



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



$$\begin{array}{l} \boxed{ab:k} \\ a+b:k \end{array}$$

$$a:k \text{ либо } b:k$$

если $k \neq 2$, то

$$\begin{cases} a:b \Rightarrow b:k \\ b:k \Rightarrow a:k \end{cases}$$

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc . *04.11*

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

если

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$(a,b)=1 \quad a+b:8$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

$$\begin{array}{l} (b-k)^2 = kb \\ 8ab = k(a+b) \\ k:a \quad k:b \quad 8ab:a+b \quad 8ab=k(a+b) \\ k \geq ab \quad k = \frac{8ab}{a+b} \geq ab \quad 8ab = ka + kb \\ 8ab = k(a+b) \end{array}$$

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC:CB=7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно. *04.11*

4. [5 баллов] Решите уравнение $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$. *04.11*

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$. *04.11*

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдется значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

$$2x_1 + y_1 \in [20; 30], \text{ с учетом } \dots$$

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2. *04.11*

$$O - \Gamma_5 = (O - \Gamma_5) \cdot \dots$$

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

Представим $a = 2^{a_2} \cdot 7^{a_7} \cdot p_a$

$b = 2^{b_2} \cdot 7^{b_7} \cdot p_b$ где p_a, p_b, p_c не делятся

$c = 2^{c_2} \cdot 7^{c_7} \cdot p_c$ на 2 и на 7.

Тогда 1) $ab = 2^{a_2+b_2} \cdot 7^{a_7+b_7} \cdot p_a \cdot p_b \div 2^{14} \cdot 7^{10}$

Значит $\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 14 \\ a_7 + b_7 \geq 10 \end{cases}$

2) $bc = 2^{b_2+c_2} \cdot 7^{b_7+c_7} \cdot p_b \cdot p_c \div 2^{17} \cdot 7^{17}$

Значит $\begin{cases} b_2 + c_2 \geq 17 \\ b_7 + c_7 \geq 17 \end{cases}$

3) $ac = 2^{a_2+c_2} \cdot 7^{a_7+c_7} \cdot p_a \cdot p_c \div 2^{20} \cdot 7^{37}$

Значит $\begin{cases} a_2 + c_2 \geq 20 \\ a_7 + c_7 \geq 37 \end{cases}$

Нам нужно минимизировать $abc = 2^{a_2+b_2+c_2} \cdot 7^{a_7+b_7+c_7} \cdot p_a \cdot p_b \cdot p_c$

Т.к. $p_a, p_b, p_c \in \mathbb{N}$, то $p_a = p_b = p_c = 1$ при минимальном abc

Чтобы идти дальше на $a_2 + b_2 + c_2$ сложим нерав.

$\begin{cases} 2a_2 + 2b_2 + 2c_2 \geq 51 \\ 2a_7 + 2b_7 + 2c_7 \geq 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 25.5, \text{ т.к. } a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{Z}, \text{ то} \\ a_7 + b_7 + c_7 \geq 32 \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 26 \\ a_7 + b_7 + c_7 \geq 32 \\ a_7 + c_7 \geq 37 \end{cases} \quad \text{Т.К. } a_2, b_2, c_2 \geq 0 \quad \text{оценка}$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 26 \\ a_7 + b_7 + c_7 \geq 37 \end{cases} \quad \text{оценка}$$

Пример: $a_2 = 8$ $a_7 = 19$
 $c_2 = 12$ $b_7 = 0$
 $b_2 = 6$ $c_7 = 18$

Проверим: $a \cdot b = 2^{6+8} \cdot 7^{13+0} = 2^{14} \cdot 7^{10}$ - верно
 $b \cdot c = 2^{6+12} \cdot 7^{0+18} = 2^{18} \cdot 7^{18}$ - верно
 $a \cdot c = 2^{8+12} \cdot 7^{13+18} = 2^{20} \cdot 7^{31}$ - верно

~~Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$~~

Итак: минимальный $abc = 2^{a_2+b_2+c_2} \cdot 7^{a_7+b_7+c_7} = 2^{26} \cdot 7^{37}$

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

Если $\frac{a}{b}$ - несократима, то a и b - взаимнопросты.

