



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



| | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

берем по три 3 выражения, полу-

$$bc: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$\text{чим, то } (abc)^2 = (2^{8+12+14} \cdot 3^{14+20+21} \cdot 5^{12+17+19})^2$$

$$ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$= 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$$

$$2^{8+12+14} \cdot 3^{14+20+21} \cdot 5^{12+17+19} = 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$$

$$\text{значит } (abc)^2 = (2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68})$$

Пусть 3^k - макс. степень, делящая abc , тогда если

$$k \leq 27, k < 28, \text{ то } 3^k \nmid 3^{55} \text{ и } k \leq 27, \text{ то } (3^k)^2 \leq 3^{54},$$

то есть $(abc)^2$ не делится на 3^{55} , значит $k \geq 28$. Остаточ-

ные показатели степени (т.е. двойки и пятерки) четны, поэтому

их можно разделить на 2 (взять кв. корни из обеих

частей выражения) получаем $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$, значит

$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$. Близкое равенство возможно но мы знаем,

что $ac = 5^{39}$, значит $abc = 5^{39}$, и тогда $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$.

Равенство возможно, например, если

$$a = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{19}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^7$$

$$c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{20}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

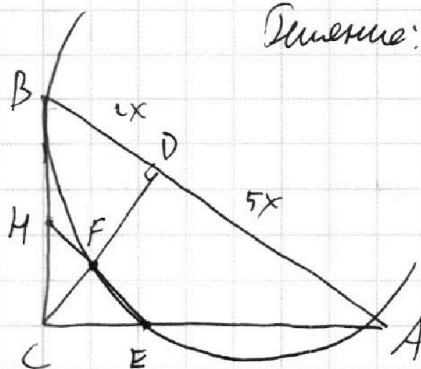


Дано:

$\triangle ABC$ - треугольник
 CD - высота
 AB - медиана

Окр. касается BC в м. B ,
 пересекает CD в м. F ,
 а касается AC в м. E

Решение:



1. Пусть $EF \cap BC = H$.

$AB \parallel EF$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$$

Квадраты:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$$

Обм. $EH \parallel AB$, то CF - высота $\triangle HEC$, - прям.,
 значит $\triangle CHF \sim \triangle HCE$; $\frac{CH}{HF} = \frac{HE}{HC} \Rightarrow CH^2 = HE \cdot HF$

2. BH - касат. к окр. $\Rightarrow BH^2 = BF \cdot HE$ (как отрезки секущих)

3. $BH^2 = HE \cdot HF \Rightarrow BH = CH$; HE - гег. мн. $\triangle ABC \Rightarrow$

$$CH^2 = HE \cdot HF \Rightarrow LE = AE = \frac{1}{2} AC$$

4. Из параллельности $HE \parallel AB$ в $\triangle ABC \sim \triangle CFE \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = k^2 =$

$$= \left(\frac{AB}{CE} \right)^2$$

5. Пусть $BD = 2x$, тогда $AD = 5x$; $CD = \sqrt{BD \cdot AD} = x\sqrt{10}$ (по св-ву чреп. мн.)

Из $\triangle CDA$ по т. Пифагора: $AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{10x^2 + 25x^2} = x\sqrt{35} \Rightarrow$

$$\Rightarrow CE = \frac{AC}{2} = x \frac{\sqrt{35}}{2}$$

$$6. \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \left(\frac{AB}{CE} \right)^2 = \left(\frac{7x}{x \frac{\sqrt{35}}{2}} \right)^2 = \frac{49x^2}{\frac{35x^2}{4}} = \frac{4 \cdot 49}{35} = \frac{4 \cdot 7}{5} = \frac{28}{5}$$

Ответ: $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{28}{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - 2x$$

$$\text{Пусть } \frac{\pi}{2} - x = t.$$

$$10 \arcsin(\sin t) = \pi - 2t$$

Убедимся, что если $t \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$; $n \in \mathbb{Z}$, то

$$\arcsin(\sin t) = t - 2\pi n, \text{ а если } t \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k], \text{ то}$$

$$\arcsin(\sin t) = -t + \pi + 2\pi k. \text{ Заменяем } t \text{ на } t = a -$$

переменную, но $t = a$ - тоже переменная, м.к. $f(t) = 10 \arcsin(\sin t)$ и $g(t) =$

$= \pi - 2t$ - переменные g -им. Поэтому рассмотрим только $t \geq 0$.

$$\text{Если } t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \text{ то } 10t = \pi - 2t$$
$$t = 0$$

$$\text{Если } t \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}], \text{ то } -10t + 10\pi = \pi - 2t$$
$$12t = 9\pi$$
$$t = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Если } t \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}], \text{ то } 10t - 20\pi = \pi - 2t$$
$$12t = 21\pi$$
$$t = \frac{7\pi}{4}$$

