МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 10 КЛАСС. Вариант 9

a:k либо b:k

$\boxed{8ab : k}$ если $k \neq 2$, то $\left[\begin{array}{l} a:b \Rightarrow b:k \\ b:k \Rightarrow a:k \end{array}\right.$

a+b : k

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^{14}7^{10}$, $bc$ делится на $2^{17}7^{17}$, $ac$ делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$. 64 ℓℓ

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$\frac{a+b}{\boxed{(a+b)^2} - 8ab}$ если a $\qquad$ $$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$ $(a,b) = 1$ $\quad$ a+b ⋮ 8

(8ab; a+b) четная

При каком наибольшем $m$ могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на $m$?

$8ab = k(a+b)$ $\quad$ $8ab = ka + kb$

$(8b-k)a = kb$ $\quad$ k:b $\quad$ 8ab ⋮ a+b $\quad$ $k = \frac{8ab}{a+b} \geq ab$ $\quad$ 8 $\quad$ $8ab < k(a+b)$

$8ab = k(a+b)$ $\quad$ k:a $\quad$ $k \geq ab$

3. [4 балла] Центр окружности $\omega$ лежит на окружности $\Omega$, хорда $AB$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $C$ так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину $AB$, если известно, что радиусы $\omega$ и $\Omega$ равны 1 и 5 соответственно.

k = ab $\quad$ $a+b \leq 8$ $\quad$ $8 \geq a+b$ $\quad$ $8ab \vee (a+b)$

$8ab \geq ab(a+b)$ $\quad$ 4 - 8 $\quad$ не умоляя общности скажем, что a > b, тогда

4. [5 баллов] Решите уравнение

$\frac{5 \pm 1}{4}$ $\quad$ $\frac{3}{2}$ $\quad$ 1 $\quad$ 0 $\quad$ $\sqrt{5}$ $\quad$ -5

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

25 - 4·3·2 = 1 $\quad$ $(2x-3)(x-1)$ $\quad$ $\sqrt{(2x-3)(x-1)} - \sqrt{\phantom{x}}$ $\quad$ 04 ℓℓ.

$8ab > 8a$ $\quad$ $a+b < 2a$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$. ОК.

$\sqrt{2x^2-5x+3} + 7x = 2 + \sqrt{2x^2+2x+1}$

$y_2 - y_1$ - чётное $\quad$ 0 $\quad$ $x_2 - x_1 = 6$ $\quad$ $\sqrt{a} - \sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система

$2x_2 - 2x_1 \in [-24; 24]$ $\quad$ $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ если

13 вариантов.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leqslant 0 \end{cases}$$

$y_2 - y_1 \in [-24; 24]$ $\quad$ ± 0ℓℓ.

имеет ровно 2 решения. $\quad$ если $\Delta y = 12$ $\quad$ $T - T_1'$ $\frac{4x-5}{\sqrt{2x^2-5x+3}} + 7$ $\frac{4x+2}{\sqrt{2x^2+2x+1}}$

$2x_1 + y_1 \in [0; 30]$, с исходом $\Delta y$

7. [6 баллов] Треугольник $ABC$ вписан в окружность. Пусть $M$ – середина той дуги $AB$ описанной окружности, которая не содержит точку $C$; $N$ – середина той дуги $AC$ описанной окружности, которая не содержит точку $B$. Найдите расстояние от вершины $A$ до центра окружности, вписанной в треугольник $ABC$, если расстояния от точек $M$ и $N$ до сторон $AB$ и $AC$ соответсвенно равны 4,5 и 2.

либо норм, либо не норм.

$0 - \sqrt{5} = (0 - \sqrt{5})($

Гениально

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

# №1

Представим $a = 2^{a_2} \cdot 7^{a_7} \cdot p_a$

$b = 2^{b_2} \cdot 7^{b_7} \cdot p_b$ , где $p_a, p_b, p_c$ не делятся

$c = 2^{c_2} \cdot 7^{c_7} \cdot p_c$ на 2 и на 7.

