



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1.  $a, b, c \in \mathbb{N}$  пусть  $l, n, k \in \mathbb{N}$  такие, что

$$ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot l \quad bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot k \quad ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \cdot n$$

умножив эти три уравнения получаем  $(abc)^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot l \cdot k \cdot n$

$$abc = 2^{18} \cdot 3^{29} \cdot 5^{26} \cdot \sqrt{3lkn} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{3lkn} \in \mathbb{N}$$

пусть  $\sqrt{3lkn} = m \in \mathbb{N} \quad m \geq 1$

$$3lkn = m^2 \quad lkn = \frac{m^2}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow m : 3$$

~~$m=1: \frac{m^2}{3} = \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$   $m=2: \frac{m^2}{3} = \frac{4}{3} \notin \mathbb{N}$   $m=3: \frac{m^2}{3} = \frac{9}{3} = 3 \in \mathbb{N}$~~

~~$\Rightarrow$  наименьшее  $m=3$ , тогда  $abc \in \mathbb{N}$ ,~~

~~$abc = 2^{18} \cdot 3^{29} \cdot 5^{26} \cdot 3 = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$~~

примечание:  $a =$  ! при том ~~гда~~ заметим, что  $lk$  должно <sup>хотя бы</sup> делиться на  $5^4$ ,  
 $b =$   
 $c =$  т.к.  ~~$ab \cdot b \cdot c = b^2 \cdot ac =$~~

пусть  $x_a, x_b, x_c$  - степени, в которых число 5 входит в  $a, b$  и  $c$  соответственно.  $x_k = b_k, x_l = b_l$

должно выполняться: 
$$\begin{cases} x_a + x_b = 11 + x_c \\ x_a + x_c = 28 \\ x_b + x_c = 13 + x_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_b + 28 + x_c = 24 + x_l + x_k \\ \Rightarrow x_l + x_k \geq 4 \end{cases}$$
 г.к.  $x_b \geq 0$ ,

то есть итого  $lkn$  делится на  $3 \cdot 5^4$ , ~~минимальное  $m$~~   
 $\Rightarrow m$  не меньше  ~~$3 \cdot 5^4$~~

$$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{29} \cdot 5^{26} \cdot \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 5^4} = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

пример:  $b_l = 2^2 \cdot 3^4$   $ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$   
 $a_k = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{11}$   $bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot 5^4$   
 $c_k = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{17}$   $ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \cdot 3$

Ответ:  $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

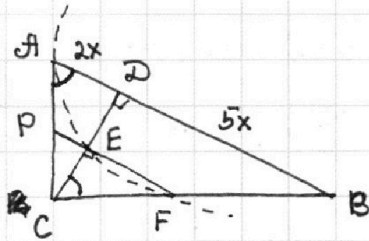
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



задача 2.



$$\frac{AB}{BD} = 1,4 = \frac{7}{5} \quad AB = 7x : BD = 5x, AD = 2x$$

$\angle BAC = \angle DCB$  т.к.  $CD$  - высота пр.  $\Delta$

$\angle CEF = \angle EDB = 90^\circ$  из  $AD \parallel EF$

$\Rightarrow \Delta ACD \sim \Delta CFE$  по 2-м равным углам.

~~$k = \frac{AC}{CF} = \frac{EF}{CD}$~~  т.к.  ~~$CA$  - касательная к окружности, а  $CP$  - секущая~~  
пусть  $x=1$  (для отнесения не важно)

пусть  $FE \cap AC = P$

т.к.  $AP$  - касательная, а  $PF$  - секущая

$$AP^2 = PE \cdot PF$$

$$\frac{PE}{AD} = \frac{CP}{AC}$$

$$\frac{PF}{AB} = \frac{CP}{AC}$$

из  $PF \parallel AB$

$$AP^2 = \frac{AD \cdot CP}{AC} \cdot \frac{AB \cdot CP}{AC} = \frac{AD \cdot AB}{AC^2} \cdot CP^2 \Rightarrow \left(\frac{AP}{PC}\right)^2 = \frac{AD \cdot AB}{AC^2}$$

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = x\sqrt{10} \Rightarrow AC = x\sqrt{14} \text{ по т. Пифагора}$$