Пусть m - наибольшее число, при котором mn достигли результата; ~~разделим~~ разделим m на простые ~~множители~~ ^{делители}, пусть p - наибольший простой делитель, неравный двум, тогда.

$$\begin{cases} a+b \div p, \\ a^2 - 6ab + b^2 \div p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b \div p \\ (a+b)^2 - 8ab \div p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b \div p \\ 8ab \div p \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b \div p \quad (2) \\ 2^3 ab \div p \quad (4) \end{cases}$$

(1) Т.к. $p \neq 2$ и p - простое, то

$$\begin{cases} a \div p \\ b \div p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \div p \\ a \div p \end{cases} \text{ из (2) } \begin{cases} b \div p \\ a \div p \end{cases} \text{, если } a \div p, \text{ то } b \div p \text{ и наоборот, что является тривиальным утверждением.}$$

Значит число m вида $m = 2^d$

1) ~~оба~~ ^{a и b} ~~нечетные~~ : такого не может, т.к. они не будут взаимнопростыми

2) a - четное, b - нечетное $\Rightarrow a+b$ - нечетное $\Rightarrow \frac{m}{p_{\max}} = 1$
и наоборот

3) ~~и~~ a и b нечетные, тогда a и m - взаимнопросты $\Rightarrow 8 \div m$
 b и m - взаимнопросты
Тогда $2^3 \cdot a \cdot b \div 8m$ при $m_{\max} = 8$, где $d \leq 3$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

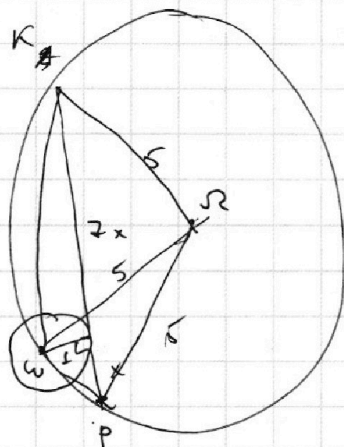
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



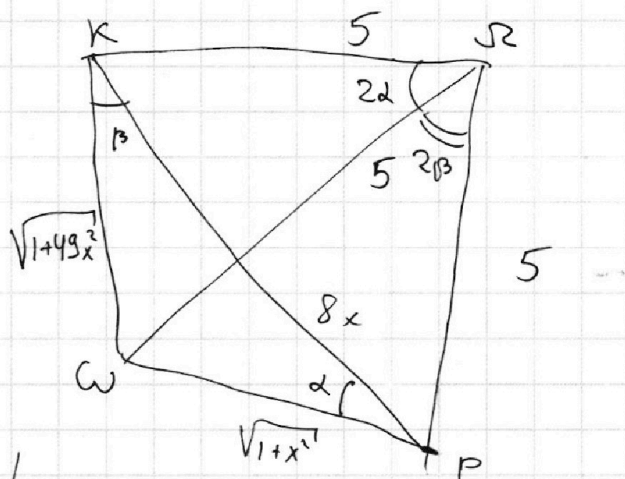
N3



$$\omega P = \sqrt{1+x^2}$$

$$\omega K = \sqrt{1+(7x)^2} = \sqrt{1+49x^2}$$

Решаем систему:



Теор. кос. $\triangle KRP$

$$1+x^2 = 64x^2 + 1+49x^2 -$$

$$- 16x\sqrt{1+49x^2} \cdot \frac{\sqrt{99-x^2}}{10} \cos \beta$$

$$1+x^2 = 16x\sqrt{1+49x^2} \cos \beta$$

$$1+x^2 = \sqrt{1+49x^2} \cdot \cos \beta$$

$$\frac{49x^2}{1+49x^2} = \frac{99-x^2}{100}$$

$$4900x^2 = 99 + 49 \cdot 99x^2 - 99 - x^2 \text{ т.к. } x > 0$$

$$50x^2 + 49x^4 = 99 \Rightarrow x=1 \Rightarrow AB=8x=8 \text{ Ответ: } 8$$

Теор. кос. $\triangle KRP$

$$1+x^2 = 25-2-25 \cdot 2 \cdot \cos 2\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{49-x^2}{50} = 2\cos^2 \beta - 1 \Rightarrow$$

$$\cos 2\beta = \cos 2\beta = \frac{99-x^2}{100}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \beta = \frac{99-x^2}{100}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

