



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 10 КЛАСС. Вариант 9

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

- [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $a = A \cdot 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$      $c = C \cdot 2^{\delta_2} \cdot 7^{\gamma_2}$

$$b = B \cdot 2^{\beta_2} \cdot 7^{\gamma_2}$$

т.к.  $a, b, c \in N$ ,  $A, B, C \geq 2 \geq 4$

так как  $\alpha, \beta, \gamma \in N \cup \{0\}$

т.д.  $\left. \begin{array}{l} \alpha_2 + \beta_2 \geq 14 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 14 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 20 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 51$ , т.к.  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in N$ , т.о.

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \in N \cup \{0\}$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 25 \geq 26$$

(2)

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_4 + \beta_4 \geq 10 \\ \beta_4 + \gamma_4 \geq 14 \\ \gamma_4 + \alpha_4 \geq 84 \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma_4 + \alpha_4 \geq 34 \Rightarrow \alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4 \geq 34 \quad \text{т.к.}$$

$\alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4 \in N \cup \{0\}$

(3)  $A \cdot B \cdot C \geq 1$     т.к.  $A, B, C \in N$

т.о.  $abc = ABC \cdot 2^{(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2)} \cdot 7^{(\alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4)} \geq 1 \cdot 2^{26} \cdot 7^{34}$

Пример:

$$a = 2^9 \cdot 7^{10}; \quad b = 2^6; \quad c = 2^{11} \cdot 7^{24}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{10}; \quad 2^6 \cdot 7^{10} \quad bc = 2^{14} \cdot 7^{24}; \quad 2^{14} \cdot 7^{24}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{34}; \quad 2^{20} \cdot 7^{34}$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{34}$$

Ответ:  $2^{26} \cdot 7^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} \quad \text{Числитель делится на } m$$

должно делиться и числ. и знам. делиться на  $m$ ,

$$(a+b) : m \quad ((a+b)^2 - 8ab) : m ; \quad (a+b)^2 - 8ab \neq 0$$

$$(a+b) : m \Rightarrow (a+b)^2 : m$$

$$\text{получаем: } \frac{(a+b)^2 - 8ab}{m} ; \quad (a+b)^2 - 8ab \neq 0 \quad \text{и } (a+b)^2 : m$$

$$\Rightarrow -8ab : m.$$

$$2) \frac{a}{b} - \text{некокр.} \Rightarrow (a, b) = 1 \Rightarrow \text{если } a : x, \text{ где } x \in \mathbb{N},$$

$$\text{то } b \nmid x \Rightarrow (a+b) \nmid x \quad \text{T.O. } (a+b, ab) = 1$$

$$\text{Но } (a+b) : m \quad 8ab : m \Rightarrow \text{T.K. } (a+b, ab) = 1, \quad 8 : m$$

$$\text{T.O. } m \leq 8 \text{ иначе } 8 \nmid m.$$

$$3) \text{Приимер } a=1, b=4$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{1-6 \cdot 1 \cdot 4 + 4^2} = \frac{8}{50-42} = \frac{8}{8} \quad (\text{меняет сокр. на 8.})$$

Ответ:  $8 \approx m$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$$2 - 4x = 2x^2 - 5x + 3 - (2x^2 + 2x + 1)$$

a                      b

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(1 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})) = 0$$

$$(1) \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 :$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$a = b$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$4x = 4$$

$$x = \frac{4}{4}$$

$$(2) \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1, \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 0$$

$$a + 2\sqrt{ab} + b = 1$$

$$a + b = 1 - 2\sqrt{ab} \leq 1, \text{ T.k. } \sqrt{ab} \geq 0$$

$$\text{T.O. } 4x^2 - 3x + 4 \leq 1$$

Чтобы  $4x^2 - 3x + 4$  - парабола  $\Rightarrow 4x^2 - 3x + 4$  лежит выше или на  
ее вершине

