



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



$$b=2^5, a=7^{16} \cdot 2^{11}, c=7^{16} \cdot 2^{12}$$

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$b=2^5, c=7^{23} \cdot 2^{10}, a=7^{16} \cdot 2^{13}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$ $\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 : 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+17+39}$
 $bc : 2^{17} \cdot 7^{11}$ $(abc)^2 : 2^{55} \cdot 7^{66}$
 $ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$ $\Rightarrow (abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{66} \cdot k$, где k - натуральное

числом $(abc)^2$

т.к. $(abc)^2$ все степени простых множителей четные

Значит $k = 2^{28} \cdot 7^{34}$, $k_{\min} = 2$

$$\Rightarrow (abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{68} - \text{минимум}$$

$$\Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

Значит, что при этом $ac : 7^{39} \Rightarrow abc : 7^{35}$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{35}$$

Таким образом, т.к. $ac : 2^{23}$, $ab : 2^{15}$; $bc : 2^{17}$

Значит a, b, c имеют на максимальном множестве

входящих 2 в a , b - в b , c - в c

$$\begin{cases} a+b \geq 15 \\ b+c \geq 17 \\ c+a \geq 23 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b-b-a \geq 2$$

$$c-a \geq 2$$

$$\Rightarrow c+a+c-a \geq 25$$

$$2c \geq 25, \text{ т.к. } c - \text{целое,}$$

$$c \geq 13, \text{ тогда } a \geq 10, b \geq 5$$

Пусть m_a, m_b, m_c - максимальные степени входящих в a, b, c соответственно. $\Rightarrow m_a+m_c \geq 39, m_a+m_b \geq 11, m_c+m_b \geq 18$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$m_c + m_b - m_b - m_a \geq 7$$

$$m_c - m_a \geq 7$$

$$m_c - m_a + m_c + m_a \geq 46$$

$$2m_c \geq 46$$

$$m_c \geq 23 \Rightarrow m_a \geq 16 \Rightarrow m_b \geq 0$$

возможны минимальные значения m и n для каждого

числа:

разр.

$$a = 2^{10} \cdot 7^{16}$$

$$b = 2^5$$

$$c = 2^{15} \cdot 7^{23}$$

тогда

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{16} : (2^{15} \cdot 7^{11})$$

$$bc = 2^{13} \cdot 7^{23} : (2^{12} \cdot 7^{18})$$

$$ac = 2^{25} \cdot 7^{39} : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\Rightarrow a \cdot b \cdot c = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Итого: } 2^{23} \cdot 7^{39}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}$, если a и b имеют и значащих
группы ~~можно~~ сократить на m , то

$$(a+b):m$$

$$(a^2-2ab+b^2):m$$

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-2ab} \Rightarrow \frac{(a+b)^2-2ab}{(a+b)^2-2ab}$$

$$\text{т.к. } (a+b):m \Rightarrow (a+b)^2:m^2 (a:m)$$

$$\Rightarrow 2ab:m$$

$$\text{пусть } \begin{cases} a:m \\ ab:m \end{cases}$$

Рассмотрим другой случай

$$\text{если } ab:m \Rightarrow 2ab:m \Rightarrow \frac{a^2-2ab+b^2}{(a^2-2ab+b^2)}:m$$

$$(a^2+b^2):m$$

$$\text{т.к. } a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2:m^2$$

$$\begin{array}{l} a^2+b^2:m \\ 2ab:m \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a^2-2ab+b^2:m \\ (a-b)^2:m \end{array}$$

$\Rightarrow$ если m - простое число,
то $a-b:\sqrt{m}$, если нет,

$$a-b:m \text{ (т.к. делимое простое (простое))}$$

$$\Rightarrow \text{т.к. } a+b:m, \Rightarrow \sqrt{m}$$

$$\text{пусть } a+b+a-b=2a:m \text{ или }:\sqrt{m}$$

$$\text{или же } a+b-(a-b)=2b:m \text{ или }:\sqrt{m}$$

$$\text{пусть либо } 2:\sqrt{m} \text{ или } m, \text{ либо } a,b:\sqrt{m} \text{ и } b \text{ делится}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

общий десятичный m или $\sqrt{m}$ $\rightarrow \frac{a}{b}$ - дробная - упрощаем

пусть $g : m$ или $2 : m$ или $2 : \sqrt{m}$

т.е. m - число m - минимальное, $m = g$:

пример при $a = 4$, $b = 5$ $\frac{4}{5}$ - дробная

$$\frac{4+5}{16-140+25} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$$

Ответ: $m = 9$.

