



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1.

$$\left. \begin{aligned} ab &: 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac &: 2^{23} \cdot 7^{39} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} ab &= 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot k \\ bc &= 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot h \\ ac &= 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot m \end{aligned} \right. \quad k, h, m \in \mathbb{N}$$

$$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot k \cdot h \cdot m$$

слева квадрат nat. числа $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ справа все степени четны $\Rightarrow k \cdot h \cdot m : 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow k, h, m \geq 2 \Rightarrow$ пусть без огранич. общности

$k=2$.

Пусть:

$$\begin{cases} a = 2^x \cdot 7^y \\ b = 2^y \cdot 7^z \\ c = 2^z \cdot 7^x \end{cases}, \text{ где } x, y, z \in \mathbb{Z}; \quad x, y, z - \text{ макс. степени} \\ x, y, z \geq 0; \quad \text{вхождения } 7 \text{ в } a, b, c.$$

$$\begin{cases} ab = 2^{x+y} \cdot 7^{y+z} \\ bc = 2^{y+z} \cdot 7^{z+x} \\ ac = 2^{x+z} \cdot 7^{x+y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab = 2^{x+y} \cdot 7^{y+z} \cdot h = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot k \\ bc = 2^{y+z} \cdot 7^{z+x} \cdot l = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot h \\ ac = 2^{x+z} \cdot 7^{x+y} \cdot i = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot m \end{cases} \quad h, l, i \in \mathbb{N}; \quad h, l, i \neq 7.$$