$x^* = \frac{3}{8} \Rightarrow$   
(абсцисса на  
которой лежит  
вершина параболы)

$$y^* = \frac{4 \cdot 9}{64} - \frac{9}{8} + 4 = \frac{9}{16} - \frac{9}{8} + 4 = \\ = 4 - \frac{9}{16} = 3 \frac{7}{16} > 1$$

T.O. б сужает  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$  решение не им

Ответ:  $\frac{4}{4}$



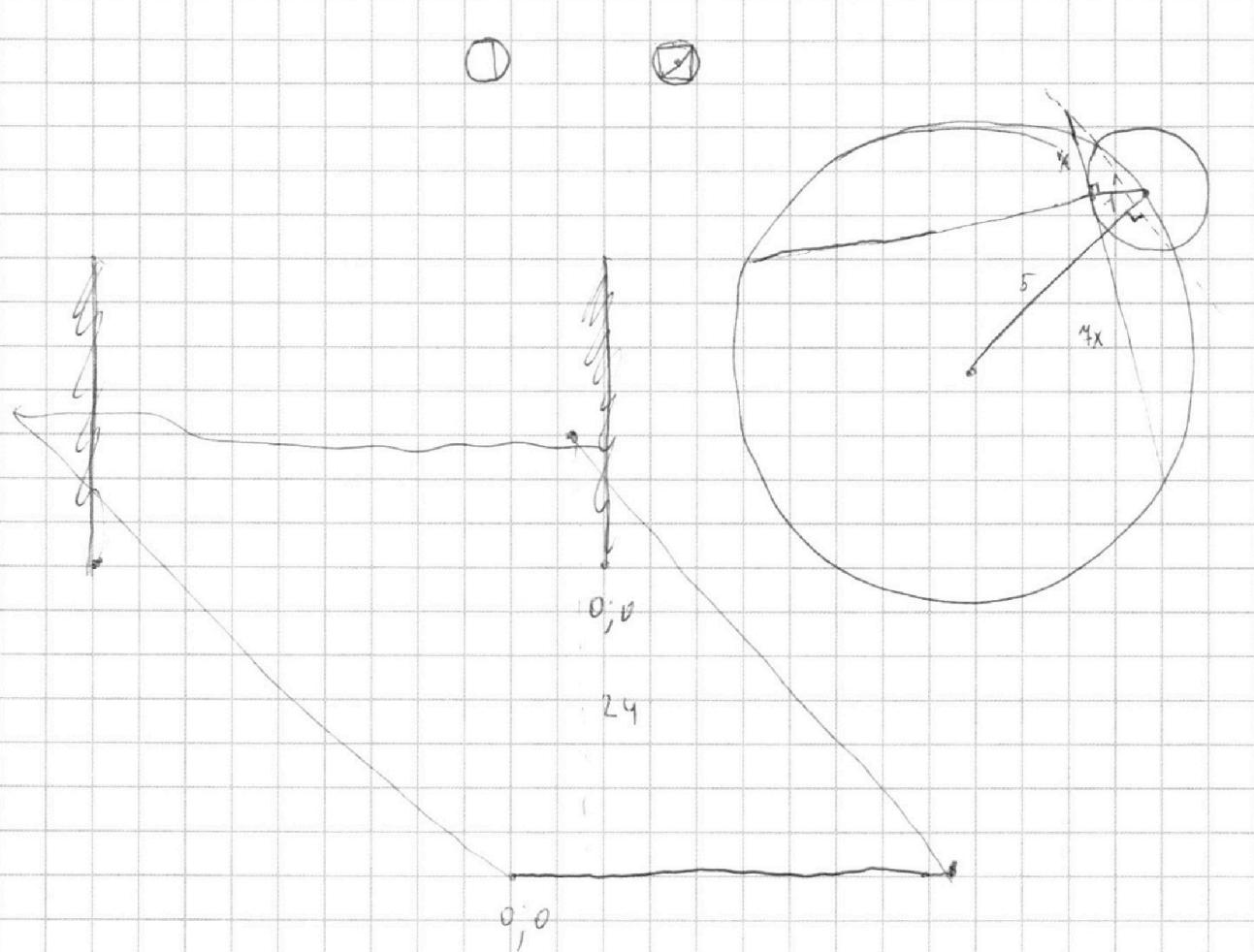
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