Тогда 1) $ab = 2^{a_2+b_2} 7^{a_7+b_7} \cdot p_A \cdot p_b \vdots 2^{14} \cdot 7^{10}$

Значит. $\begin{cases} a_2+b_2 \geq 14 \\ a_7+b_7 \geq 10 \end{cases}$

2) $bc = 2^{b_2+c_2} \cdot 7^{b_7+c_7} \cdot p_b \cdot p_c \vdots 2^{17} \cdot 7^{17}$

Значит $\begin{cases} b_2+c_2 \geq 17 \\ b_7+c_7 \geq 17 \end{cases}$

3) $ac = 2^{a_2+c_2} \cdot 7^{a_7+c_7} \cdot p_a \cdot p_c \vdots 2^{20} \cdot 7^{37}$

Значит $\begin{cases} a_2+c_2 \geq 20 \\ a_7+c_7 \geq 37 \end{cases}$

Нам нужно минимизировать $abc = 2^{a_2+b_2+c_2} \cdot 7^{a_7+b_7+c_7} \cdot p_A \cdot p_b \cdot p_c$

Т.к. $p_A, p_B, p_C \in N$, то $p_A = p_B = p_c = 1$ при минимальном $abc$

Чтобы найти значение на $a_2+b_2+c_2$ сложим нер-ва

$\begin{cases} 2a_2+2b_2+2c_2 \geq 51 \\ 2a_7+2b_7+2c_7 \geq 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2+b_2+c_2 \geq 25{,}5, \text{ т.к. } a_2, b_2, c_2 \in Z, \text{ то} \\ a_7+b_7+c_7 \geq 32 \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} a_2+b_2+c_2 \geq 26 \\ a_7+b_7+c_7 \geq 32 \\ a_7+\cancel{b}c_7 \geq 37 \end{cases}$$

~~оценка~~

т.к. $a_7, b_7, c_7 \geq 0$

$$\begin{cases} a_2+b_2+c_2 \geq 26, \\ a_7+b_7+c_7 \geq 37, \end{cases}$$ оценка

Пример: $a_2 = 8$ $\quad a_7 = \cancel{3}19$

$c_2 = 12$ $\quad b_7 = \cancel{5}0$

$b_2 = 6$ $\quad c_7 = \cancel{24}\ 18$

Проверим: $a \cdot b = 2^{6+8} \cdot 7^{19+0} \vdots 2^{14} \cdot 7^{10}$ – верно

$b \cdot c = 2^{6+12} \cdot 7^{0+18} \vdots 2^{17} \cdot 7^{17}$ – верно

$a \cdot c = 2^{8+12} \cdot 7^{19+18} \vdots 2^{20} 7^{37}$ – верно

~~Ответ: abc =~~

Итого: минимальный $abc = 2^{a_2+b_2+c_2} \cdot 7^{a_7+b_7+c_7} =$
$= 2^{26} \cdot 7^{37}$

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2

Если $\frac{a}{b}$ - несократима, то $a$ и $b$ - взаимопросты.

Пусть $m$ - наибольшее число, при котором мы достигли результата, разложим $m$ на простые ~~множители~~ делители, пусть $p$ - наибольший простой делитель, неравный двум, тогда

$$\begin{cases} a+b \vdots p, \\ a^2-6ab+b^2 \vdots p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b \vdots p \\ \underbrace{(a+b)^2}_{\vdots p}-8ab \vdots p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b \vdots p \\ 8ab \vdots p \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b \vdots p \quad (2) \\ 2^3ab \vdots p \quad (1) \end{cases}$$

(1) т.к. $p \neq 2$ и $p$ - простое, то

$$\left[\begin{array}{l} a \vdots p \\ b \vdots p \end{array}\right. \underset{\text{из }(2)}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} b \vdots p \\ a \vdots p \end{array}\right.$$ , если $a \vdots p$, то $b \vdots p$ и наоборот, что является противоречием с условием.