$t = \frac{7\pi}{4}$ - не подходит, м.к. не лежит

$$\text{Если } t > \frac{5\pi}{2}, \text{ то } 2t > 5\pi; \text{ а м.к. } \arcsin(\sin t) \leq \frac{\pi}{2}, \text{ то}$$

$$10 \arcsin(\sin t) \leq 5\pi, \text{ значит если } t > \frac{5\pi}{2} \text{ заменим } t \text{ на } t = \frac{5\pi}{2} + \alpha$$

Введем переменную $t = -\frac{5\pi}{6}$ - тоже решение. значит $t = 0$;

$$t = -\frac{5\pi}{6}; t = \frac{5\pi}{6}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Общ. замена: $f = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$$t = \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x = \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3}$$

$$t = -\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x = -\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}$; $x = -\frac{\pi}{3}$; $x = \frac{4\pi}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Подходят все a , кроме $0 \leq a \leq \frac{3\sqrt{57}}{7}$ и $-\frac{3\sqrt{57}}{7} \leq a \leq 0$, т.е.
 ~~$\frac{3\sqrt{57}}{7}$~~ $-\frac{3\sqrt{57}}{7} \leq a \leq \frac{3\sqrt{57}}{7}$. При остальных a требуется b
существовать, значит $a > \frac{3\sqrt{57}}{7}$ или $a < -\frac{3\sqrt{57}}{7}$
Ответ: $(-\infty; -\frac{3\sqrt{57}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{57}}{7}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow ay = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$

График (2) - 2 окружности. Одна с центром $(0; 0)$ и радиусом 1, а другая с центром $(0; 10)$ и радиусом 6.

График (1) - прямая с угл. коэффициентом $\frac{a}{3}$ и свободным членом $\frac{4}{3}b$. Предусмотрим наименьшие условия координат этой прямой, чтоб можно было найти такое b , чтоб эта прямая пересекает обе окружности, каждую в 2 точках. Координат $\frac{4}{3}b$ отвечает только за направление прямой вверх-вниз. По радиусу видно, что достаточно "крутую" прямую можно поднимать так, что необходимые условия будут выполняться. Найдём граничные значения угл. коэфф, при котором при поднятии прямой в момент, когда прямая касается внутренней окружности, она касается и другой.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

т. пересечения касат. оевидно
лежит на OY . Пусть A - центр большой
окр., B и C - т. касания большой и
маленькой окр. соотв. Пусть m, n
мажора, то D лежит на луче BA
 AB ~~и~~ за точкой B и $BD = OC$.

Пуска $OC = BD$; $OC \parallel BD \Rightarrow BDOC$ - паралл.
 $BC \parallel OD$; $\triangle ADO$ - прямоуг.

$$AD = AB + BD = 7 \Rightarrow$$

$$AO = 10 \Rightarrow$$

$\Rightarrow DO = \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{51}$ уло-
вой координ. прямой BC равен
тангенсу $\angle OAB = \alpha$ и к. если т. пере-
сечения касат. обозначим за P ,
и проведем $PQ \parallel OX$, то