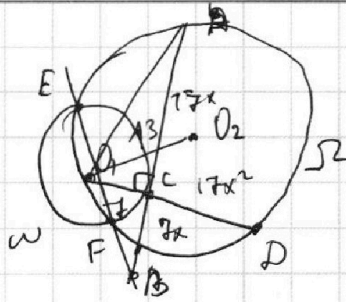
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть O_1 и O_2 - центры окр. ω и Ω
соответственно; Проведем O_1C до пересечения с Ω
и назовем точку D

тогда $AC \cdot CB = O_1C \cdot CD$ как пересекшимся хорды

$$\Rightarrow 17x \cdot 7x = 7 \cdot CD \Rightarrow CD = 17x$$

Замечая, что радиусы имеют значения $O_1O_2 = 13$

(прямые Ω)

Проведем отрезок хорды EF где окр ω и Ω

они $\perp O_1O_2$, тогда $\angle$ который нас интересует

$$\angle B = \angle O_2O_1D \text{ (из подобия)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1 - 9x$$

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1 - 9x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 + 2(1 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \end{cases}$$

Рассмотрим 2 варианта:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 + 2(1 - 9x) \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \end{cases}$$

$$-6x = 3x + 81x^2 - 88x + 2(1 - 9x) \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-2(1 - 9x) \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 81x^2 - 9x;$$

$$(9x - 1) \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x(9x - 1)$$

$$\begin{cases} 9x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x \quad \text{и} \quad 9x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3x + 1 = 81x^2 \end{cases}$$

Рассмотрим $3x^2 + 3x + 1 = 81x^2$

$$78x^2 - 3x - 1 = 0;$$

$$D = 9 + 312 = 321$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{321}}{156}$$

Проверим условие $\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1 - 9x \geq 0$

$$\text{или } 9x - 1 = 0 \quad \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 0 \geq 0$$

$$\text{или } \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 9x \quad 9x + 1 - 9x \geq 0$$

Проверим ОДЗ: или $x = \frac{1}{9}$ $\frac{1}{9} < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ не подходит;

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Гранич. 1-го:

$$D = 36 - 24 = 12$$

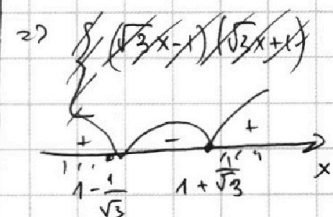
$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} =$$

$$= 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$D = 9 - 12 < 0$$

$\Rightarrow$ всегда > 0



(Гранич. 2-го)

$$\text{ОДЗ: } x \in (-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup$$

$$[1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{нпр } x = \frac{3 + \sqrt{321}}{156}$$

$$17 < \sqrt{321} < 18 \Rightarrow x \approx \frac{3+18}{156} = \frac{21}{156} = \frac{7}{52} < 1 \Rightarrow u$$

логич. интервал $[1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3} \approx 1,4$$

$$\Rightarrow \frac{0,4}{1,4} > \frac{7}{52}$$

$$\text{нпр } x = \frac{3 - \sqrt{321}}{156} < 0 \Rightarrow < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ т.к. } gx > 0$$

$x > 0$
 $\Rightarrow u$ не подходит

~~не подходит~~

$$\text{Или: } x = \frac{1}{9}; \frac{3 + \sqrt{321}}{156}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