Значит число $m$ вида $m = 2^{\alpha}$

1) $a$ и $b$ четные: такого не может, т.к. они не будут взаимопростыми

2) $a$ - четное, $b$ - нечетное $\Rightarrow a+b$ - нечетное $\Rightarrow m_{max} = 1$
и наоборот

3) $a$ и $b$ нечётные, тогда $\left.\begin{array}{l} a \text{ и } m - \text{взаимопростые} \\ b \text{ и } m - \text{взаимопростые} \end{array}\right| \Rightarrow 8 \vdots m$

Тогда $2^3 \cdot a \cdot b \vdots m$ при $m_{max} = 8$, т.к. $\alpha \leq 3$

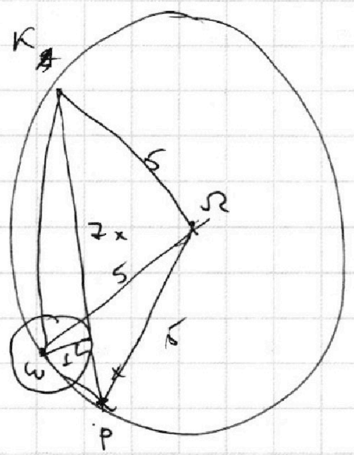
Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

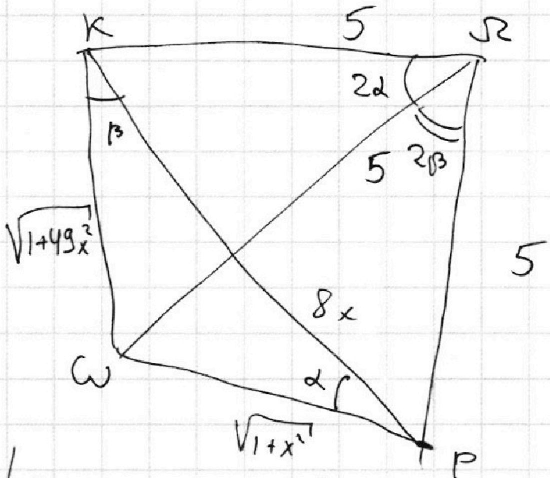
№3




$\omega P = \sqrt{1+x^2}$.

$\omega K = \sqrt{1+(7x)^2} = \sqrt{1+49x^2}$

Нарисуем ситуацию:




Теор. кос 2 $\triangle \omega KP$

$1+x^2 = 64x^2 + 1 + 49x^2 -$

$- 16x\sqrt{1+49x^2} \cdot \cancel{\frac{\sqrt{99-x^2}}{10}} \cos\beta$

$112x^2 = 16x\sqrt{1+49x^2}\cos\beta$

$7x = \sqrt{1+49x^2} \cdot \cos\beta$

$\frac{49x^2}{1+49x^2} = \frac{99-x^2}{100}$

$4900x^2 = 99 + 49\cdot 99x^2 - 49x^4 - \cancel{99} - x^2$ т.к. $x>0$

$50x^2 + 49x^4 = 99 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AB = 8x = 8$ Ответ: 8

Теор. кос. 1 $\triangle \omega \Omega P$

$1+x^2 = 25\cdot 2 - 25\cdot 2\cdot\cos 2\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{49-x^2}{50} = 2\cos^2\beta - 1 \Rightarrow$

$\cos\beta = \cancel{\cos 2\beta = \sqrt{\phantom{x}}}$

$\Rightarrow \cos^2\beta = \frac{99-x^2}{100}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

Пусть $\sqrt{a} = \sqrt{2x^2-5x+3}$, $\sqrt{b} = \sqrt{2x^2+2x+1}$ $\Rightarrow$ $a = 2x^2-5x+3$, $b = 2x^2+2x+1$ $\Rightarrow a-b = 2-7x$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = a-b$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{a}-\sqrt{b}=0 \quad (1) \\ \sqrt{a}+\sqrt{b}-1=0 \quad (2) \end{array}\right.$$

(1) $\sqrt{a} = \sqrt{b}$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1}, \text{ при } 2x^2+2x+1 \geq 0$$

$$2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1$$

$x = \frac{2}{7}$ подставим для проверки

$$\sqrt{2\left(\frac{2}{7}\right)^2-5\cdot\frac{2}{7}+3} = \sqrt{\frac{8}{49}-\frac{70}{49}+\frac{147}{49}} = \sqrt{\frac{85}{49}} = \frac{\sqrt{85}}{7}$$

$$\sqrt{2\left(\frac{2}{7}\right)^2+2\cdot\frac{2}{7}+1} = \sqrt{\frac{8}{49}+\frac{28}{49}+\frac{49}{49}} = \sqrt{\frac{85}{49}} = \frac{\sqrt{85}}{7}$$

$x = \frac{2}{7}$ – подходит.