$$\angle BPO + \angle APB = 90^\circ, \text{ по т. к.}$$

$$\angle PAB = \angle OAB = \alpha \text{ и } \angle PAB +$$

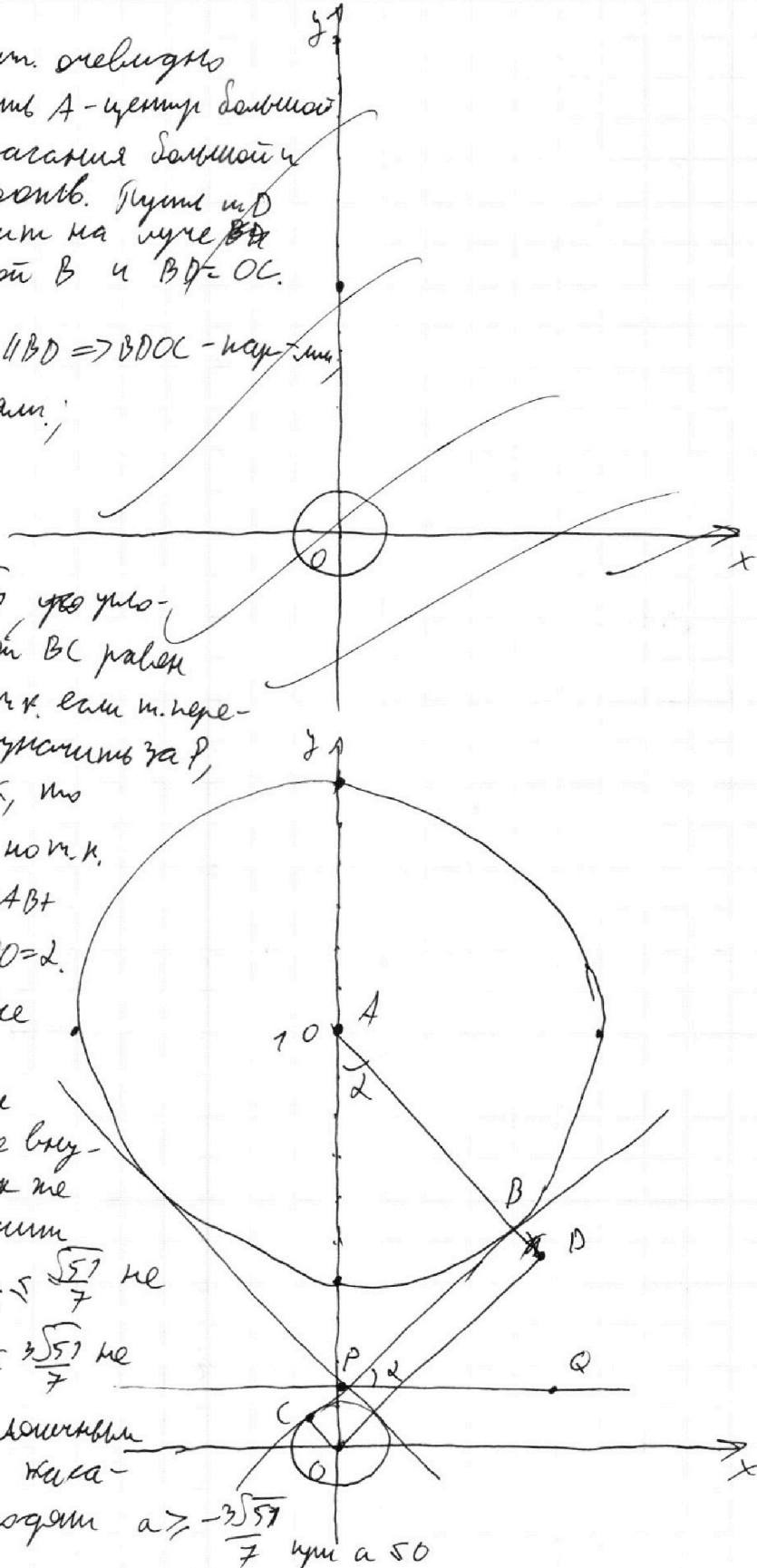
$$\angle APB = 90^\circ, \text{ то } \angle BPO = \alpha.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OD}{AO} = \frac{\sqrt{51}}{7}; \text{ все}$$

прямые, проходящие
через P и лежащие внут-
ри угла BPO так же
не подходят, значит
если $\frac{a}{3} \geq 0$, то $\frac{a}{3} \leq \frac{\sqrt{51}}{7}$ не

подходят, и е $\frac{a}{3} \leq \frac{\sqrt{51}}{7}$ не

подходят. По аналогичным
сооб. для прямой кас-
ательной не подходят $a \geq -\frac{\sqrt{51}}{7}$ или $a \leq 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 625 - 3$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x \neq 1 \\ 2x > 0 \\ 2x^2 > 0 \\ 2x^2 \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{13}{3} \log_{2x} 5 = -3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{13}{3 \log_5(2x)} = -3$$

т.к. $3 \log_5(2x) \neq 0$, умнож. на $2x = 1$, сократим на $\log_5(2x)$:

$$\log_5^5(2x) + 3 \log_5(2x) = \frac{13}{3}$$

$$2) \log_5^4 y + 4 \log_{4y} 5 = \log_{4y} 0,2 - 3$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} y \neq 1 \\ y > 0 \\ 4y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_{4y} 5 = -\frac{1}{3} \log_{4y} 5 - 3$$

$$\log_5^4 y + \frac{13}{3} \log_{4y} 5 = -3$$

$$\text{т.к. } \log_{4y} \log_5^4 y + \frac{13}{3 \log_5 4y} = -3$$

т.к. $3 \log_5 y \neq 0$, умнож. на $y = 1$, сократим на $\log_5 y$:

$$\log_5^5 y + 3 \log_5 y = -\frac{13}{3}$$

Пусть $f(t) = \log_5^5(t) + 3 \log_5 t$. Заменяя, то $f(\frac{1}{t}) =$

$$= \log_5^5(t^{-1}) + 3 \log_5(t^{-1}) = -\log_5^5(t) - 3 \log_5 t = -f(t)$$

Будем $y = f$ -возвр. ф-ия, т.к. $y = \log_5 t$ -возвр. ф-ия. значит

имеем уравнение $f(2x) = -f(y) \Leftrightarrow f(2x) = f(\frac{1}{y})$. т.к.

$$f\text{-возвр. то } f(2x) = f(\frac{1}{y}) \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{y}; \quad \underline{\underline{\text{Ответ: } xy = \frac{1}{2}}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos \angle KTO = \frac{5}{2\sqrt{29}} \Rightarrow \cos \angle KTN = \cos(2\angle KTO) = 2\cos^2 \angle KTO - 1 =$$

$$= 2 \cdot \frac{25}{4 \cdot 29} - 1 = \frac{50}{116} - 1 = \frac{46}{116} - \frac{116}{116} = \frac{25}{58} - 1 = -\frac{33}{58}$$