$$y = \frac{(x+y+y+z) - (x+z)}{2} = \frac{11+18-39}{2} = -5$$

$$\begin{cases} x+y=11 \\ y+z=18 \\ x+z=39 \end{cases}$$

Но $y \geq 0$. Значит тогда,

тогда $ab = 2^{x+y} \cdot 7^{y+z} \cdot h = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot k$ (или наоборот)
из них следует на 7 (или наоборот) $x+z$ была меньше.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Учитывая, что a, b, c — простые числа, то $a, b, c \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 187, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 473, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 527, 539, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 623, 629, 631, 637, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 667, 671, 673, 677, 683, 687, 691, 697, 701, 709, 713, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 791, 797, 803, 809, 811, 817, 821, 823, 827, 829, 833, 839, 843, 853, 857, 859, 863, 869, 877, 881, 883, 887, 893, 897, 901, 907, 911, 913, 917, 919, 923, 929, 931, 937, 941, 943, 947, 953, 959, 967, 971, 973, 977, 983, 989, 991, 993, 997, 1001, 1003, 1007, 1009, 1013, 1017, 1019, 1021, 1023, 1027, 1029, 1031, 1033, 1037, 1039, 1043, 1047, 1049, 1051, 1053, 1057, 1059, 1063, 1067, 1069, 1073, 1077, 1079, 1081, 1083, 1087, 1091, 1093, 1097, 1101, 1103, 1107, 1109, 1113, 1117, 1121, 1123, 1127, 1129, 1133, 1137, 1139, 1143, 1147, 1149, 1151, 1153, 1157, 1159, 1163, 1167, 1169, 1173, 1177, 1179, 1181, 1183, 1187, 1191, 1193, 1197, 1201, 1203, 1207, 1209, 1211, 1213, 1217, 1219, 1223, 1229, 1231, 1233, 1237, 1239, 1243, 1247, 1249, 1251, 1253, 1257, 1259, 1263, 1267, 1269, 1273, 1277, 1279, 1281, 1283, 1287, 1291, 1293, 1297, 1301, 1303, 1307, 1309, 1311, 1313, 1317, 1319, 1321, 1323, 1327, 1329, 1331, 1333, 1337, 1339, 1343, 1347, 1349, 1351, 1353, 1357, 1359, 1363, 1367, 1369, 1373, 1377, 1379, 1381, 1383, 1387, 1391, 1393, 1397, 1401, 1403, 1407, 1409, 1411, 1413, 1417, 1419, 1423, 1427, 1429, 1431, 1433, 1437, 1439, 1443, 1447, 1449, 1451, 1453, 1457, 1459, 1463, 1467, 1469, 1473, 1477, 1479, 1481, 1483, 1487, 1491, 1493, 1497, 1501, 1503, 1507, 1509, 1511, 1513, 1517, 1519, 1521, 1523, 1527, 1529, 1531, 1533, 1537, 1539, 1543, 1547, 1549, 1551, 1553, 1557, 1559, 1563, 1567, 1569, 1573, 1577, 1579, 1581, 1583, 1587, 1591, 1593, 1597, 1601, 1603, 1607, 1609, 1611, 1613, 1617, 1619, 1621, 1623, 1627, 1629, 1631, 1633, 1637, 1639, 1643, 1647, 1649, 1651, 1653, 1657, 1659, 1663, 1667, 1669, 1673, 1677, 1679, 1681, 1683, 1687, 1691, 1693, 1697, 1701, 1703, 1707, 1709, 1711, 1713, 1717, 1719, 1721, 1723, 1727, 1729, 1731, 1733, 1737, 1739, 1743, 1747, 1749, 1751, 1753, 1757, 1759, 1763, 1767, 1769, 1773, 1777, 1779, 1781, 1783, 1787, 1791, 1793, 1797, 1801, 1803, 1807, 1809, 1811, 1813, 1817, 1819, 1821, 1823, 1827, 1829, 1831, 1833, 1837, 1839, 1843, 1847, 1849, 1851, 1853, 1857, 1859, 1863, 1867, 1869, 1873, 1877, 1879, 1881, 1883, 1887, 1891, 1893, 1897, 1901, 1903, 1907, 1909, 1911, 1913, 1917, 1919, 1921, 1923, 1927, 1929, 1931, 1933, 1937, 1939, 1943, 1947, 1949, 1951, 1953, 1957, 1959, 1963, 1967, 1969, 1973, 1977, 1979, 1981, 1983, 1987, 1991, 1993, 1997, 2001, 2003, 2007, 2009, 2011, 2013, 2017, 2019, 2021, 2023, 2027, 2029, 2031, 2033, 2037, 2039, 2043, 2047, 2049, 2051, 2053, 2057, 2059, 2063, 2067, 2069, 2073, 2077, 2079, 2081, 2083, 2087, 2091, 2093, 2097, 2101, 2103, 2107, 2109, 2111, 2113, 2117, 2119, 2121, 2123, 2127, 2129, 2131, 2133, 2137, 2139, 2143, 2147, 2149, 2151, 2153, 2157, 2159, 2163, 2167, 2169, 2173, 2177, 2179, 2181, 2183, 2187, 2191, 2193, 2197, 2201, 2203, 2207, 2209, 2211, 2213, 2217, 2219, 2221, 2223, 2227, 2229, 2231, 2233, 2237, 2239, 2243, 2247, 2249, 2251, 2253, 2257, 2259, 2263, 2267, 2269, 2273, 2277, 2279, 2281, 2283, 2287, 2291, 2293, 2297, 2301, 2303, 2307, 2309, 2311, 2313, 2317, 2319, 2321, 2323, 2327, 2329, 2331, 2333, 2337, 2339, 2343, 2347, 2349, 2351, 2353, 2357, 2359, 2363, 2367, 2369, 2373, 2377, 2379, 2381, 2383, 2387, 2391, 2393, 2397, 2401, 2403, 2407, 2409, 2411, 2413, 2417, 2419, 2421, 2423, 2427, 2429, 2431, 2433, 