Пусть $\sqrt{a} = \sqrt{2x^2-5x+3}$

$$a = 2x^2 - 5x + 3$$

$$\sqrt{b} = \sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$b = 2x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow a - b = 2 - 7x$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 & (1) \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \sqrt{a} = \sqrt{b}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1}, \text{ при } 2x^2+2x+1 \geq 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$x = \frac{2}{7}$$

подставляем для проверки

$$\sqrt{2\left(\frac{2}{7}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3} = \sqrt{\frac{8}{49} - \frac{70}{49} + \frac{147}{49}} = \sqrt{\frac{85}{49}} = \frac{\sqrt{85}}{7}$$

$$\sqrt{2\left(\frac{2}{7}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1} = \sqrt{\frac{8}{49} + \frac{28}{49} + \frac{49}{49}} = \sqrt{\frac{85}{49}} = \frac{\sqrt{85}}{7}$$

$x = \frac{2}{7}$ - решение.

$$(2) \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{b} \text{ наименьшее } b \text{ min}$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$\sqrt{a} = 1 - \sqrt{b} \Rightarrow a = 1 - 2\sqrt{b} + b, \text{ при } \sqrt{a} \geq 0, 1 - \sqrt{b} \geq 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2x^2 + 2x + 1$$

$$2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 7x - 1$$

возведем в квадрат при

$$4(2x^2 + 2x + 1) = 49x^2 - 14x + 1$$

$$8x^2 + 8x + 4 = 49x^2 - 14x + 1$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 22^2 + 4 \cdot 3 \cdot 41 = 2^2(11^2 + 41 \cdot 3) =$$

$$= 2^2(121 + 123) = 2^2 \cdot 244 = 4^2 \cdot 61$$

т.к. $\sqrt{a} = 1 - \sqrt{b}$, то $1 - \sqrt{b} \geq 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{b} \geq 1 \geq \sqrt{b} \Rightarrow$
 $1 \geq b \geq 0$

1) $1 \geq b$
 $1 \geq 2x^2 + 2x + 1$

$(x+1)x \leq 0 \Rightarrow x \in [-1; 0]$ - чтобы выполнялось
 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$

2) $b \geq 0$

$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$

$D = 4 - 2 \cdot 4 < 0$, т.к. $2 > 0 \Rightarrow$ парабола с вершиной
 вверх, $D < 0 \Rightarrow$
 $b > 0$ всегда.

Сам далее
 $a = 1 - 2\sqrt{b} + b$

$2x^2 - 5x + 3 = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2x^2 + 2x + 1$

$2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = (7x - 1) : 2 \Rightarrow 7x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{7}$
 $x \in [-1; 0] \Rightarrow \emptyset$

Значит единственное решение $x = \frac{2}{7}$

Ответ: $\frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

В ~~клеточных~~ сегментах кол-во точек $\frac{24}{2} + 1 = 13$

В ~~клеточных~~ сегментах кол-во точек $\frac{24}{2} = 12$

Теперь рассмотрим выражение, которое дано в условии: $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12 \Rightarrow$

$$\Rightarrow C_2 - C_1 = 12, \text{ значит}$$

мы можем выбрать любую точку из ~~1-го~~ ^{сегмента} и любую точку из второго ~~сегмента~~ ^{сегмента}.

Заметим, что ~~также~~ $12:2 \Rightarrow C_2 - C_1:2 \Rightarrow$ значения C_1 и C_2 одинаковы.