т.е. $\angle KTN = \angle A(BC)S$, т.к. $KT \perp BC$ и $NT \perp BC$ (как смежные
углы при паралл. прямых).

$$\left. \begin{array}{l} \angle KTN = \angle A(BC)S \\ \angle KTN = \arccos \frac{-33}{58} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A(BC)S = \arccos \frac{-33}{58}$$

Ответ: $\delta) \angle A(BC)S = \arccos \frac{-33}{58}$

a) $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 3600$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$SABC$ - пирамида

AA_1, BB_1, CC_1 - медианы $\triangle ABC$

$AA_1, BB_1, CC_1 = m$

сфера Ω касается AS в L

и тл. ABC в т K ; $K \in AM$

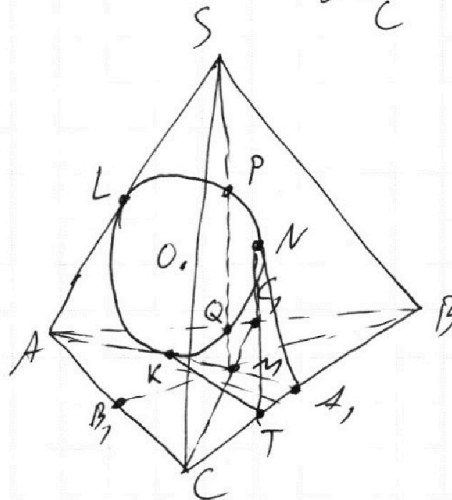
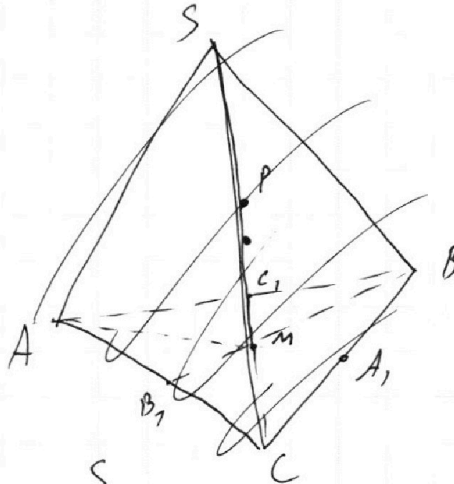
$\Omega \cap SA = \Omega$ пересекает SM

в т. P и Q

$SP = MQ$; $\angle ABC = 100^\circ$

$SA = BC = 16$.

Решение:



Найти:

а) $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$

б) $\angle A(BC)S = ?$

если Ω касается

BCS в т. N ; $SN = 4$;

$R(\Omega) = 5$

$$1. SP = MQ \Rightarrow SQ = MP.$$

$$SL^2 = SP \cdot SQ$$

(как отрезки секущих)

$$MK^2 = MK^2 = MQ \cdot MP$$

$$\Rightarrow KM = SL.$$

$$2. AK = AL \text{ (как отрезки касат.)} \Rightarrow AS = AL + LS = AK + KM = AM = 16.$$

$$KM = SL$$

$$3. \text{По св-ву и. пересечения медиан } MA_1 = \frac{1}{2} AM = 8.$$

$$A_1M = (A_1B_1 = BA_1 = 8) \Rightarrow \triangle BCM - \text{прямоуг. (по теореме Пифагора)}$$

MA_1 - медиана $\triangle BCM$

(по св-ву прямоуг. тр.)

$$4. \triangle BCM - \text{прямоуг.} \Rightarrow BM \cdot MC = BC \cdot h, \text{ где } h - \text{высота из т. } M.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. Пусть H - длина высоты $\triangle ABC$ через m . Тогда по т. Валеса
 $H = 3h$, ~~на~~, но в то же время $H = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{200}{76} = \frac{25}{2}$, значит

$$h = \frac{H}{3} = \frac{25}{6}$$

$$6. MC \cdot MB = h \cdot BC = \frac{25}{6} \cdot 76 = \frac{200}{3} \Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 24 \cdot MC \cdot MB$$

$$AA_1 = \frac{3}{2} AA_1^M = 24$$

$$BB_1 = \frac{3}{2} BB_1^M$$

$$CC_1 = \frac{3}{2} CC_1^M$$

$$= 24 \cdot \frac{3}{2} MC \cdot \frac{3}{2} MB =$$

$$= 216 \cdot 9 \cdot MC \cdot MB = 6 \cdot 9 \cdot \frac{200}{3} =$$

$$= \underline{\underline{3600}}$$

7. Пусть O - центр Ω ,

Тогда поскольку Ω касается AB в т. M и BC в т. N , то
проекции точек M и N на прямую BC совпадают. Будет
это будет точка T , и ~~точка~~ T лежит в одной т. с т. M, N, O .