2437, 2439, 2443, 2447, 2449, 2451, 2453, 2457, 2459, 2463, 2467, 2469, 2473, 2477, 2479, 2481, 2483, 2487, 2491, 2493, 2497, 2501, 2503, 2507, 2509, 2511, 2513, 2517, 2519, 2521, 2523, 2527, 2529, 2531, 2533, 2537, 2539, 2543, 2547, 2549, 2551, 2553, 2557, 2559, 2563, 2567, 2569, 2573, 2577, 2579, 2581, 2583, 2587, 2591, 2593, 2597, 2601, 2603, 2607, 2609, 2611, 2613, 2617, 2619, 2621, 2623, 2627, 2629, 2631, 2633, 2637, 2639, 2643, 2647, 2649, 2651, 2653, 2657, 2659, 2663, 2667, 2669, 2673, 2677, 2679, 2681, 2683, 2687, 2691, 2693, 2697, 2701, 2703, 2707, 2709, 2711, 2713, 2717, 2719, 2721, 2723, 2727, 2729, 2731, 2733, 2737, 2739, 2743, 2747, 2749, 2751, 2753, 2757, 2759, 2763, 2767, 2769, 2773, 2777, 2779, 2781, 2783, 2787, 2791, 2793, 2797, 2801, 2803, 2807, 2809, 2811, 2813, 2817, 2819, 2821, 2823, 2827, 2829, 2831, 2833, 2837, 2839, 2843, 2847, 2849, 2851, 2853, 2857, 2859, 2863, 2867, 2869, 2873, 2877, 2879, 2881, 2883, 2887, 2891, 2893, 2897, 2901, 2903, 2907, 2909, 2911, 2913, 2917, 2919, 2921, 2923, 2927, 2929, 2931, 2933, 2937, 2939, 2943, 2947, 2949, 2951, 2953, 2957, 2959, 2963, 2967, 2969, 2973, 2977, 2979, 2981, 2983, 2987, 2991, 2993, 2997, 3001, 3003, 3007, 3009, 3011, 3013, 3017, 3019, 3021, 3023, 3027, 3029, 3031, 3033, 3037, 3039, 3043, 3047, 3049, 3051, 3053, 3057, 3059, 3063, 3067, 3069, 3073, 3077, 3079, 3081, 3083, 3087, 3091, 3093, 3097, 3101, 3103, 3107, 3109, 3111, 3113, 3117, 3119, 3121, 3123, 3127, 3129, 3131, 3133, 3137, 3139, 3143, 3147, 3149, 3151, 3153, 3157, 3159, 3163, 3167, 3169, 3173, 3177, 3179, 3181, 3183, 3187, 3191, 3193, 3197, 3201, 3203, 3207, 3209, 3211, 3213, 3217, 3219, 3221, 3223, 3227, 3229, 3231, 3233, 3237, 3239, 3243, 3247, 3249, 3251, 3253, 3257, 3259, 3263, 3267, 3269, 3273, 3277, 3279, 3281, 3283, 3287, 3291, 3293, 3297, 3301, 3303, 3307, 3309, 3311, 3313, 3317, 3319, 3321, 3323, 3327, 3329, 3331, 3333, 3337, 3339, 3343, 3347, 3349, 3351, 3353, 3357, 3359, 3363, 3367, 3369, 3373, 3377, 3379, 3381, 3383, 3387, 3391, 3393, 3397, 3401, 3403, 3407, 3409, 3411, 3413, 3417, 3419, 3421, 3423, 3427, 3429, 3431, 3433, 3437, 3439, 3443, 3447, 3449, 3451, 3453, 3457, 3459, 3463, 3467, 3469, 3473, 3477, 3479, 3481, 3483, 3487, 3491, 3493, 3497, 3501, 3503, 3507, 3509, 3511, 3513, 3517, 3519, 3521, 3523, 3527, 3529, 3531, 3533, 3537, 3539, 3543, 3547, 3549, 3551, 3553, 3557, 3559, 3563, 3567, 3569, 3573, 3577, 3579, 3581, 3583, 3587, 3591, 3593, 3597, 3601, 3603, 3607, 3609, 3611, 3613, 3617, 3619, 3621, 3623, 3627, 3629, 3631, 3633, 3637, 3639, 3643, 3647, 3649, 3651, 3653, 3657, 3659, 3663, 3667, 3669, 3673, 3677, 3679, 3681, 3683, 3687, 3691, 3693, 3697, 3701, 3703, 3707, 3709, 3711, 3713, 3717, 3719, 3721, 3723, 3727, 3729, 3731, 3733, 3737, 3739, 3743, 3747, 3749, 3751, 3753, 3757, 3759, 3763, 3767, 3769, 3773, 3777, 3779, 3781, 3783, 3787, 3791, 3793, 3797, 3801, 3803, 3807, 3809, 3811, 3813, 3817, 3819, 3821, 3823, 3827, 3829, 3831, 3833, 3837, 3839, 3843, 3847, 3849, 3851, 3853, 3857, 3859, 3863, 3867, 3869, 3873, 3877, 3879, 3881, 3883, 3887, 3891, 3893, 3897, 3901, 3903, 3907, 3909, 3911, 3913, 3917, 3919, 3921, 3923, 3927, 3929, 3931, 3933, 3937, 3939, 3943, 3947, 3949, 3951, 3953, 3957, 3959, 3963, 3967, 3969, 3973, 3977, 3979, 3981, 3983, 3987, 3991, 3993, 3997, 4001, 4003, 4007, 4009, 4011, 4013, 4017, 4019, 4021, 4023, 4027, 4029, 4031, 4033, 4037, 4039, 4043, 4047, 4049, 4051, 4053, 4057, 4059, 4063, 4067, 4069, 4073, 4077, 4079, 4081, 4083, 4087, 4091, 4093, 4097, 4101, 4103, 4107, 4109, 4111, 4113, 4117, 4119, 4121, 4123, 4127, 4129, 4131, 4133, 4137, 4139, 4143, 4147, 4149, 4151, 4153, 4157, 4159, 4163, 4167, 4169, 4173, 4177, 4179, 4181, 4183, 4187, 4191, 4193, 4197, 4201, 4203, 4207, 4209, 4211, 4213, 4217, 4219, 4221, 4223, 4227, 4229, 4231, 4233, 4237, 4239, 4243, 4247, 4249, 4251, 4253, 4257, 4259, 4263, 4267, 4269, 4273, 4277, 4279, 4281, 4283, 4287, 4291, 4293, 4297, 4301, 4303, 4307, 4309, 4311, 4313, 4317, 4319, 4321, 4323, 4327, 4329, 4331, 4333, 4337, 4339, 4343, 4347, 4349, 4351, 4353, 4357, 4359, 4363, 4367, 4369, 