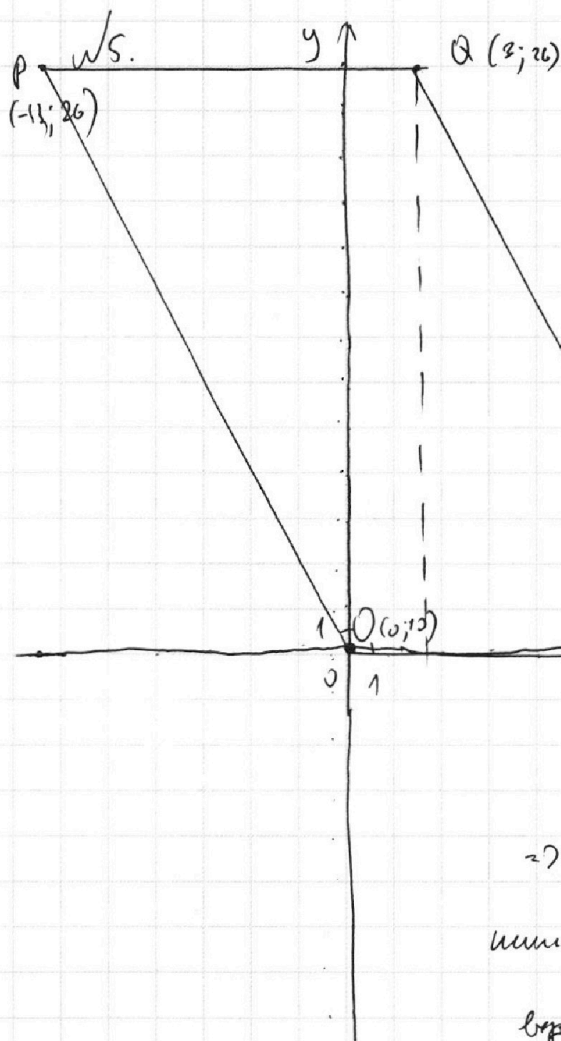
5
☒

6
☐

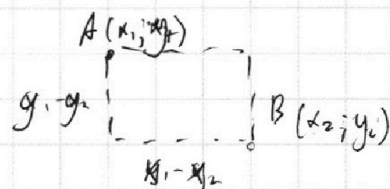
7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим модуль
для точек A и B



тогда $|x_1 - x_2|$ и $|y_1 - y_2|$ -

- длины сторон прямоугольника,
в котором A и B являются

вершинами
x и y - стороны
прямоугольника

⇒ нужно рассмотреть также прямоуголь-
ники в которых две стороны a и b

верны $2a + b = 14$ (где a - горизонтальная,
b - вертикальная)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

√6.
$$\begin{cases} ax + y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим: $ax + y - 3b = 0$

$y = 3b - ax$ — линейная функция, график — прямая;
пересечение с Oy $(0; 3b)$, угловой коэффициент $= -a$

Рассмотрим: $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$;

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 1) = 0 & (1) \\ (x^2 + (y - 12)^2 - 16) = 0 & (2) \\ \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 < 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 > 0 \end{cases} & (3) \\ \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 > 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 < 0 \end{cases} & (4) \end{cases}$$

Рассмотрим $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$x^2 + y^2 = 1$ — график окружности с центром $(0; 0)$

и радиусом 1;

Рассмотрим: $x^2 + (y - 12)^2 - 16 = 0$

$x^2 + (y - 12)^2 = 16$ — график окружности с центром $(0; 12)$;

и радиусом 4.

Всё решение на графике решения неравенств:

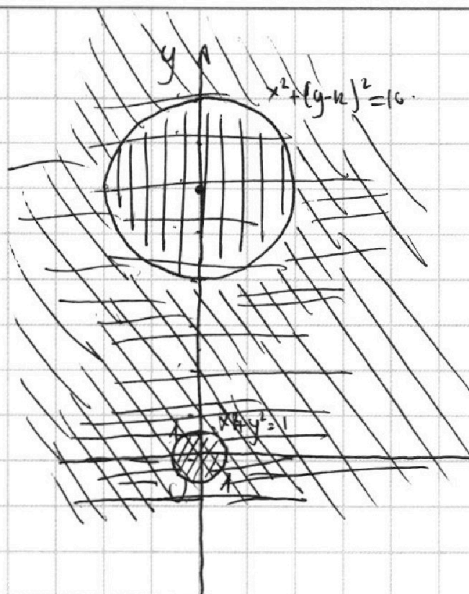
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим (1) - окружность $x^2 + y^2 = 1$