8. $SN = SL$ (как окружности касаются) $\rightarrow AL = AK = AS - SL = 12$.

9. $KA_1 = \cancel{AK} AA_1 - AK = 12 \Rightarrow K$ - середина AA_1 . Или $KT \perp BC$,
то $KT = \frac{1}{2} H$, где H - высота $\triangle ABC$ из т. A (по т. Валеса).

$$KT = \frac{1}{2} H = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} = \frac{25}{4} = NT \text{ (как окружности касаются)}$$

10. Из $\triangle KOT$ - упр.: $OT = \sqrt{OK^2 + KT^2} = \sqrt{5^2 + \left(\frac{25}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{100}{4} + \frac{625}{4}} =$

$$= \frac{\sqrt{725}}{2} = \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

или тогда из $\triangle KOT$: $\cos \angle KTO =$

$$= \frac{KT}{OT} = \frac{25}{4} \cdot \frac{5\sqrt{29}}{2} = \frac{25 \cdot 2}{4 \cdot 5\sqrt{29}} = \frac{5}{2\sqrt{29}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

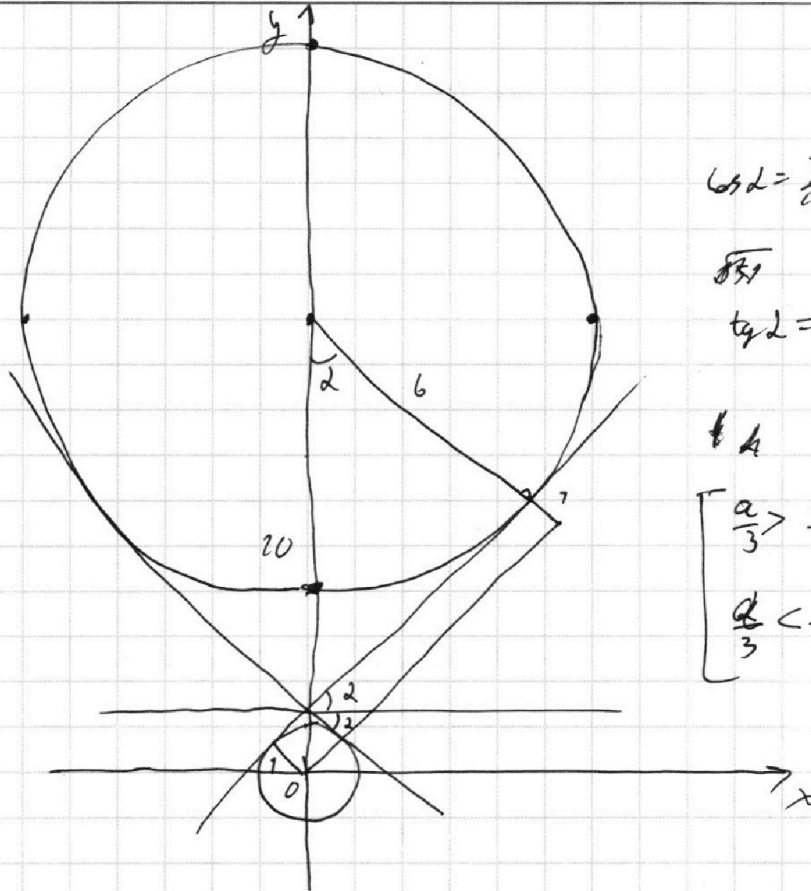
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos 2 = \frac{7}{10}$$

831

$$\tan 2 = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

4

$$\begin{cases} \frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7} \\ \frac{a}{3} < -\frac{\sqrt{51}}{7} \end{cases} \begin{cases} a > \frac{3\sqrt{51}}{7} \\ a < -\frac{3\sqrt{51}}{7} \end{cases}$$

$$a = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{19}$$

$$ab = 2^8 \cdot 3^{24} \cdot 5^{19}$$

$$b = 2^7 \cdot 3^7$$

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{20}$$

$$c = 2^5 \cdot 3^{14} \cdot 5^{20}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{20} \cdot 5^{39}$$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}$$

$$\frac{6252}{5} = \frac{6252 \cdot 4}{20} = \frac{25008}{20} = \frac{6252}{5} = 1250.4$$

$$= 1 - \frac{6252}{512} = 1 - 12.2109375 = -11.2109375$$

$$\frac{2}{6252} = \frac{2}{20 \cdot 312.6} = \frac{1}{10 \cdot 312.6} = \frac{1}{3126} = \frac{1}{2 \cdot 3^2 \cdot 173} = \frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 173} = \frac{1}{3114}$$