4373, 4377, 4379, 4381, 4383, 4387, 4391, 4393, 4397, 4401, 4403, 4407, 4409, 4411, 4413, 4417, 4419, 4421, 4423, 4427, 4429, 4431, 4433, 4437, 4439, 4443, 4447, 4449, 4451, 4453, 4457, 4459, 4463, 4467, 4469, 4473, 4477, 4479, 4481, 4483, 4487, 4491, 4493, 4497, 4501, 4503, 4507, 4509, 4511, 4513, 4517, 4519, 4521, 4523, 4527, 4529, 4531, 4533, 4537, 4539, 4543, 4547, 4549, 4551, 4553, 4557, 4559, 4563, 4567, 4569, 4573, 4577, 4579, 4581, 4583, 4587, 4591, 4593, 4597, 4601, 4603, 4607, 4609, 4611, 4613, 4617, 4619, 4621, 4623, 4627, 4629, 4631, 4633, 4637, 4639, 4643, 4647, 4649, 4651, 4653, 4657, 4659, 4663, 4667, 4669, 4673, 4677, 4679, 4681, 4683, 4687, 4691, 4693, 4697, 4701, 4703, 4707, 4709, 4711, 4713, 4717, 4719, 4721, 4723, 4727, 4729, 4731, 4733, 4737, 4739, 4743, 4747, 4749, 4751, 4753, 4757, 4759, 4763, 4767, 4769, 4773, 4777, 4779, 4781, 4783, 4787, 4791, 4793, 4797, 4801, 4803, 4807, 4809, 4811, 4813, 4817, 4819, 4821, 4823, 4827, 4829, 4831, 4833, 4837, 4839, 4843, 4847, 4849, 4851, 4853, 4857, 4859, 4863, 4867, 4869, 4873, 4877, 4879, 4881, 4883, 4887, 4891, 4893, 4897, 4901, 4903, 4907, 4909, 4911, 4913, 4917, 4919, 4921, 4923, 4927, 4929, 4931, 4933, 4937, 4939, 4943, 4947, 4949, 4951, 4953, 4957, 4959, 4963, 4967, 4969, 4973, 4977, 4979, 4981, 4983, 4987, 4991, 4993, 4997, 5001, 5003, 5007, 5009, 5011, 5013, 5017, 5019, 5021, 5023, 5027, 5029, 5031, 5033, 5037, 5039, 5043, 5047, 5049, 5051, 5053, 5057, 5059, 5063, 5067, 5069, 5073, 5077, 5079, 5081, 5083, 5087, 5091, 5093, 5097, 5101, 5103, 5107, 5109, 5111, 5113, 5117, 5119, 5121, 5123, 5127, 5129, 5131, 5133, 5137, 5139, 5143, 5147, 5149, 5151, 5153, 5157, 5159, 5163, 5167, 5169, 5173, 5177, 5179, 5181, 5183, 5187, 5191, 5193, 5197, 5201, 5203, 5207, 5209, 5211, 5213, 5217, 5219, 5221, 5223, 5227, 5229, 5231, 5233, 5237, 5239, 5243, 5247, 5249, 5251, 5253, 5257, 5259, 5263, 5267, 5269, 5273, 5277, 5279, 5281, 5283, 5287, 5291, 5293, 5297, 5301, 5303, 5307, 5309, 5311, 5313, 5317, 5319, 5321, 5323, 5327, 5329, 5331, 5333, 5337, 5339, 5343, 5347, 5349, 5351, 5353, 5357, 5359, 5363, 5367, 5369, 5373, 5377, 5379, 5381, 5383, 5387, 5391, 5393, 5397, 5401, 5403, 5407, 5409, 5411, 5413, 5417, 5419, 5421, 5423, 5427, 5429, 5431, 5433, 5437, 5439, 5443, 5447, 5449, 5451, 5453, 5457, 5459, 5463, 5467, 5469, 5473, 5477, 5479, 5481, 5483, 5487, 5491, 5493, 5497, 5501, 5503, 5507, 5509, 5511, 5513, 5517, 5519, 5521, 5523, 5527, 5529, 5531, 5533, 5537, 5539, 5543, 5547, 5549, 5551, 5553, 5557, 5559, 5563, 5567, 5569, 5573, 5577, 5579, 5581, 5583, 5587, 5591, 5593, 5597, 5601, 5603, 5607, 5609, 5611, 5613, 5617, 5619, 5621, 5623, 5627, 5629, 5631, 5633, 5637, 5639, 5643, 5647, 5649, 5651, 5653, 5657, 5659, 5663, 5667, 5669, 5673, 5677, 5679, 5681, 5683, 5687, 5691, 5693, 5697, 5701, 5703, 5707, 5709, 5711, 5713, 5717, 5719, 5721, 5723, 5727, 5729, 5731, 5733, 5737, 5739, 5743, 5747, 5749, 5751, 5753, 5757, 5759, 5763, 5767, 5769, 5773, 5777, 5779, 5781, 5783, 5787, 5791, 5793, 5797, 5801, 5803, 5807, 5809, 5811, 5813, 5817, 5819, 5821, 5823, 5827, 5829, 5831, 5833, 5837, 5839, 5843, 5847, 5849, 5851, 5853, 5857, 5859, 5863, 5867, 5869, 5873, 5877, 5879, 5881, 5883, 5887, 5891, 5893, 5897, 5901, 5903, 5907, 5909, 5911, 5913, 5917, 5919, 5921, 5923, 5927, 5929, 5931, 5933, 5937, 5939, 5943, 5947, 5949, 5951, 5953, 5957, 5959, 5963, 5967, 5969, 5973, 5977, 5979, 5981, 5983, 5987, 5991, 5993, 5997, 6001, 6003, 6007, 6009, 6011, 6013, 6017, 6019, 6021, 6023, 6027, 6029, 6031, 6033, 6037, 6039, 6043, 6047, 6049, 6051, 6053, 6057, 6059, 6063, 6067, 6069, 6073, 6077, 6079, 6081, 6083, 6087, 6091, 6093, 6097, 6101, 6103, 6107, 6109, 6111, 6113, 6117, 6119, 6121, 6123, 6127, 6129, 6131, 6133, 6137, 6139, 6143, 6147, 6149, 6151, 6153, 6157, 6159, 6163, 6167, 6169, 6173, 6177, 6179, 6181, 6183, 6187, 6191, 6193, 6197, 6201, 6203, 6207, 6209, 6211, 6213, 6217, 6219, 6221, 6223, 6227, 6229, 6231, 6233, 6237, 6239, 6243, 6247, 6249, 6251, 6253, 6257, 6259, 6263, 6267, 6269, 6273, 6277, 62$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2}.$$