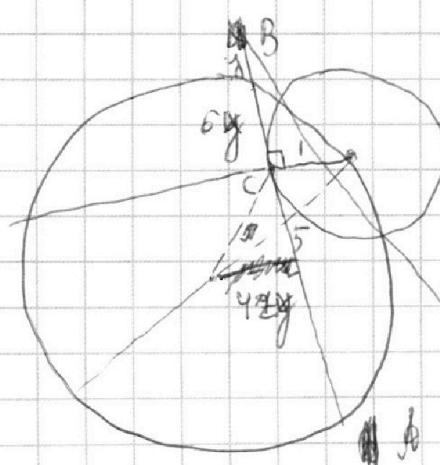
- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$



$$4x^2 =$$

$$(y+x)^2 = y^2 + 2yx + x^2$$

$$y^2 + 2yx + x^2 = y^2 + 8yx$$

$$8yx = x^2$$

$$6y = x$$



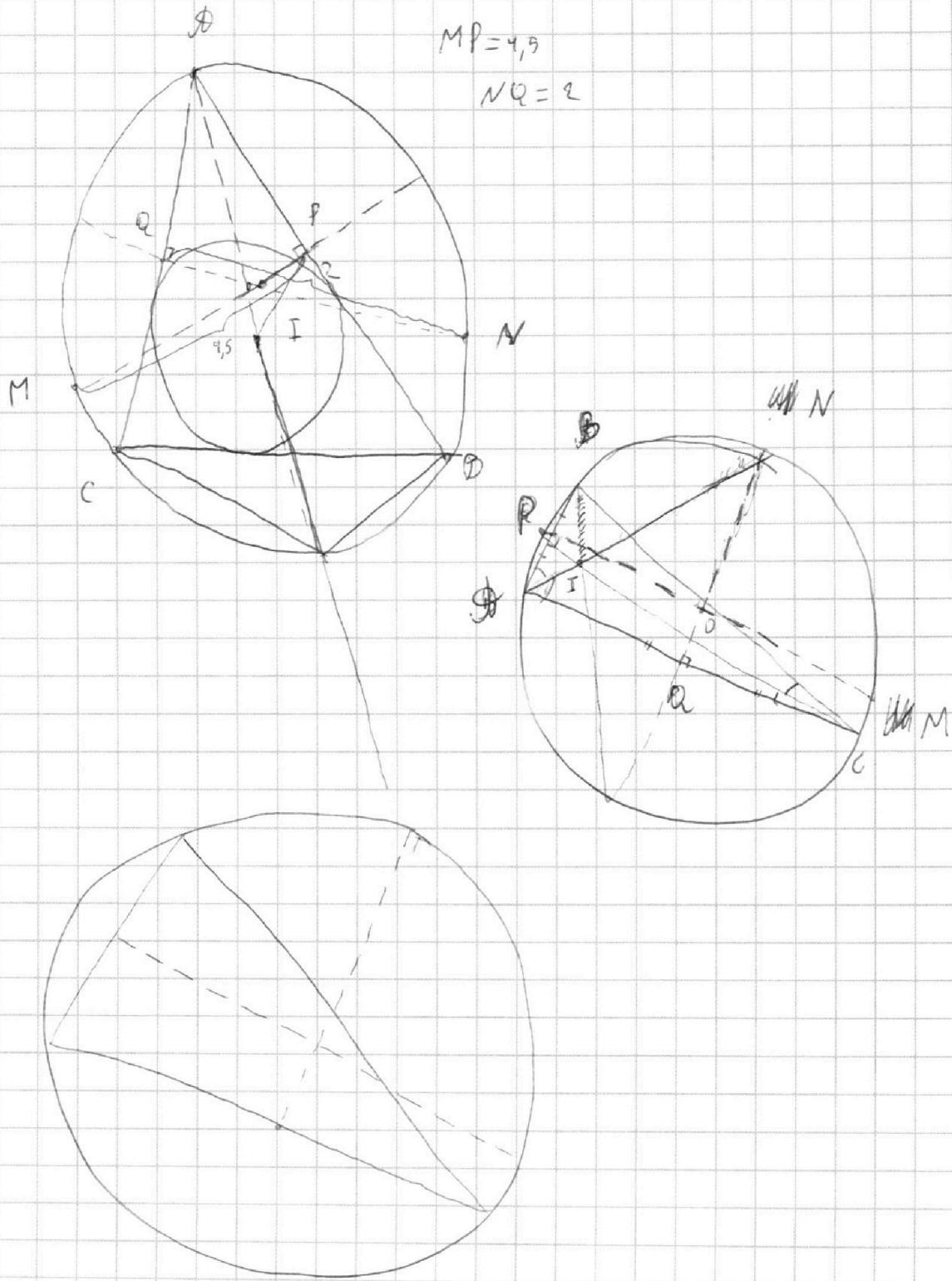
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