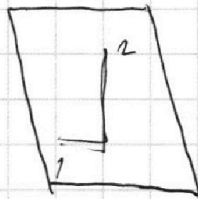
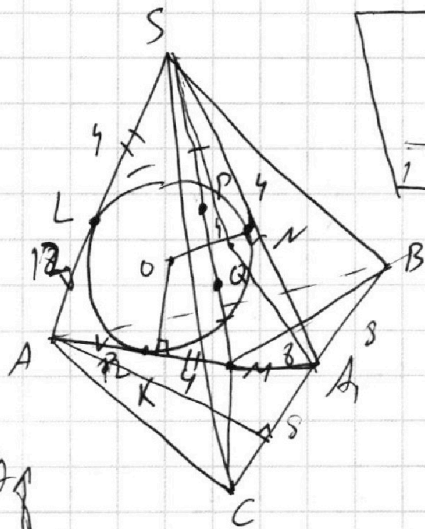
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



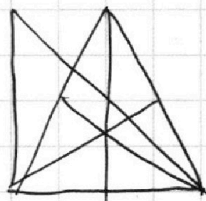
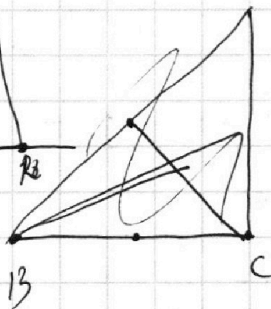
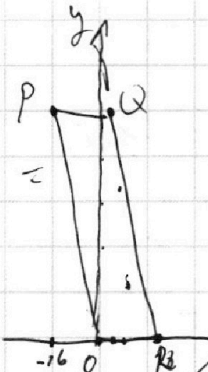
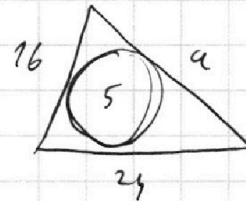
$$S_{ABC} = 100$$

$$9A = BC = 16$$

$$SP \cdot SQ = SL^2 = MP \cdot NQ = KM^2$$

$$m_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$$

$$m_a m_b m_c = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}$$



$$p = 20 + \frac{a}{2}$$

$$S = \sqrt{\left(20 + \frac{a}{2}\right) \left(20 - \frac{a}{2}\right) \left(\frac{a}{2} + 4\right) \left(\frac{a}{2} - 4\right)} =$$

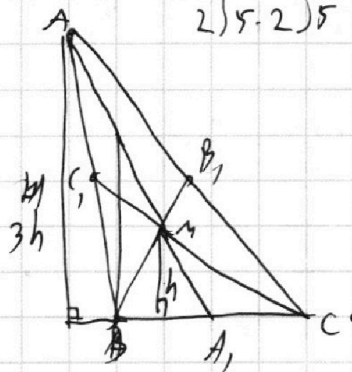
$$m_a m_b m_c = 4 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{13} =$$

$$= 4 \cdot 13$$

$$= \sqrt{\left(400 - \frac{a^2}{4}\right) \left(\frac{a^2}{4} - 16\right)} = \left(20 + \frac{a}{2}\right) \cdot 5$$

$$2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2} = 8$$

$$AM = 16$$



99

$$3h = \frac{100 \cdot 2}{16} = \frac{200}{16} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2} = 12,5$$

$$x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = 459$$

$$h = \frac{25}{6}$$

$$BM \cdot MC = h \cdot BC =$$

$$= \frac{25}{6} \cdot 16 = \frac{200}{3}$$

$$BB_1 \cdot CC_1 = \frac{3}{2} BM \cdot \frac{3}{2} CM = \frac{9}{4} BM \cdot CM = \frac{200}{3} \cdot \frac{9}{4} =$$

$$\left(400 - \frac{a^2}{4}\right) \left(\frac{a^2}{4} - 16\right) = \left(100 + \frac{50a}{2}\right)^2 = 150 \cdot 24 = \dots$$

$$50 \cdot 3 = 150$$

$$150 \cdot 24 = 3600$$

$$700a^2 + 4a^2 - \frac{a^4}{16} - 16 \cdot 400 = 10000 + 500a + \frac{25a^2}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

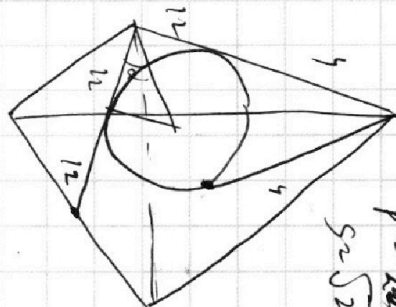


$$\log_5^4(2x) \rightarrow \log_{2x} 5 = \log_{2x} 625 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_5 5 = \log_{2x} 625 - 3$$

$$\log_5^4 2x - 3 \log_{2x} 5 = \frac{1}{3} \log_{2x} 625 - 3$$

$$\frac{1}{3} \log_{2x} 625 = \frac{1}{3} \log_{2x} 5^7 = \frac{7}{3} \log_{2x} 5$$