(2) $\cancel{\sqrt{a}+\sqrt{b}=1}$

$\cancel{\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq \sqrt{b}}$ ~~найдем~~ $\cancel{b_{min}}$

$\cancel{2x^2+2x+1 \quad x_b = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \sqrt{b} = \frac{1}{2}}$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$\sqrt{a} = 1-\sqrt{b} \Rightarrow a = 1-2\sqrt{b}+b, \text{ при } \sqrt{a}\geq 0, \ 1-\sqrt{b}\geq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\cancel{2x^2-5x+3=1-2\sqrt{2x^2+2x+1}+2x^2+2x+1}$

$\cancel{1-\sqrt{2x^2+2x+1}\geq 0}$

$\cancel{1\geq\sqrt{2x^2+2x+1}\geq 0}$

$\cancel{1\geq 2x^2+2x+1\geq 0}$

$\cancel{2\sqrt{2x^2+2x+1}=7x-1}$ ~~возведем в квадрат при~~

$\cancel{2x^2+2x+1\geq 0}$

$\cancel{7x-1\geq 0}$

$\cancel{x\geq\frac{1}{7}}$

$\cancel{4(2x^2+2x+1)=49x^2-14x+1}$

$\cancel{8x^2+8x+4=49x^2-14x+1}$

$\cancel{41x^2-22x-3=0}$

$\cancel{D=22^2+41\cdot3\cdot4=2^2(11^2+41\cdot3)=}$

$\cancel{=2^2(121+123)=2^2\cdot244=4^2\cdot61}$

Т.К. $\sqrt{a}=1-\sqrt{b}$, то $1-\sqrt{b}\geq 0 \Rightarrow \cancel{1-\sqrt{b}\geq} 1\geq\sqrt{b} \Rightarrow$

$1\geq b\geq 0$

1) $\cancel{1\geq b}$ $1\geq b$

$1\geq 2x^2+2x+1$

$(x+1)\cdot x\leq 0 \Rightarrow x\in[-1;0]$ – чтобы выполнялось $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$

2) $b\geq 0$

$2x^2+2x+1\geq 0$

$D=4-2\cdot4<0$, т.к. $2>0 \Rightarrow$ парабола с ветвями вверх, $D<0 \Rightarrow b>0$ всегда.

~~Если~~ Далее

$a=1-2\sqrt{b}+b$

$2x^2-5x+3=1-2\sqrt{2x^2+2x+1}+2x^2+2x+1$

$\cancel{2}\sqrt{2x^2+2x+1}=(7x-1):2 \Rightarrow 7x-1\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x\geq\frac{1}{7} \\ x\in[-1;0] \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

Значит единственное решение $x=\frac{2}{7}$

Ответ: $\frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

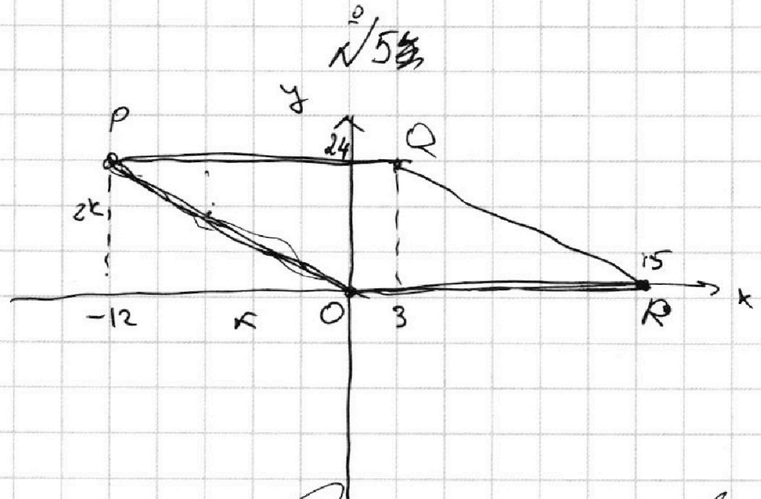
1 2 3 4 5 6 7

[ ] [ ] [ ] [ ] [X] [ ] [ ]