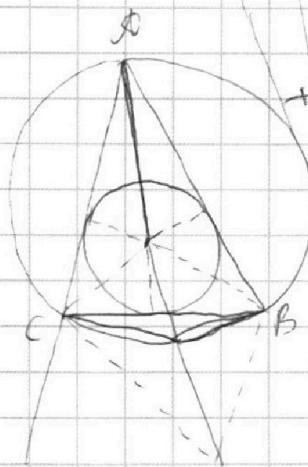
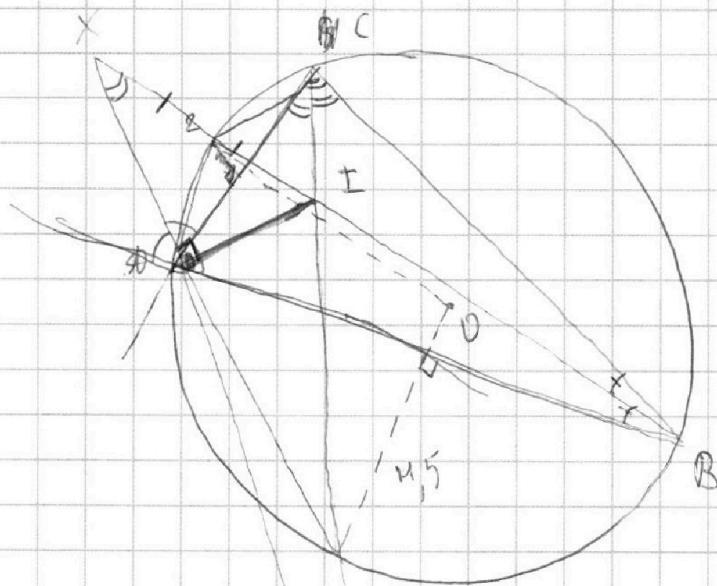
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