$16 \cdot 24 = 16 \cdot 24 = 16 \cdot 24$

$p = \frac{28}{28}$
 $5 \sqrt{28 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 4}$

$$\log_5^4 2x - \frac{13}{3} \log_{2x} 5 + 3 = 0$$

$$\log_5^4 2x - \frac{13}{3 \log_5 2x} + 3 = 0$$

$$\log_5^5 2x + 3 \log_5 2x = \frac{13}{3} \quad \text{не}$$

$$f(t) = \log_5^5 t + 3 \log_5 t$$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \log_5^5(t^{-1}) + 3 \log_5 t^{-1} =$$

$$= -\log_5^5 t - 3 \log_5 t = -f(t)$$

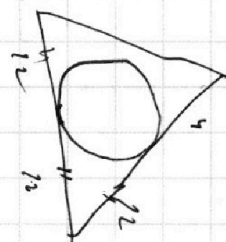
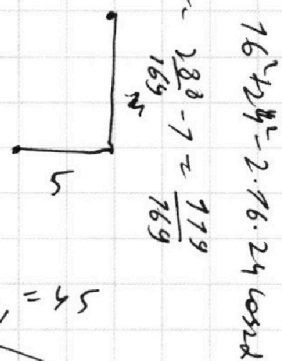
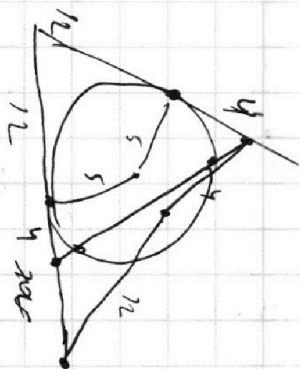
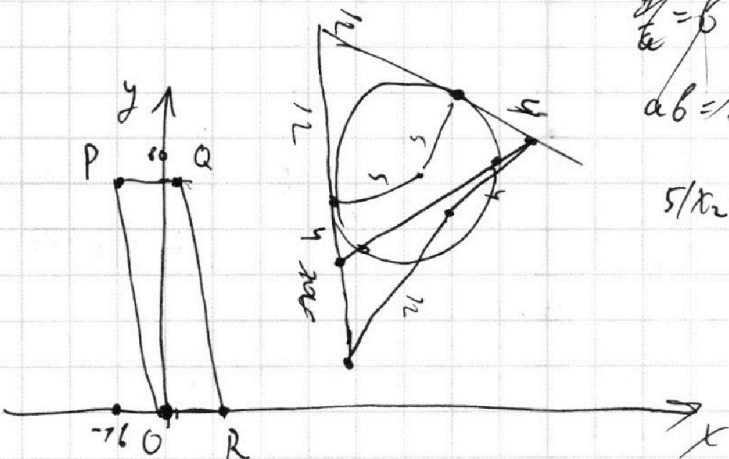
$$f(a) = -f(b)$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = f(b)$$

$$\frac{a}{b} = b$$

$$ab = a^2$$

$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - 3y + 6 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 164) = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + (y - 10)^2 = 36$$

$$y = \frac{ax + 6}{3}$$

$$1) y_1 = \sqrt{1 - x^2}$$

$$y_2 = \sqrt{36 - x^2} + 10$$

$$y_1' = -2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y_2' = -2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{36-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{36-x^2}}$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)x_0 + f'(x_0)x$$