уравнение (2) - окружность $x^2 + (y-12)^2 = 16$

уравнение (3): ~~какая~~ область ограничена

$\Rightarrow$ круги, ограниченный

окружностью $x^2 + y^2 = 1$ (как

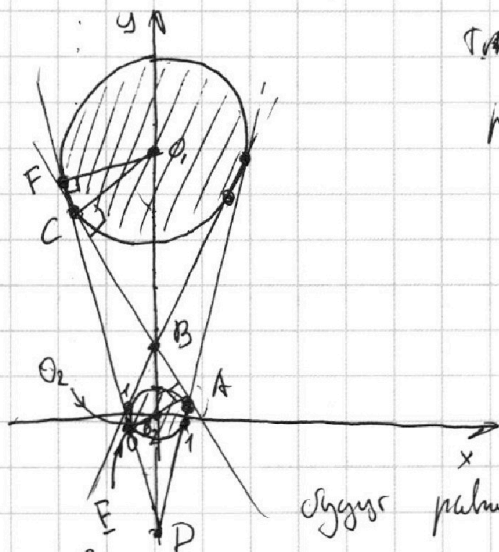
пересечение двух окружностей
интервалом значений)

уравнение (4): вертикальный

и горизонтальный интервалы: откуда логически круги, ограниченный
окружностью $x^2 + (y-12)^2 = 16$

$\Rightarrow$ область решений неравенств:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \leq 16 \end{cases}$$

Рассмотрим на графике область решений неравенств в виде
с прямой $y = 2b - ax$



Т.к. необходимо найти с учетом

решения $\Rightarrow$ касательные
(горизонтальные и вертикальные)

Т.к. окружность симметрична

относительно Oy , касательные
также симметричны $\Rightarrow$

из значений a где кас

Округи равны по мощностям и радиусам из центра.

Рассмотрим $\triangle BCO_1$ и $\triangle BAO_2$, вписанные в круги
они прямоугольные, т.к. в них радиусы O_1C и O_2B являются



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Реша аналогично первому углу α найдем

$$\angle \text{ctg} \angle EDO_2$$

$$\Rightarrow 1 + \text{ctg}^2 \angle EDO_2 = \frac{1}{\sin^2 \angle EDO_2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 4^2$$

$$\Rightarrow \text{ctg} \angle EDO_2 = \sqrt{15}$$

$$\Rightarrow a = \pm \sqrt{15}$$

$$\text{Отв. } a = \pm \sqrt{15}; \pm \sqrt{4,76}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$ $12 + (5+6) = 33$
 $a \cdot b = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot k_1$
 $b \cdot c = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot k_2$
 $a \cdot c = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot k_3$

$$\begin{array}{r} 5 \times 16 \\ \hline 80 \end{array}$$

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2^{15} \cdot 2^{17} \cdot 2^{22} = 2^{55} \cdot k, \quad k \in \mathbb{N}$$

4/7/3

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$a+b \leq m$$

$$J^{u_a} \cdot J^{h_c} \geq J^{ac} : J^{ag} \quad 469 - 49$$

$$3+6 = 9$$

$$n_{a7} + n_{c2} \geq 39$$

$$a^2 + b^2 + 2ab$$

$\frac{2x}{x+2}$

$\begin{array}{r} \text{JB} \\ \times \quad 9 \\ \hline 9 \cdot b : m \\ 4 \cdot b : m \end{array}$

$a \leq b : m$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 + y^2 - 2b = \frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2} \quad \frac{a+b}{(a+b)^2 - 2ab} \\ (x^2 + y^2 - 1) \end{array} \right.$$