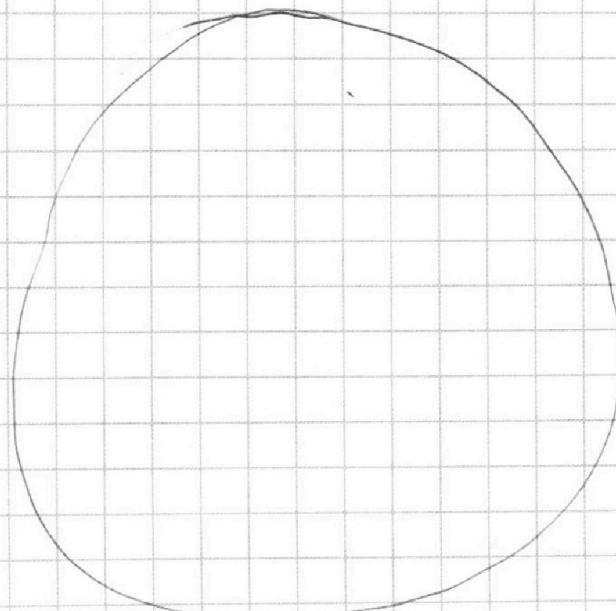
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$r^2 + (r-4,5)^2 = 2r^2 + 9r + 4,5^2 = \frac{\phi B^2}{4}$$

$$Ty = \phi B$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

 МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \quad D = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

$$x^* = \frac{5}{4}$$

$$y^* = 2 \cdot \frac{25}{16} - \frac{25}{8} + 3 =$$

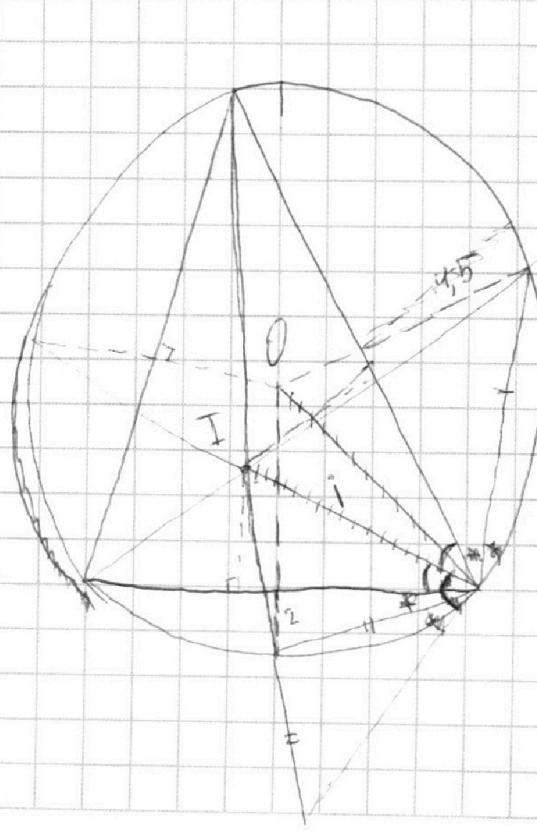
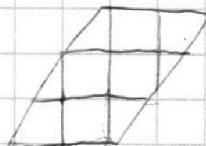
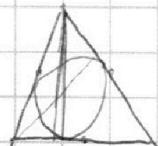
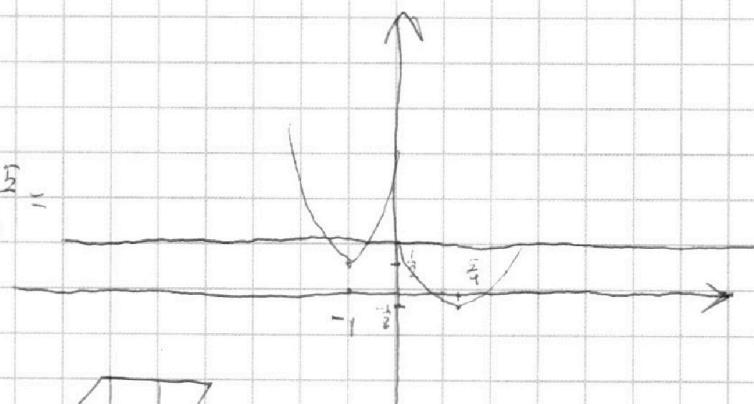
$$= \frac{25}{8} - \frac{25}{8} + 3 = 3 - \frac{25}{8} =$$

