1}{2}(a^4 - a^3b + a^2b^2) + \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{2}a^2b^2$

$(a^2 - ab)^2$

$\arccos(\sin x) = y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos y = \sin x$, $y \in [0;\pi]$

$\begin{cases} \cos(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}) = \sin x \\ (\frac{3\pi}{2}+x) \in [0;\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \\ x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow \cos(\frac{3\pi}{10} + x) - \cos(x - \frac{\pi}{2}) = 0$

$y =$

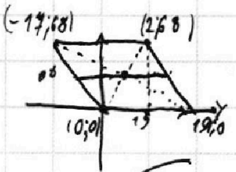
$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \end{cases}$

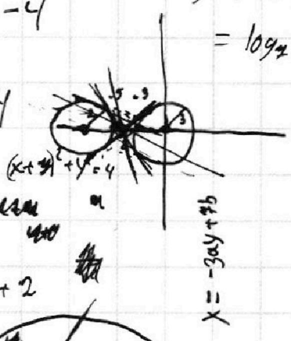
$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{(6x)^2} 7^3 - 4$

$\begin{cases} \log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_7(6x)} - 4 \\ \log_7^4 y + \frac{12}{2\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4 \end{cases}$

$\log_7^4 y \cdot \log_7 y = \log_7 y^{\log_7^4 y + 1} = \frac{7}{2}$

$y^{\log_7^4 + 1} = 7^{\frac{7}{2}}$





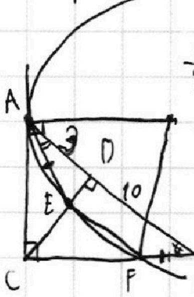
$\log_7^5(6x) + 4\log_7(6x) - \frac{7}{2} = 0$

$\log_7^5(y) + 4\log_7(y) + \frac{7}{2} = 0$ $\frac{1}{32} + 2$

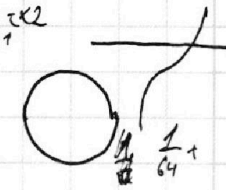
$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$ $\frac{BD+AD}{BD}$

$t^5 + 4t = \frac{7}{2} = 3{,}5$

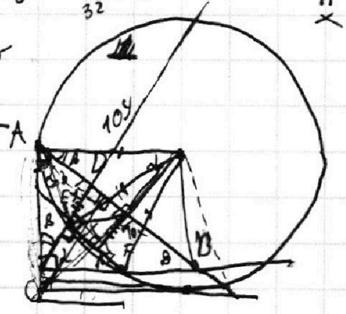
$1 < t < 2$



1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1



$\frac{1}{64}$



$\sin\beta$

$4x_1+y_1$, $4x_2+y_2 = 40+4x_1+y_1$

$\log_7^4(y) + \log_7^5(6x) + 4\log_7(6xy)$