или высота в произв.  $\Delta$

$$\Rightarrow \left(\frac{AP}{PC}\right)^2 = \frac{2x \cdot 7x}{(x\sqrt{14})^2} = \frac{14x^2}{14x^2} = 1 \Rightarrow AP = PC$$

~~$BC = x\sqrt{35}$~~   
 ~~$x=1$~~

$$\frac{AP}{PC} = \frac{EF}{CD} \Rightarrow EF = \frac{1}{2} DB = \frac{5x}{2} \quad k = \frac{EF}{CD} = \frac{\frac{5x}{2}}{x\sqrt{10}} = \frac{5}{2\sqrt{10}}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{1}{k^2} = \left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2 = \frac{40}{25} = 1,6$$

Ответ:  $\boxed{1,6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



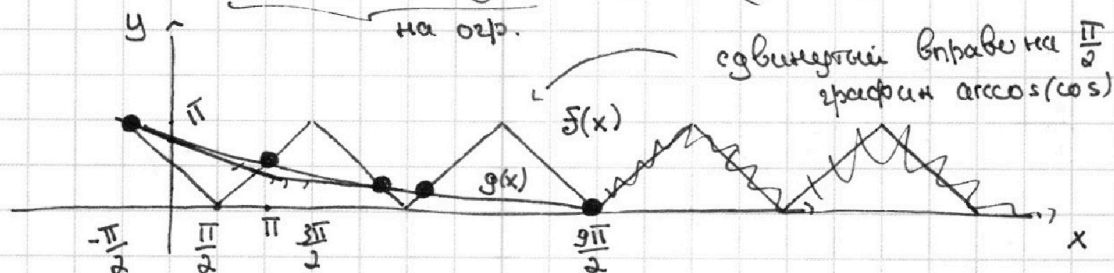
Задача 3.

$$\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$0 \leq \arccos t \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \frac{9\pi - 2x}{10} \leq \pi \quad \frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \quad g(x) = \frac{9\pi - 2x}{10} \quad g(0) = \frac{9\pi}{10}$$



графически видим все решения:

$$-\frac{\pi}{2} + x = \frac{9\pi - 2x}{10} \quad -5\pi + 10x = 9\pi - 2x \quad 12x = 14\pi \quad x = \frac{7\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{2} - x = \frac{9\pi - 2x}{10} \quad 25\pi - 10x = 9\pi - 2x \quad 8x = 16\pi \quad x = 2\pi$$

$$-\frac{5\pi}{2} + x = \frac{9\pi - 2x}{10} \quad 12x = 34\pi \quad x = \frac{17\pi}{6} \quad + \quad x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{9\pi}{2}$$

Ответ:  ~~$\frac{\pi}{2}$~~ ,  $-\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{7\pi}{6}$ ,  $2\pi$ ,  $\frac{17\pi}{6}$ ,  $\frac{9\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

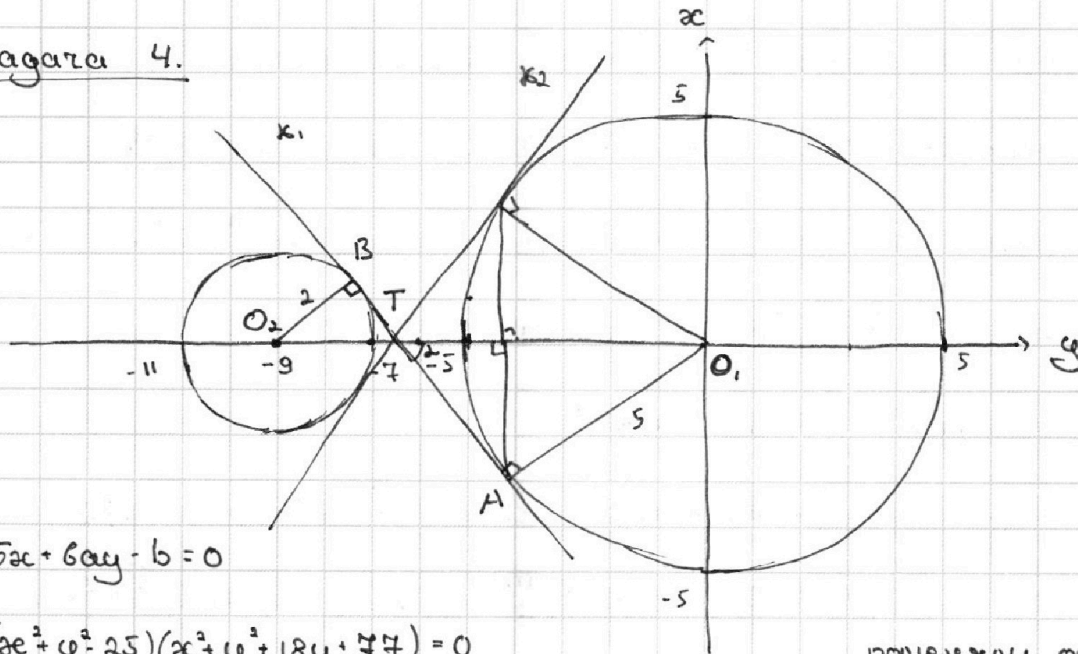
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4.