$$\begin{cases} f_1'(x_1) = f_2'(x_2) \end{cases}$$

$$\frac{-x_1}{\sqrt{1-x_1^2}} = \frac{-x_2}{\sqrt{36-x_2^2}}$$

$$\begin{cases} f_1(x_1) - f_1'(x_1)x_1 = f_2 - f_2'(x_2)x_2 \end{cases}$$

$$x = y - \sqrt{2} \quad y^2 - 2\sqrt{2}y + 2 = 1$$

36x

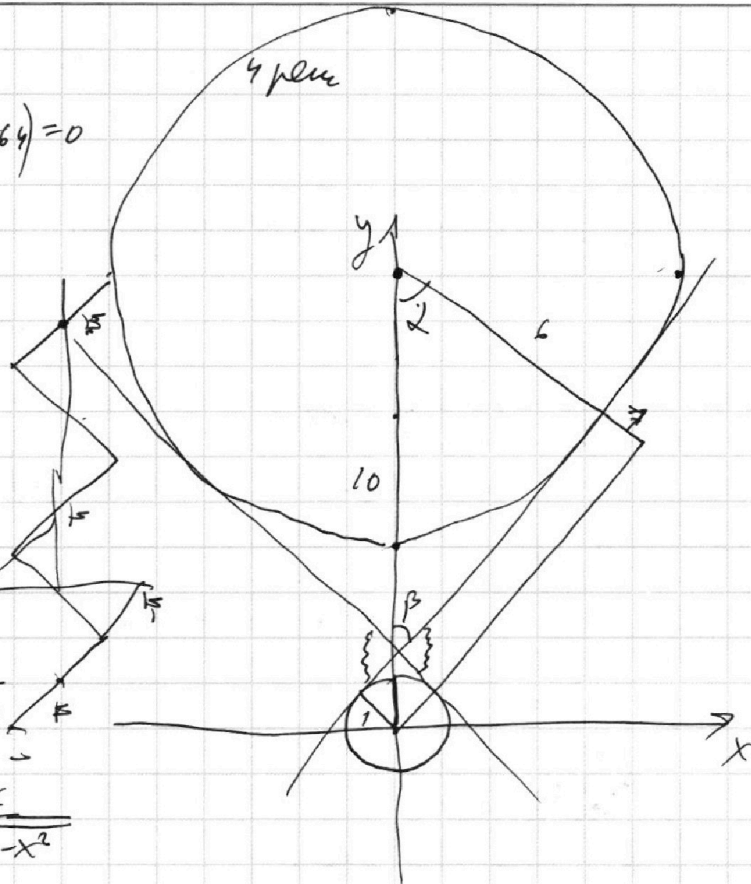
$$x = y - \sqrt{2}$$

$$y^2 - 2\sqrt{2}y + 2 + y^2 - 100 - 20y + 100 = 36$$

$$2y^2 - 20y - 2\sqrt{2}y + 164 = 0$$

$$\cos 2 = \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{7}{10} = \sin 2\beta$$

$$t = \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{51}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

~1

$$bc: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{29}$$

$$abc: 2^{20} \cdot 3^{34} \cdot 5^{39}$$

$$a^2b^2c^2: 2^{8+12+14} \cdot 3^{14+20+21} \cdot 5^{12+17+39}$$

$$a^2b^2c^2: 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$$

$$b^2: 2^6 \cdot 3^{13}$$

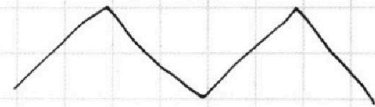
$$a^2b^2c^2: 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$$

$$3^{27} \rightarrow : 3^{59} \quad b: 2^3 \cdot 3^7$$

$$abc: 2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{34}$$

$$2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$

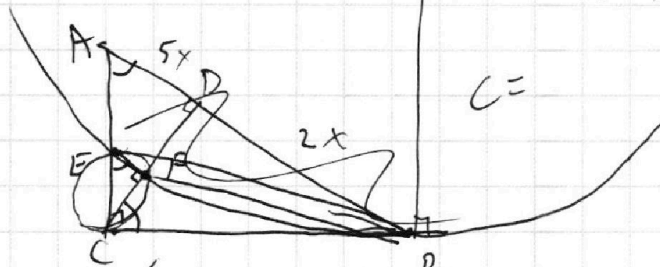
$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2}-x)) =$$



$$b = 2^3 \cdot 3^7$$

$$a = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{19}$$

$$10\sqrt{1-x^2} = \pi - 2x$$



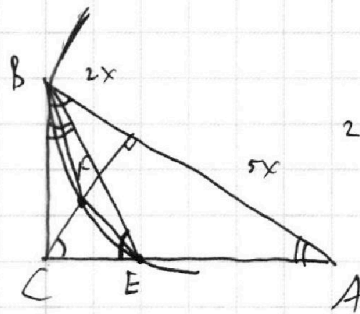
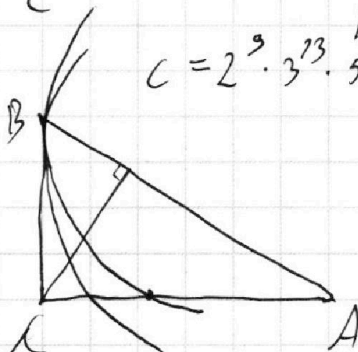
$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$$

$$y = 10\sqrt{1-x^2}$$

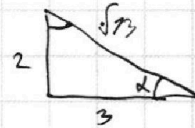
$$y^2 = 100 - 200x^2$$

$$CD = x\sqrt{10}$$

$$c = 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{20}$$



$$\arcsin(\frac{2}{\sqrt{13}})$$



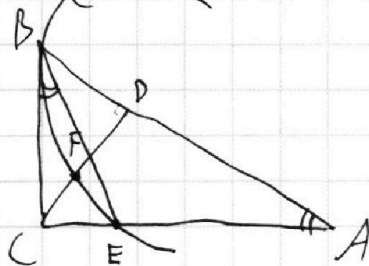
$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$10\sqrt{1-x^2} = \pi - 2x$$

$$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10(\frac{\pi}{2}-x)$$

$$\arcsin(\cos x) =$$



$$100 - 100x^2 = (\pi - 2x)^2$$

$$\pi - 2x \geq 0$$

$$a: 5^{19}$$

$$-100x^2 + 100 = \pi^2 - 4\pi x + 4x^2$$

$$b: 5^{20}$$

$$a =$$