$$= -\frac{1}{8}$$

$$(2) \quad D = 4 - 8 = -4$$

$$x^* = -1 - \frac{1}{2}$$

$$y^* = \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1    2    3    4    5    6    7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = X \cdot 2^{51} \cdot 7^{64} \Rightarrow abc = X \cdot 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$\frac{25}{2}$  -

$$x^* = \frac{5}{2}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

$$\frac{(a+b)^2 - 8ab}{a+b} = a+b - \frac{8ab}{a+b}$$

$$\frac{a+b}{8ab} \quad 4x^2 - 3x + 4 +$$

$$a + 2\sqrt{ab} + b = 1$$

$\frac{8}{8}$

дз  $(a, b) = 1$  если  $a \nmid x$ , но  $b \mid x$

$$\Rightarrow a+b \mid x \Rightarrow (a+b, ab) = 1$$

~~8~~

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

~~$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \quad (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 0$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

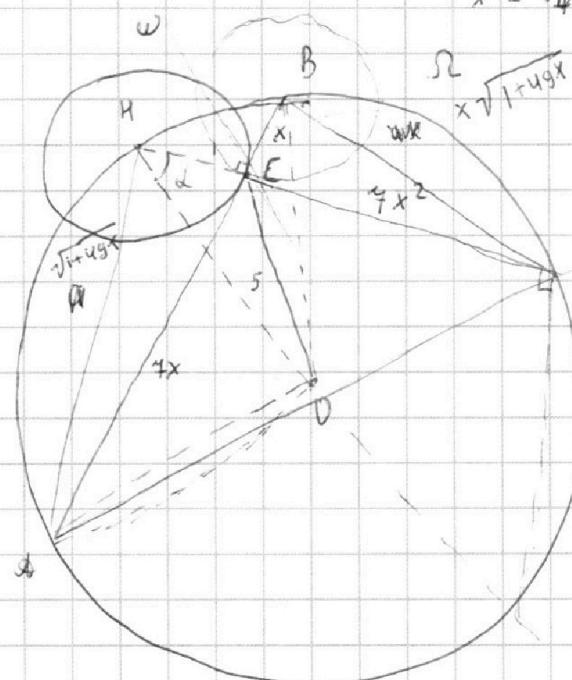
- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4x^2 = 10 \quad \cancel{5}^2$$

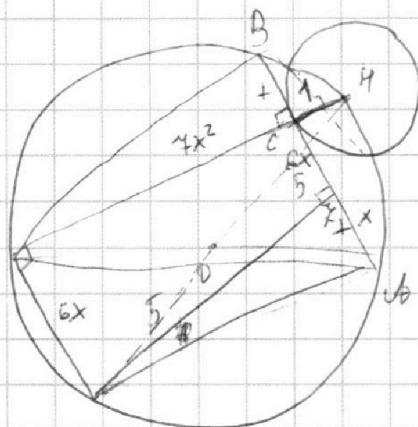
$$x^2 = \frac{9}{4} \quad \frac{3}{2}$$



$$\cos \alpha = \frac{4x^2 + 1}{10}$$

$$OC^2 = 1 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{4x^2 + 1}{10}$$

$$\begin{aligned} OC^2 &= 26 - 4x^2 - 1 = \\ &= 25 - 4x^2 \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\alpha/\beta = 4/4$

$$\alpha + \beta = 15$$

$$\gamma - \delta = 2$$

$$\gamma + \delta = 20$$

$$\beta + \gamma = 14$$

$$2\gamma = 22, \quad \gamma = 11$$

$$\alpha + \delta = 20$$

$$\alpha + \beta = 10$$

$$\beta + \gamma = 14$$

$$\gamma + \delta = 34$$

$$\alpha + \gamma \geq 34 \Rightarrow \alpha + \beta + \delta \geq 34$$

$$\alpha + \beta = 20$$

$$\alpha + \beta = 10$$

$$2\alpha = 30 \Rightarrow \alpha = 15$$