$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

поменяли оси местами!

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 & \text{уравнение окружности с } R=5 \text{ и центром в } (0;0) \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 & \text{уравнение окружности с } R=2 \text{ и центром в } (-9;0) \\ x = \frac{b}{5} - \frac{6a}{5}y & \text{параметрическое уравнение прямой} \\ l = \frac{b}{5} \cdot k & \end{cases}$$

$x = l - ky$  нужно найти такие наклоны  $k$ , при которых есть  $l$  такое, что прямая пересекает обе окружности (не касается)

Графически: подходит все  $k$ , кроме тех, что находятся между наклонами двух отмеченных прямых (на графике - общие внутр. касательные)

$$k_1 = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{O_2T}{TO_1} = \frac{O_2B}{O_1A} = \frac{2}{5} \Rightarrow O_1T = \frac{9 \cdot 5}{7} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{O_1A}{O_1T} = \frac{5}{\frac{9 \cdot 5}{7}} = \frac{7}{9}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{1 - \sin^2 \alpha} \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{1 - (\frac{7}{9})^2} = \frac{9}{16} \cdot \frac{9}{2}$$

находим эквивалентности  $k_2 = \frac{7\sqrt{2}}{8}$  и  $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{81 - 32}{32} = \frac{49}{32} \quad k_1 = -\frac{7\sqrt{2}}{8}$

$\Rightarrow$  ~~не~~ подходит  $-\frac{7\sqrt{2}}{8} \leq \frac{6a}{5} \leq \frac{7\sqrt{2}}{8} \quad -\frac{35\sqrt{2}}{48} \leq a \leq \frac{35\sqrt{2}}{48}$

Ответ:  $[-\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48}]$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

задача 5.

пусть  $\log_{11} x = t$ , тогда  $\log_x 11 = \frac{1}{t}$ ,  $\log_{x^3} \frac{1}{121} = -\frac{2}{3} \log_x 11 = -\frac{2}{3t}$

а  $\log_{11} 0,5y = s$ , тогда  $\log_{0,5y} 11 = \frac{1}{s}$ ,  $\log_{0,125y^3} (11^{-13}) = -\frac{13}{3s}$

$$t^4 + \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t} - 5 \quad t^4 + 5 = \frac{16}{3t} \quad (1) \quad \text{так } t \neq 0$$

$$s^4 + \frac{1}{s} = -\frac{13}{3s} - 5 \quad s^4 + 5 = -\frac{16}{3s} \quad (2) \quad \text{заметьте, что } s = -t \text{ - корни (2) если } t \text{ - корень (1)}$$

~~так как  $s = -t$  - корни (2) если  $t$  - корень (1)~~  
~~правда так же до~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

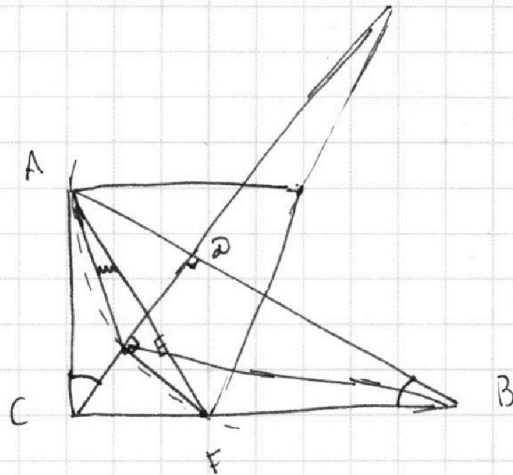
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CF}{AC} = \frac{CE}{AB} = \frac{EF}{CD}$$