~~Итак~~ рассмотрим C_1 , $C_{1, \max} = 30 - 12 = 18 \Rightarrow$

$$C_1 \in [0; 18], C_2 \in [12; 30]$$

*) посчитаем сколько пар ~~клеточных~~ сегментов. $\frac{18}{2} + 1 = 10$

пар ~~клеточных~~ сегментов: $\frac{18}{2} = 9$

1) для каждой пары ~~клеточных~~ сегментов мы можем выбрать

1 точку из 1 сегмента и 1 точку из 2 сегмента

кол-во вариантов $13 \cdot 13 = 169$

получим на кол-во пар $169 \cdot 9 = 1521$

2) теперь рассмотрим ~~кол-во~~ ~~клеточных~~ сегментов

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Для каждой пары соседних отрезков мы должны
выбрать 1 точку из 1-го отрезка и 1 точку из 2-го
отрезка $12 \cdot 12 = 144$

Всего пар 9

Значит $9 \cdot 144 = 1296$

Суммируя получим, что кол-во
вариантов выбрать 2 точки равно

$$1521 + 1296 = 2817$$

Ответ: 2817.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

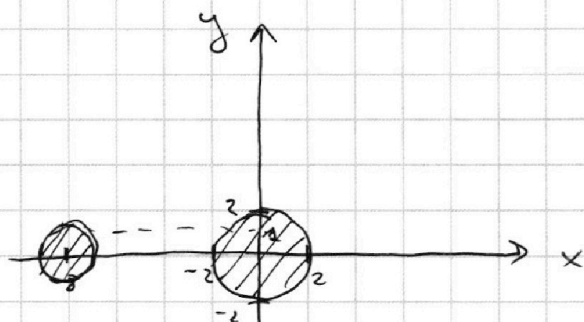


N1

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

1) $(x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0$ - круг с ^(заполняем) центром $O(-8; 0)$ и радиусом 1

2) $x^2 + y^2 - 4 \leq 0$ - круг с ^(заполняем) центром $O(0; 0)$ и радиусом 2



3) чтобы $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$, то

3.1) точка принадлежит одной из окружностей

3.2) точка принадлежит обоим кругам, т.к. круги

не накладываются ~~не пересекаются~~
4) Значит ^{линейн} ~~линейн~~ ур-н $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$

является два круга ~~с окружностями~~.

5) Рассмотрим $ax - y + 10b = 0 \Rightarrow y = ax + 10b$ - график это ^{прямая} прямая.

Задача сводится к тому, чтобы понять когда пересечение линии с 2 кругами даёт 2 точки

5.1) Рассмотрим случаи пересечения с одним кругом.

Заметим, что если прямая касается круга, то 1 решение, если прямая пересекает ~~круг~~ ^{круг}, то решений будет 2 ~~точки~~ ^{точки} $\Rightarrow$ бесконечно много точек.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

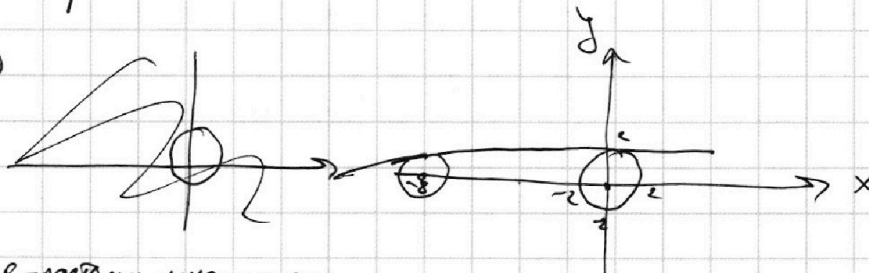
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) одной окружности прямая может быть только 2 касания, т.е. одно решение, значит, если решим 2, то линия одновременно касается 2-х окружностей, найдем a , т.е. коэф. наклона данной прямой.

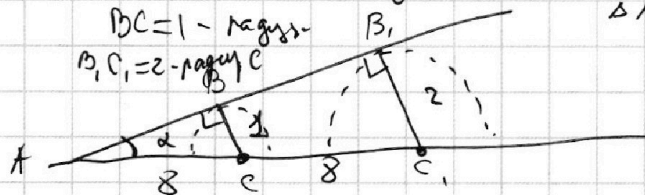
1 сл.)