$$L(a+b)^L : m = 2 \quad gab : m$$

$$107 \mid 18$$

107/1418

$$a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 : m^{\frac{xy}{112}}$$

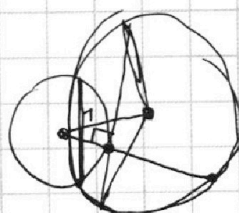
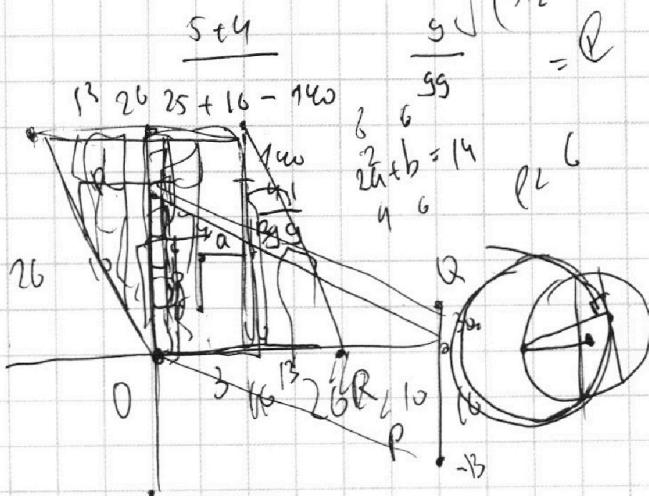
Sub: m

und bis 5:00

или $a \cdot b : m$

$$\frac{2x}{7} = \frac{7}{2x}$$

$$? \cdot 2 = 2 \cdot 17x^2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

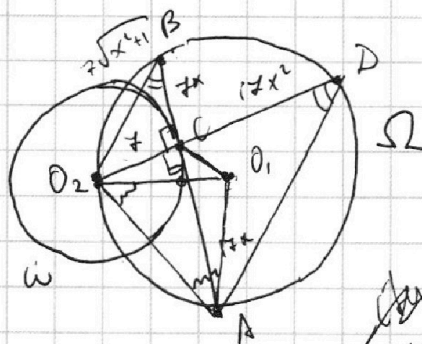
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.



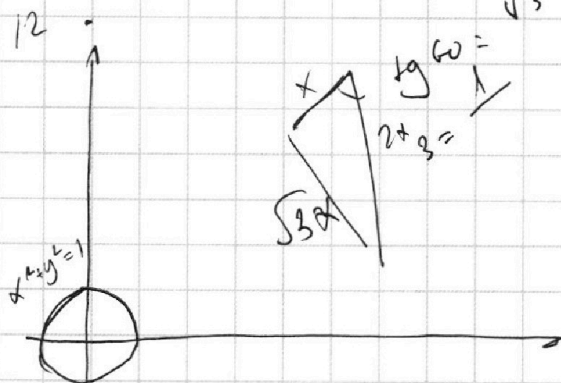
Дано: $\omega(O_2; r)$, $\Omega(O_1; R)$

$O_2 \in \Omega$, $A, B \in \Omega$

AB - хорда Ω ; AB - касательная
к ω , в точке C

$$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$$

Найти: AB



$$\tan \omega = \frac{1}{2+3} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{56}{10} = 5.6$$

$$24$$

$$3 \pm \sqrt{321}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 480 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$12 \quad 5 \quad \times 8$$

$$9,6 : 4 =$$

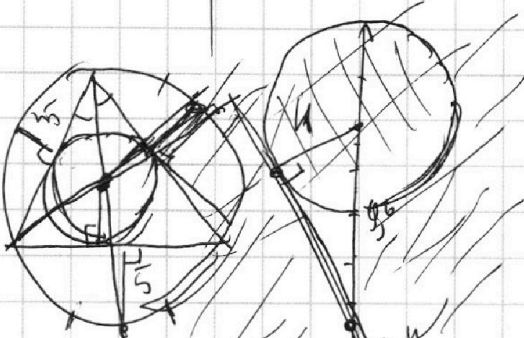
$$\tan \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

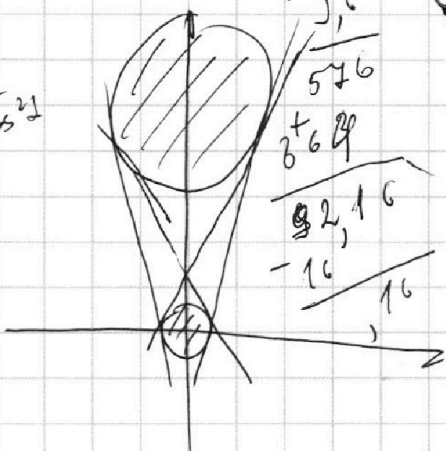
$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$$

$$b \leq 1$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$



$$y = 2b - 6x$$



$$\begin{array}{r} 9,6 \\ \times 9,6 \\ \hline 576 \\ 864 \\ \hline 9216 \\ - 16 \\ \hline 16 \end{array}$$