$$\sqrt{10}$$

$$\frac{CF}{AC} = ?$$

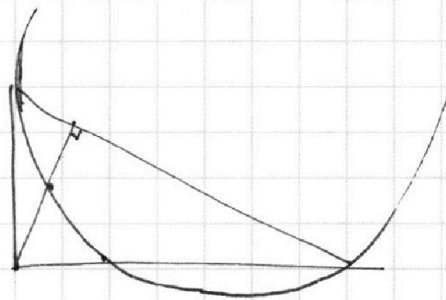
$$\frac{PF}{AB} = \frac{CP}{AC}$$

$$\frac{PE}{AB} =$$

$$PF = \frac{AB \cdot CP}{AC}$$

$$PE = \frac{AD \cdot PC}{AC}$$

$$\frac{AB \cdot AD \cdot PC^2}{AC^2} = AP^2$$



$$\frac{AP}{PC}$$

$$\sqrt{10}$$

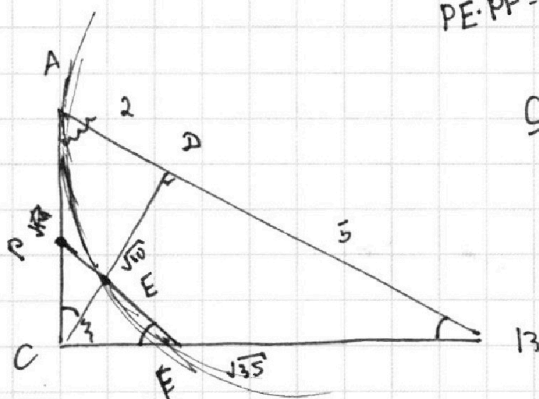
$$PE \cdot PF = AP^2$$

$$\frac{4 \cdot 10}{25} = \frac{40}{25}$$

$$\frac{CF}{AC}$$

$$\frac{8}{5}$$

$$\sqrt{6}$$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ x^2 + (y+9)^2 &= 4 \end{aligned}$$

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

$$x = \frac{b}{5} - \frac{6a}{5}y$$

$$x = c - dy$$

наклоны линий.

$$kx + b = y$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4 \quad y = kx + b \quad \operatorname{tg} \alpha = 1$$

$$x^2 + (kx + b)^2 = 4$$

$$y'x =$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$y = kx + b$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$