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-2ab}$$

$$\begin{cases} (a+b):m \\ (a+b)^2-2ab \equiv m \end{cases}$$

$$2ab \equiv m$$

Пусть:

$$\begin{cases} a \equiv k, \text{ тогда:} \\ b \equiv m-k \end{cases} \quad (\text{где } k \geq 0, k < m, k \in \mathbb{N})$$

$$(a+b)^2-2ab \equiv 0$$

$$-2ab \equiv 0$$

$$2ab \equiv 0$$

$$2k(m-k) \equiv 0$$

$$2mk-2k^2 \equiv 0$$

$$:m$$

$$-2k^2 \equiv 0$$

$$2k^2 \equiv 0$$

Пусть: $\text{НОД}(m; k) = d, d > 1$.

Тогда $a \equiv k \Rightarrow a: d (m: d, k: d)$

$b \equiv m-k \Rightarrow b: d (m: d, k: d), \text{ тогда } (a; b) > d$

$> 1 \Rightarrow \frac{a}{b}$ сократима, противоречие.

Тогда $\text{НОД}(m; k) = 1, 2k^2 \equiv 0 \Rightarrow 2: m$

$= 0). \quad 2: m \Rightarrow m \leq 2.$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Пусть: } m = 9.$$

$$\text{При } a = 2, b = 7:$$

$$\frac{9}{49 - 98 + 4} = -\frac{9}{45} = -\frac{1}{5}.$$

$$\text{Ответ: } 9.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

Пусть: $a = 3x^2 + 3x + 1$, $b = 1 - 9x$. Тогда:

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$$

$$\begin{cases} a+b = a+b^2+2b\sqrt{a} \\ \sqrt{a}+b \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = b^2 + 2\sqrt{a} \\ b = 0 \\ \sqrt{a} + b \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{a} = \frac{1-b}{2} \quad (2) \\ b = 0 \quad (1) \\ \sqrt{a} + b \geq 0. \end{cases}$$

1) $b = 0$

$$1 - 9x = 0$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$a = 3x^2 + 3x + 1 = \frac{3}{81} + \frac{3}{9} + 1 = \frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{10}{27} + 1 = \frac{37}{27} > 0$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a} = 0$$

0=0
Верно.

$$2) \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \frac{1 - (1 - 9x)}{2}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = \frac{81x^2}{4}$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2$$

$$69x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$D = 144 - 4 \cdot 69 \cdot 4 < 0. \text{ Нет реш.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $\frac{1}{9}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

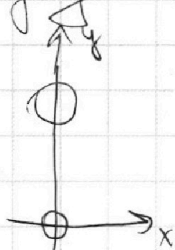
№6.

$$\begin{cases} ax+ay-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

Векторное неравенство выполняется $\Leftrightarrow (x,y)$

лежит либо в кругу с ц. $(0;0)$ и $r=1$, либо

в кругу с ц. $(0;12)$ и $r=4$.



П.к. два решения, но две
точки прямой $ax+ay-8b=0$

лежат в кругах. П.к. прямая не

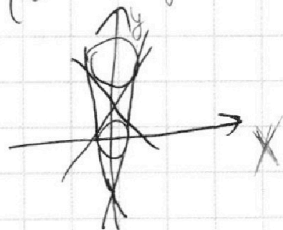
может пересек. один круг в двух

точках, то она пересекает каждую

точку. Значит, она общая касательная

к ним. Такие касательные по 2 пары симмет-

ричны (относ. Oy)