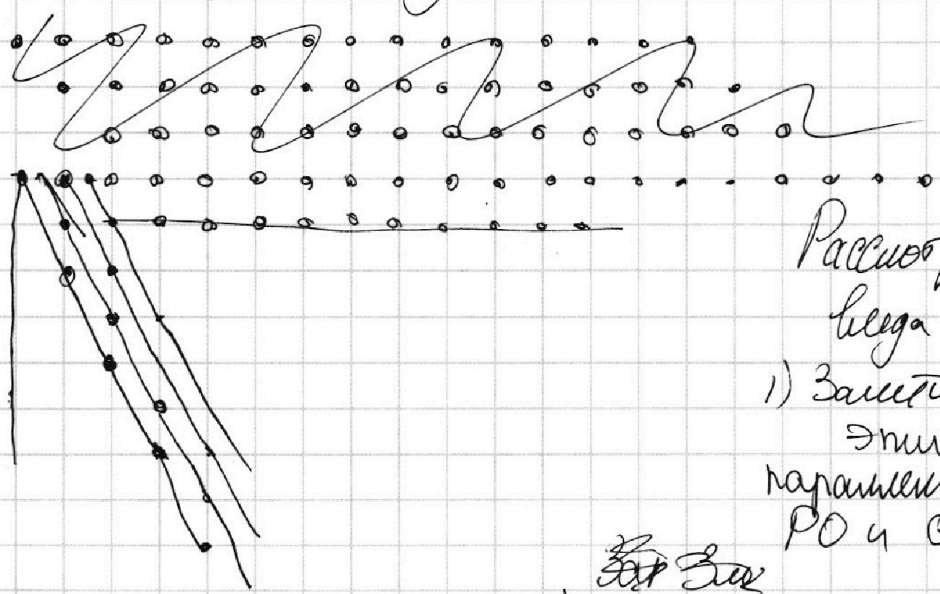
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5




~~Заметим, что все точки границы в каждом ряду равно 15 точек, т.к. $OP_x = 12$, $OP_y = 24$, $\frac{OP_y}{OP_x} = 2 \in \mathbb{Z}$ => параллелограмм выглядит так.~~



Рассмотрим прямые вида $2x+y = const = C$

1) Заметим, что эти прямые параллельны сторонам PO и QR параллелограмма.

2) рассмотрим кол-во таких прямых к

$C \in [0; 15\cdot 2] \Rightarrow$

$C \in [0; 30]$ назовем отрезок чётным если $C$ - четно, нечетным если $C$ - нечетно.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

В чётных отрезках кол-во точек $\frac{24}{2}+1=13$
В нечётных отрезках кол-во точек $\frac{24}{2}=12$

Теперь рассмотрим выражение, которое дано в условии: $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$ =>
=> $C_2-C_1=12$, значит
мы можем выбирать любую точку из 1 ~~прямой~~ отрезка и любую точку из второго ~~прямой~~ отрезка.
Заметим, что ~~чётное~~ $12 \vdots 2$ => $C_2-C_1 \vdots 2$ => чётность у $c_1$ и $c_2$ одинакова.
~~Чтобы~~ рассмотрим $c_1$, $C_{1max}=30-12=18$ =>
$C_1 \in [0;18]$, $C_2\ [12;30]$

~~3)~~ посчитаем сколько ~~чт~~ пар чётных отрезков. $\frac{18}{2}+1=10$
пар нечётных отрезков: $\frac{18}{2}=9$

1) для каждой пары чётных отрезков мы должны выбрать 1 точку из 1 отрезка и 1 точку из 2 отрезка
кол-во вариантов $13 \cdot 13=169$
домножим на кол-во пар $169 \cdot 9 = 1521$

2) теперь рассмотрим ~~кол-во~~ нечётные отрезки

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Для каждой пары нечётных отрезков мы должны выбрать 1 точку из 1-го отрезка и 1 точку из 2-го отрезка $12 \cdot 12 = 144$