$$x^2 + (kx + b)^2 = 25$$

$$3k + b = 4$$

$$b = 4 - 3k$$

$$x^2 + (kx_2 + b + 9)^2 = 4$$

$$x^2 + (k(x_2 + 3) + 13)^2 = 4$$

$$= 2$$

$$3k + 13 = 2$$

$$k = -5$$

$$b =$$

$$\frac{81 - 32}{32}$$

$$49$$

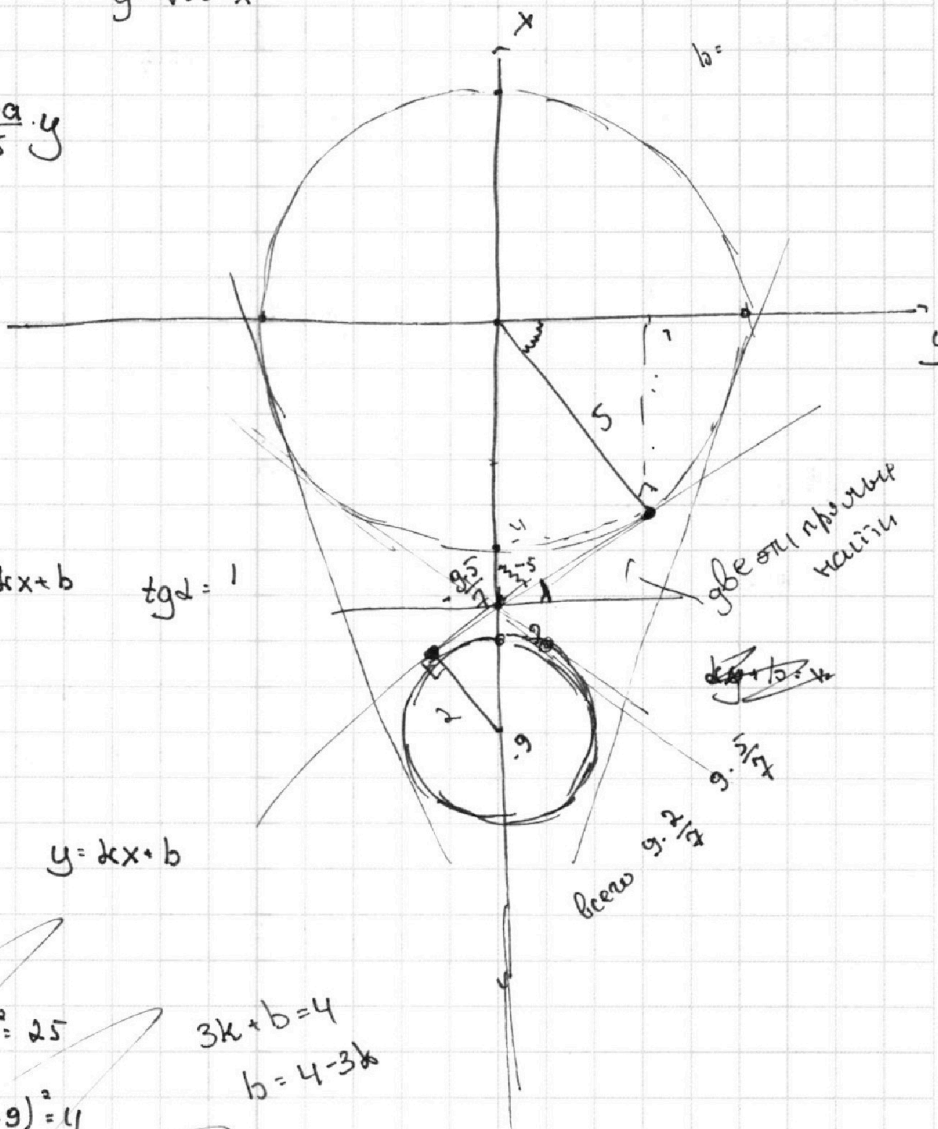
$$\frac{49 \cdot 2}{64}$$

$$\frac{7}{8}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \frac{7}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\frac{16}{9}$$



где они пересекаются  
 $kx + b = y$   
 $\operatorname{tg} \alpha = 1$   
 всего 9. 2/14

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab = \dots \cdot 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot k$   
 $bc = \dots \cdot l$   
 $ac = \dots \cdot m$   
 $(abc)^2 = k \cdot l \cdot m \cdot 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$   
 $abc = 2^{18} \cdot 3^{29} \cdot 5^{26} \cdot \sqrt{3klm} \in \mathbb{N}$   
 $\Rightarrow \sqrt{3klm} \in \mathbb{N}$   
 $ac = \dots = 3$

$\frac{bc}{ab} = \dots$

$a = 2$   
 $b = 2$   
 $c = 2$

$x+y=6$   
 $x+z=14$   
 $z+y=16$

$x=2, y=4, z=12$

$x+y=13$   
 $x+z=21$   
 $z+y=26$

$x=4, y=9, z=17$

$x+y=11$   
 $x+z=13$

$x=0$   
 $y=11$   
 $z=13$

$b = 2^2 \cdot 3^4$   
 $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{11}$   
 $c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{4+13}$

$AB = EF \cdot \frac{1}{4} \cdot (y+z) = 28$

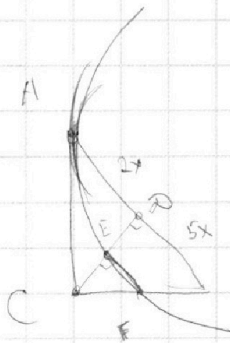
$\frac{AB}{BC} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

$B = 50$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = ?$

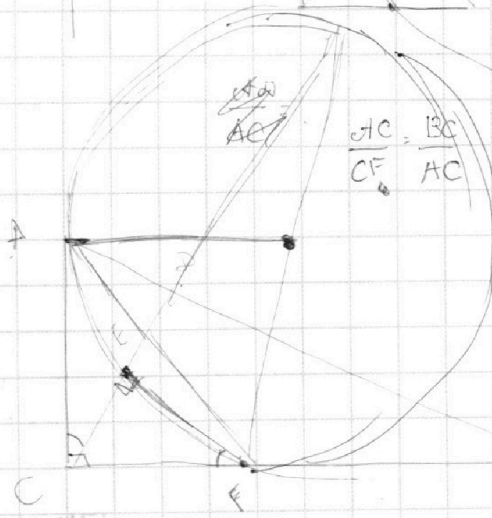
$AC^2 = CB \cdot CF = AB^2 - BC^2$   
 $CB(CF + BC) = AB^2$