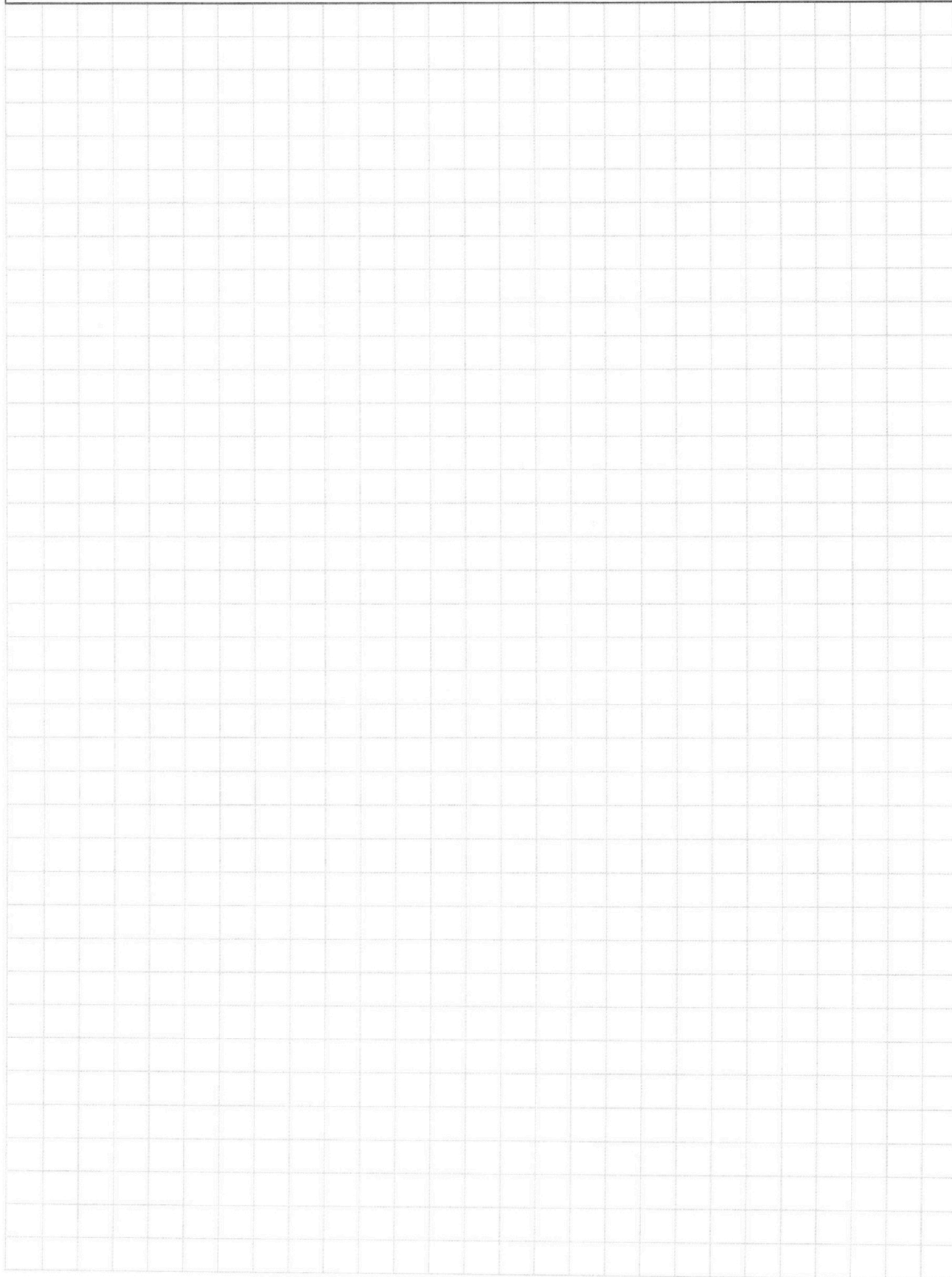
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x_1^2 + (y_1 - 12)^2 = 16$$

$$\frac{y_1}{x_1}$$

$$1 + \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 - 24\left(\frac{y_1}{x_1}\right) + 144 = 16$$

$$400 + 100 + 36 = 536$$

$$t^2 - 24t + 129 = 0$$

$$D = 576 - 516 = 60$$

$$t = \frac{24 \pm \sqrt{60}}{2} = 12 \pm \sqrt{15}$$

$$b_1 x_1 x_0 (x_1 - x_0) = \frac{1}{\sqrt{64b^2 - 1}} \left(x_0^2 (x_1^2 - 1) - x_1^2 (x_0^2 - 1) \right)$$

$$\frac{y_1}{x_1} = 12 \pm \sqrt{15}$$

$$b x_1^2 x_0^2 \pm x_1^2 \sqrt{(64b^2 - 1)(x_0^2 - 1)} = b_1 x_0^2 x_1 \pm x_0^2 \sqrt{(64b^2 - 1)(x_1^2 - 1)}$$

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 1 \\ ax_0 + y_0 = 8b \end{cases}$$