Всего пар 9

Значит $9 \cdot 144 = 1296$

Суммарно получили, что кол-во вариантов выбрать 2 точки равно

$1521 + 1296 = 2817$

Ответ: 2817.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

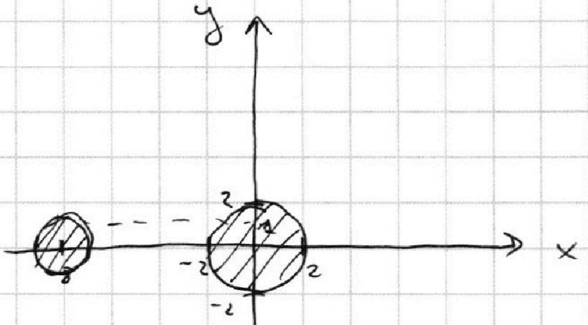
МФТИ

№6

$$\begin{cases} ax-y+10b=0 \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \end{cases}$$

1) $(x+8)^2+y^2-1\le 0$ – круг с (заполненный) ~~границами~~ центром $O(-8;0)$ и радиусом 1

2) $x^2+y^2-4\le 0$ – круг с (заполненный) центром $O(0;0)$ и радиусом 2




3) чтобы $((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0$, то

3.1) точка принадлежит одной из окружностей

3.2) точка ~~не~~ принадлежит одному кругу, т.к. круги не накладываются ~~=> то~~

4) Значит график решений ур-я $((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0$ является два круга с окружностями.

5) Рассмотрим $ax-y+10b=0 \Rightarrow y=ax+10b$ – график это прямая.

Задача сводится к тому, чтобы понять когда пересечение линии с 2 кругами дает 2 точки.

5.1) Рассмотрим сначала пересечение с одним кругом.

Заметим, что если прямая касается круга, то 1 решение, если прямая пересекает ~~реше~~ круг, то решением является отрезок => бесконечно много точек.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

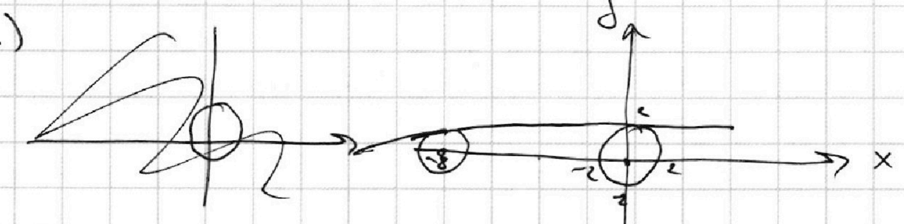
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

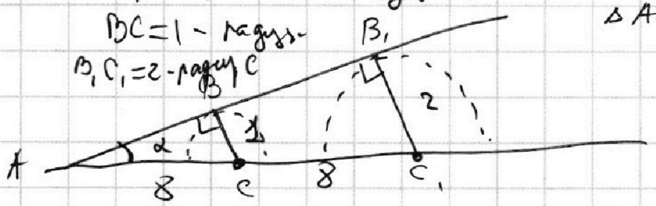
МФТИ

В одной окружности прямая может дать только 1 касание, т.е. одно решение, значит, если решений 2, то линия одновременно касается 2-х окружностей, найдем $a$, т.е. коэф. наклона данных прямых.

1сл.)



$CC_1 = 8$ – расстояние между центрами
$BC = 1$ – радиус
$B_1C_1 = 2$ – радиус $C$



$\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1 \Rightarrow$

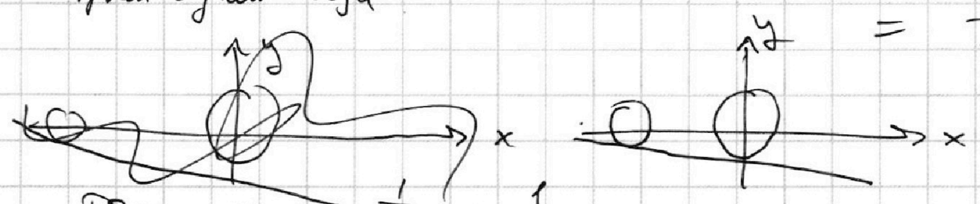
$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AC} = \frac{AC + CC_1}{AC} \Rightarrow$

$\frac{CC_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \frac{CC_1}{\frac{B_1C_1}{BC} - 1} = \frac{8}{\frac{2}{1} - 1} = 8$