$CC_1 = 8$ - расстояние между центрами

$BC = 1$ - радиус

$B_1C_1 = 2$ - радиус



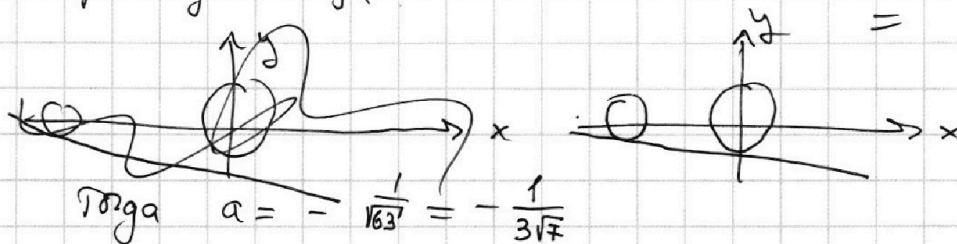
$\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1 \Rightarrow$

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AC} = \frac{AC + AC_1}{AC} \Rightarrow$$

$$2 = \frac{CC_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} - 1 \Rightarrow$$

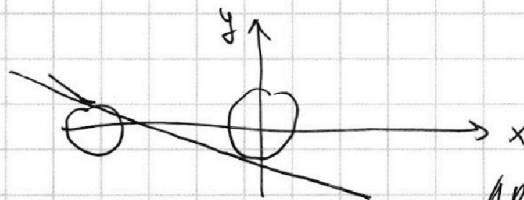
$$\sin \alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\frac{1}{8}}{\sqrt{1 - (\frac{1}{8})^2}} = \frac{1}{\sqrt{63}} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{1}{3\sqrt{7}}$$

интересный случай когда



тогда $a = -\frac{1}{\sqrt{63}} = -\frac{1}{3\sqrt{7}}$

2 сл.)



$AB = 1$ - радиус

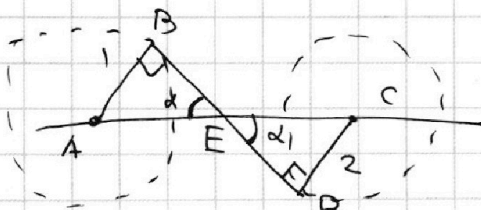
$CD = 2$ - радиус

$AC = 8$

$\triangle ABE \sim \triangle CDE$

$AE = 8 - CE$

$$\frac{AB}{AE} = \sin \alpha = \frac{CD}{CE} \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

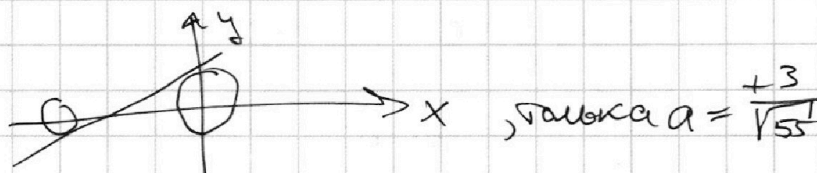


$$\frac{CD}{AB} = \frac{CE}{AE} = \frac{CE}{8-CE}$$

$$2 = \frac{CE}{8-CE} \Rightarrow 16 = 3CE \Rightarrow CE = \frac{16}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\frac{16}{3}}{8} = \frac{2}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1-(\frac{2}{3})^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

а тангенс угла равен $a = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$
 Поскольку ~~абсолютное значение~~ ~~тангенс~~ ~~угла~~ ~~меньше~~ ~~единицы~~



Итого: $a = \frac{1}{3\sqrt{7}}$; $a = -\frac{1}{3\sqrt{7}}$; $a = \frac{3}{\sqrt{5}}$; $a = -\frac{3}{\sqrt{5}}$ где каждое

из этих значений отвечает найденной функции,

чтобы прямая касалась двух окружностей.

Ответ: $\frac{1}{3\sqrt{7}}$; $-\frac{1}{3\sqrt{7}}$; $\frac{3}{\sqrt{5}}$; $-\frac{3}{\sqrt{5}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