$$a = \frac{6x_0 \pm \sqrt{(64b^2 - 1)(x_0^2 - 1)}}{x_0^2}$$

$$x_0^2 + (ax_0 - 8b)^2 = 1$$

$$\frac{6x_1 \pm \sqrt{(64b^2 - 1)(x_1^2 - 1)}}{x_1^2}$$

$$x_0^2 + a^2 x_0^2 - 16abx_0 + 64b^2 = 1$$

$$256b^2 x_0^2 + 4 - 256b^2 - 6x_0^2 =$$

$$= 256(b^2 - 1) + 4(1 - x_0^2) = 256(b^2 - a)(x_0^2 - 1)$$



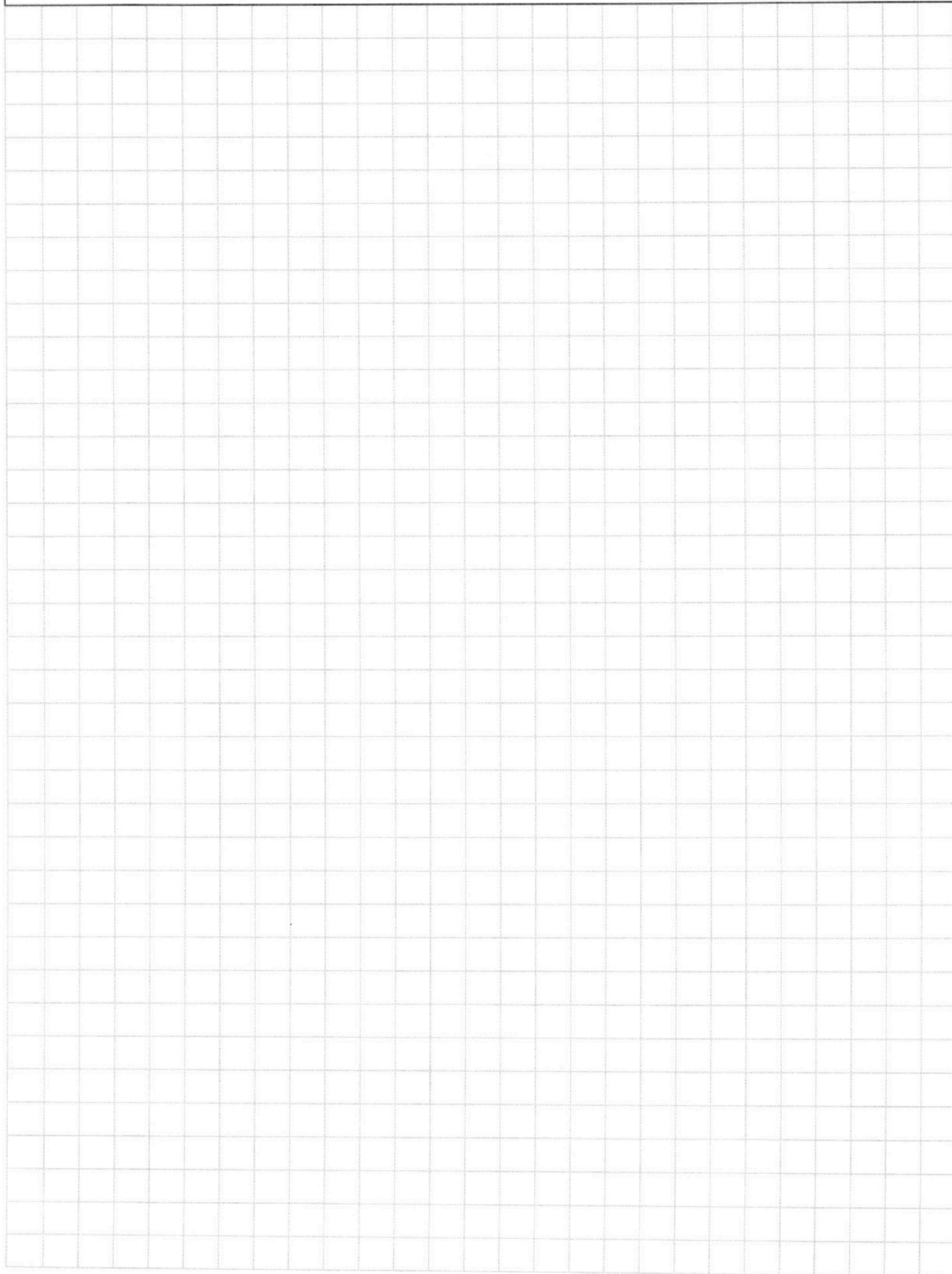
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$ab = 2^{16} \cdot 7^{11} \cdot K = X$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot n = y$$

$$ac = 2^{23} \cdot 3^{39} \cdot m = z$$

~~3.5~~

2 3

9 - 4K = 2

3 7

49 - 34K + 9

~~28~~

$$abc = \sqrt{\frac{xy}{z} \cdot \frac{xz}{y} \cdot \frac{yz}{x}} = \sqrt{xyz}$$

$$abc = \sqrt{2^{55} \cdot 7^{68} \cdot 4 \cdot n \cdot m}$$

$$\frac{k}{m-k}$$

$$(k, m-k) = 0$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

~~10-2-2020~~

$$\frac{(b+b)}{(a^2 - 2ab + b^2)} : m$$

$$\begin{array}{rcl} a + b & = & 21 \\ b + c & = & 18 \\ a + c & = & 39 \end{array}$$