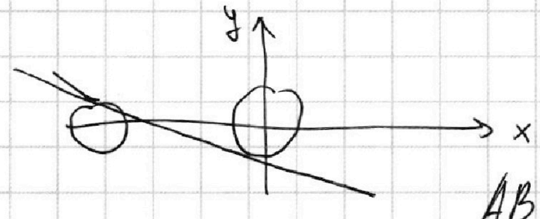
$\sin\alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\frac{1}{8}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{63}} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{1}{3\sqrt{7}}$

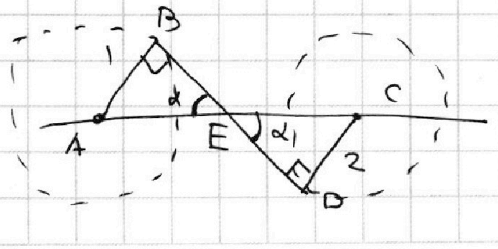
симметричен случай когда



тогда $a = -\frac{1}{\sqrt{63}} = -\frac{1}{3\sqrt{7}}$

2сл.)





$AB = 1$ – радиус
$CD = 2$ – радиус
$AC = 8$

$\triangle ABE \sim \triangle CDE$

$AE = 8 - CE$

$\frac{AB}{AE} = \sin\alpha = \frac{CD}{CE} \Rightarrow$

$=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☒ | ☐ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\frac{CD}{AB} = \frac{CE}{AE} = \frac{CE}{8-CE}$$

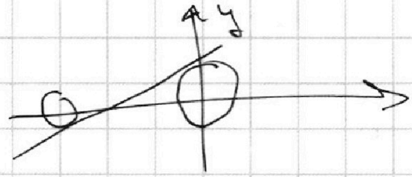
$$\cancel{\frac{2}{\frac{16}{3}} =}$$

$$2 = \frac{CE}{8-CE} \Rightarrow 16 = 3CE \Rightarrow CE = \frac{16}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{8}$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\frac{3}{8}}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{8}\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{64-9}} = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

a в данном случае равна $a = -tg\alpha = \frac{-3}{\sqrt{55}}$

Полностью ~~[illegible]~~ аналогичное ~~[illegible]~~ когда




, только $a = \frac{+3}{\sqrt{55}}$

Итого: $a = \frac{1}{3\sqrt{17}}$; $a = -\frac{1}{3\sqrt{17}}$; $a = \frac{3}{\sqrt{55}}$; $a = \frac{-3}{\sqrt{55}}$ для каждого из этих вариантов очевидно найдется свой $b$, чтобы прямая касалась двух окружностей.

Ответ: $\frac{1}{3\sqrt{17}}$; $\frac{-1}{3\sqrt{17}}$; $\frac{3}{\sqrt{55}}$; $-\frac{3}{\sqrt{55}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

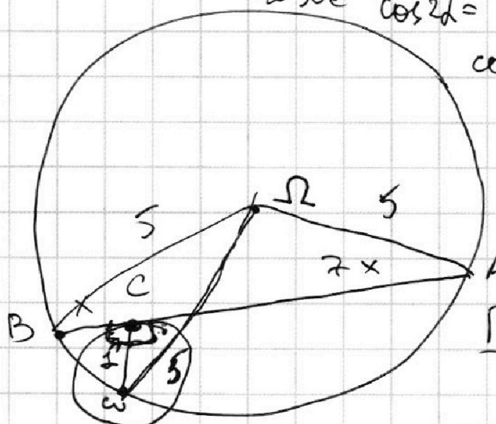
МФТИ

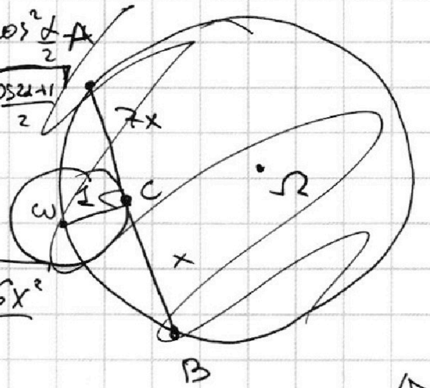
$\cos\frac{\alpha}{2} =$ №3 $64x^2 = 50 - 50\cos 2\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

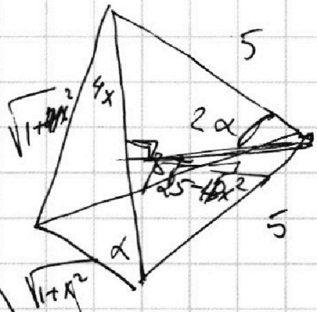
$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$