$\frac{AC}{CF} = \frac{BC}{AB}$

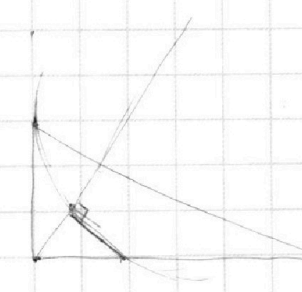


$\frac{CE}{AD} = \frac{CF}{AC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$

$\frac{11+17+28}{2} =$   
 $= 28$



$\frac{AC}{CF} = \frac{BC}{AC}$



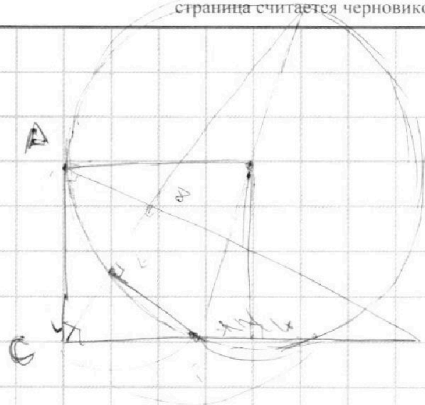
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



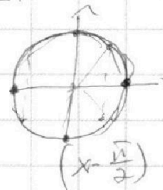
$$AC^2 = (AC-x)(AC+x)$$

$$0 \leq \frac{9\pi - 2x}{10} \leq \frac{4\pi}{\pi}$$

$$x \leq \frac{9\pi}{2} \quad 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$2x \geq -\pi$$

$$\frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$$

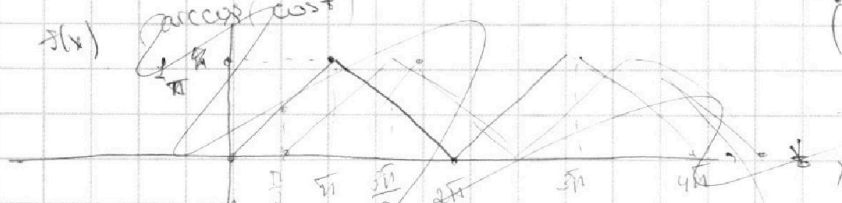


cos

$\arccos(\sin x)$

$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2}-x))$

$\arccos(\cos x)$



$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2}-x))$

$x \leq -\pi$

$f(x)$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

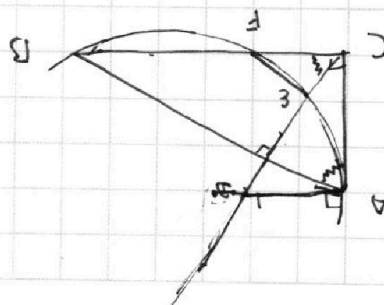
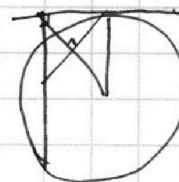
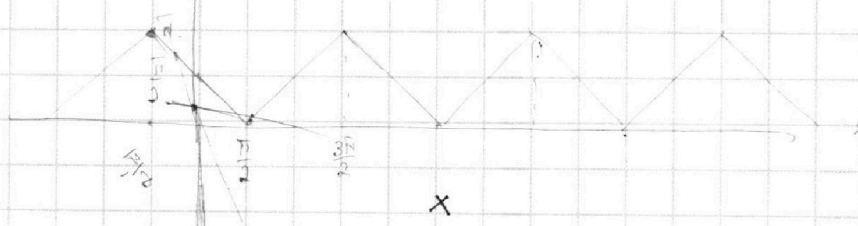
$$-4\pi = 8x$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}$$

$$g(x) = 0$$

$x =$



$$\frac{CF}{AC} = \frac{CF}{BC} = \frac{CF}{AB}$$

A