~~58-18-22~~

(22)

$$a = 11$$

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{m-k}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$g_{ab}^m = (a+b)^2 - (a+b)$$

$$sab \equiv (a+b-i)(a+b)$$

$$a = m + k$$
$$b = m + (m - k)$$

~~$$\frac{m(h+x+1)}{(m+k)^2 + (x^m + m-k)^2}$$~~

$$k^2 - 7($$

$$k^2 - 7(m-k)k + (m-k)^2 \stackrel{m}{=} 0$$

$$2k^2 - 7mk - 3k^2 + m^2 - 2mk = 0$$

$$-5K^2 + \cancel{10K} - \cancel{5} = 0$$

$$-5K \equiv 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

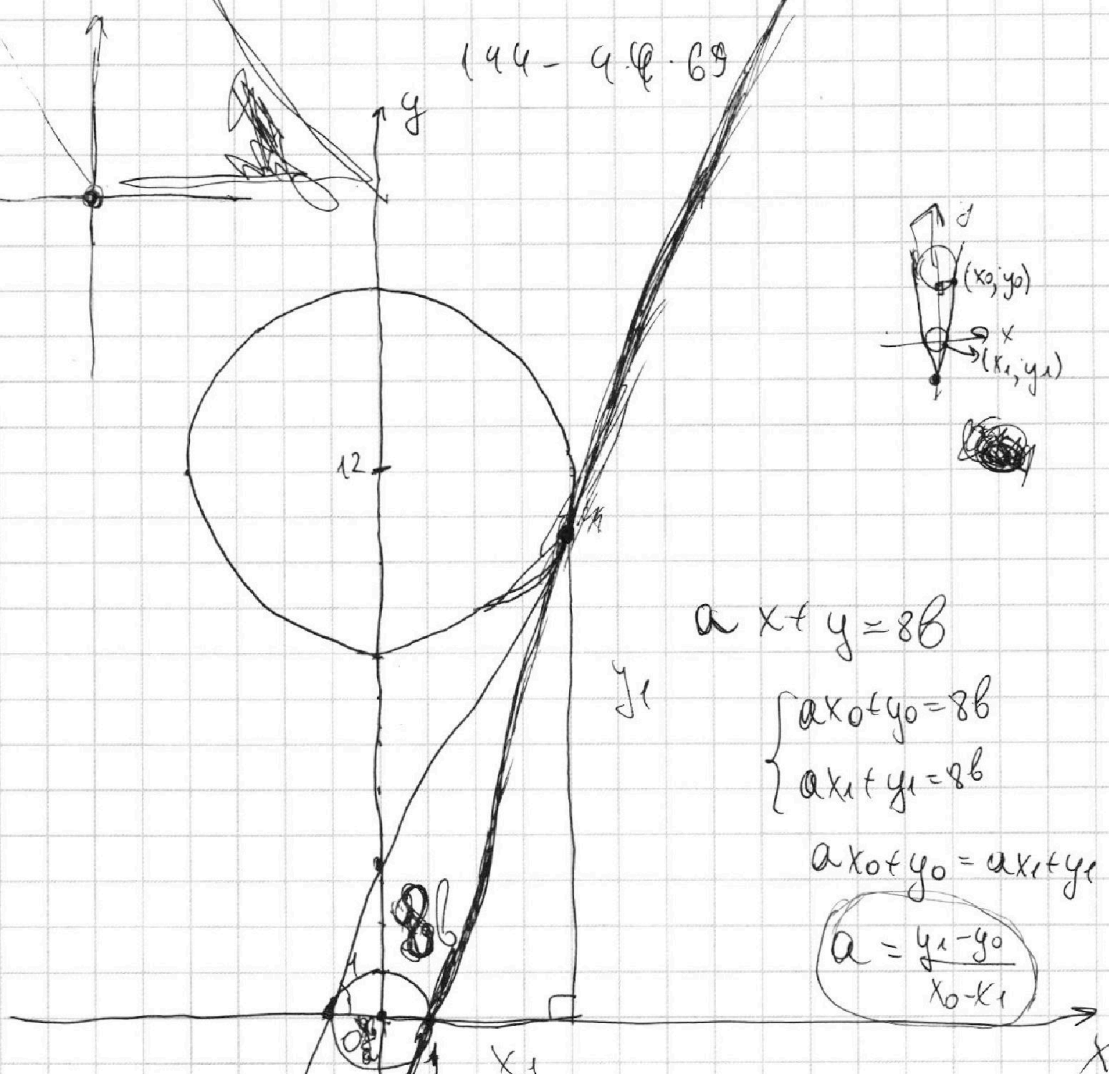
МФТИ

- 1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



144 - 48 - 69



$$x_0^2 + (y_0 + y_1)^2 =$$

$$a \cdot x + y = 8b$$

$$\begin{cases} ax_0 + y_0 = 8b \\ ax_1 + y_1 = 8b \end{cases}$$

$$ax_0 + y_0 = ax_1 + y_1$$

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_0 - x_1}$$

$$\begin{cases} (x_0, y_0) \\ (x_1, y_1) \end{cases} \begin{cases} ax_0 + y_0 = 8b \\ ax_1 + y_1 = 8b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 1 \\ x_1^2 + (y_1 - 12)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ -24y + 144 + 1 = 16 \end{cases}$$

$$x_0^2 = 1 - (ax_0 - 8b)^2$$

$$D = 256x_0^2b^2 - 4(64b^2 + 2x_0 - 1) =$$