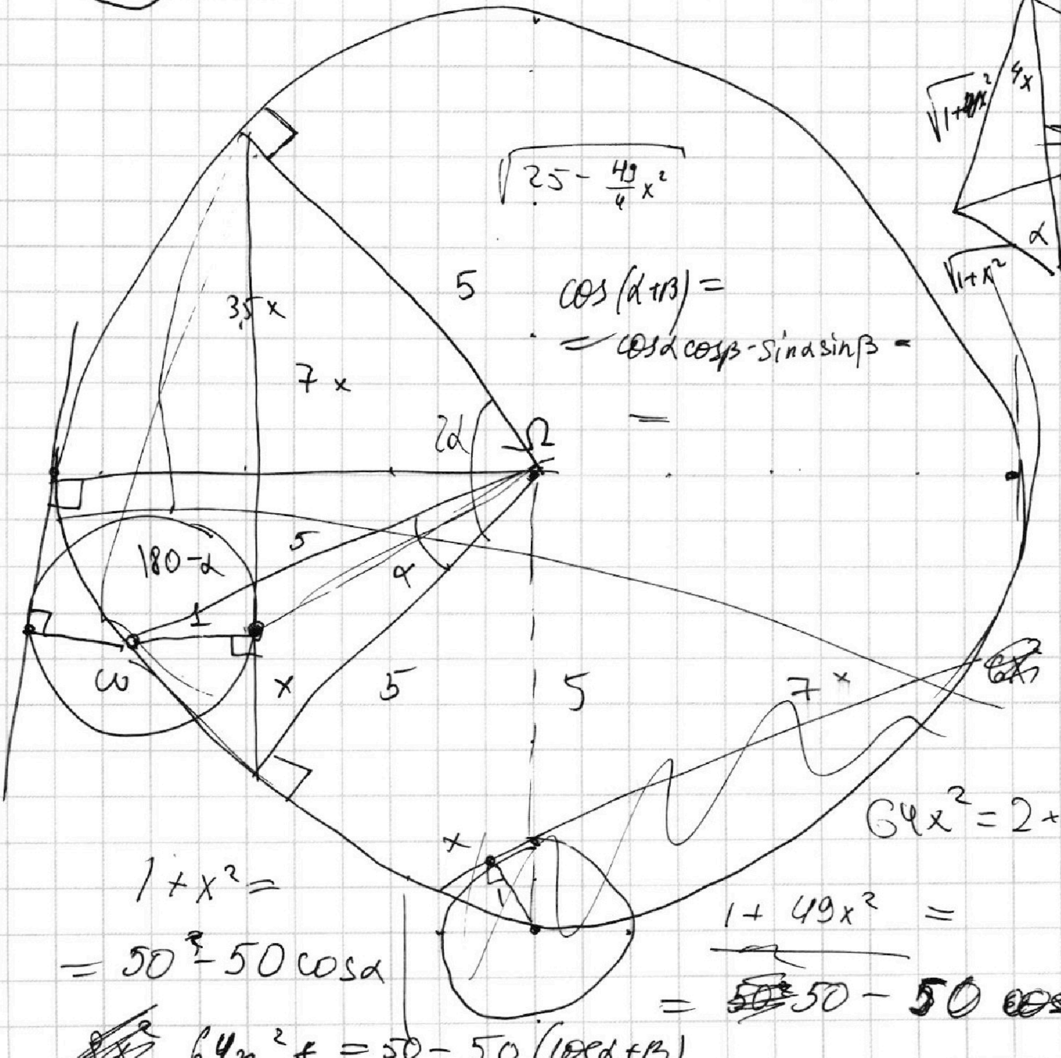
$\alpha = \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}}$





$\frac{\sqrt{25 - 16x^2}}{5}$





$\sqrt{25 - \frac{49}{4}x^2}$

$\cos(\alpha+\beta) =$
$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta =$
$=$

$64x^2 = 2 + 50x^2$

$1 + x^2 =$
$= 50 - 50\cos\alpha$

$1 + 49x^2 =$
$= 50 - 50\cos\beta$

$64x^2 = 50 - 50(\cos\alpha+\beta)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