МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1

Пусть $a = 2^x \cdot 7^y$; $b = 2^z \cdot 7^w$; $c = 2^m \cdot 7^n$

Тогда
$$\begin{aligned} x + z &\geq 14 \\ z + m &\geq 17 \\ x + m &\geq 20 \end{aligned} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &\geq 14 - z \\ z &\geq 17 - m \\ m &\geq 20 - x \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2(x+z+m) \geq 51$$

Т.к. x, z, m целые и ≥ 0, то

$x+z+m \geq 26$

Пример, когда $x+z+m = 26$:

$x = 9$; $z = 5$; $m = 12$

$x+z = 14$

$z+m = 17$

$x+m = 21$

и

$y + w \geq 10$

$w + n \geq 17$

$y + n \geq 37$

$\Downarrow$

$y + n + w \geq 37$

Пример, когда $y+n+w = 37$:

$y = 17$; $w = 0$; $n = 20$;

$17 + 0 \geq 10$

$0 + 20 \geq 17$

$17 + 20 \geq 37$

Значит $\min abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~a~~ Если $\frac{a}{b}$ – несократимая, то НОД $(a;b)=1$

Тогда нам нужно найти максимальный

НОД $(a+b;\ a^2+b^2-6ab)$. $a^2+b^2-6ab=(a+b)^2-8ab$

Если a и b – взаимно простые, то у числа $a+b$ нет никаких общих делителей с числами a и b, значит НОД $(a+b;ab)=1$. Посмотрим на выражение $(a+b)^2-8ab$ по модулю любого делителя $a+b$: $(a+b)^2-8ab\equiv 0-8\equiv -8$.

Значит максимальное число m, на которое можно сократить $a+b$ и ~~a^2+~~ $(a+b)^2-8ab$ не больше восьми. Пример для $m=8$:

сокращается на 8

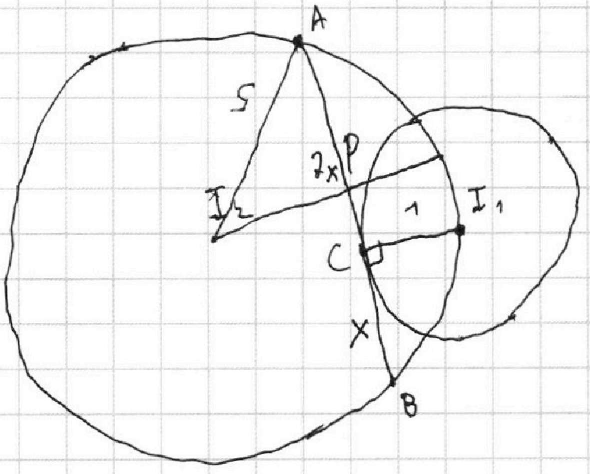
$$\frac{5+3}{5^2-6\cdot5\cdot3+3^2}=\frac{8}{34-90}=\frac{8}{-64}\Rightarrow\frac{1}{-8}$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $BC=x$, тогда $AC=7x$. Посчитаем отрезок AI_1:

Т.к AB-касательная, то $\angle ACI_1=90^\circ$, значит $AI_1=\sqrt{1+49x^2}$.

Проведём радиус из точки I_2, который разделит хорду AB пополам, пусть он пересечёт AB в точке P.

$AP=PB=4x$ и $\angle I_2PA=90^\circ$. Обозначим $\angle I_2AP$ за $\angle\beta$ и $\angle CAI$ за $\angle\alpha$ и найдём $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$:

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+49x^2}}$ $\qquad \sin\beta=\frac{\sqrt{25-16x^2}}{5}$ $\qquad$ Найдем $\cos(\alpha+\beta)$:

$\cos\alpha=\frac{7x}{\sqrt{1+49x^2}}$ $\qquad \cos\beta=\frac{4x}{5}$ $\qquad \cos(\alpha+\beta)=\frac{28x^2}{5\sqrt{1+49x^2}}-\frac{\sqrt{25-16x^2}}{5\sqrt{1+49x^2}}$

$I_2I_1=5$, т.к I_1 лежит на ω.

Из $\triangle I_2I_1A$ выразим по т. косинусов сторону I_1I_2:

$$25=25+1+49x^2-2\left(\frac{28x^2}{5\sqrt{1+49x^2}}-\frac{\sqrt{25-16x^2}}{5\sqrt{1+49x^2}}\right)\cdot 5\cdot\sqrt{1+49x^2}$$

Откуда:

$0=1+49x^2-56x^2+2\sqrt{25-16x^2} \Rightarrow 7x^2-1=2\sqrt{25-16x^2} \Rightarrow 49x^4-14x^2+1=$
$=100-64x^2$

Пусть $x^2=a$, тогда ур-е имеет вид: $49a^2+50a-99=0$

$D=250+4\cdot 49\cdot 99$ $\qquad a_{полож}=\frac{-50+\sqrt{250+4\cdot 49\cdot 99}}{98}$

Откуда $X = \sqrt{\dfrac{-50 + \sqrt{250 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{98}}$

Ответ: Значит $AB = 8\sqrt{\dfrac{-50 + \sqrt{250 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{98}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$$

Пусть $a=\frac{2x^2-5x+3+2x^2+2x+1}{2}=$

$=2x^2-1{,}5x+2$; Тогда наше ур-е имеет вид:

$$\sqrt{a-3{,}5x+1}-\sqrt{a+3{,}5x-1}=2-7x$$

возведём всё в квадрат:

$$2a-2\sqrt{a^2-(3{,}5x-1)^2}=(7x-2)^2$$

$$2a-\sqrt{4a^2-(7x-2)^2}=(7x-2)^2$$

пусть $b=7x-2$:

$2a-\sqrt{4a^2-b^2}=b^2 \Rightarrow 2a-b^2=\sqrt{4a^2-b^2}$. Снова возведём всё в квадрат: $4a^2-4ab^2+b^4=4a^2-b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^4-b^2(4a-1)=0 \Rightarrow b^2(b^2-4a+1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (7x-2)^2((7x-2)^2-4a+1)=0$

Сначала решим это ур-е и потом проверим корни на исходном:

1) $7x-2=0$

$7x=2$

$x=\frac{2}{7}$

2) $49x^2-14x+4+1-8x^2+6x-8=0$

~~$41x^2-12x-3=0$~~

~~$48x^2-8x-3=0$~~

~~$D=64+12\cdot 48$~~

~~$x_1=8+\sqrt{64+12\cdot 48}$~~

$41x^2-8x-3=0$

$D=64+4\cdot 3\cdot 41$

$x_1=\frac{8+\sqrt{64+4\cdot 3\cdot 41}}{82}$

$x_2=\frac{8-\sqrt{64+4\cdot 3\cdot 41}}{82}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2x^2-5x+3 \geq 0$
$D=1$
$x_1=1$ $x\in(-\infty;1]\cup[1{,}5;+\infty)$
$x_2=1{,}5$

$2x^2+2x+1\geq 0$
т.к $D<0$

1) Проверим $x_3=\frac{2}{7}$:

$$\sqrt{2\cdot\frac{4}{49}-\frac{10}{7}+3}-\sqrt{2\cdot\frac{4}{49}+\frac{4}{7}+1}=0$$

$$\cancel{2\cdot\frac{4}{49}}-\frac{10}{7}+3=\cancel{2\cdot\frac{4}{49}}+\frac{4}{7}+1$$

$$2=2.$$

2) $X_1=\frac{8+\sqrt{64+4\cdot3\cdot41}}{82}$

$$\cancel{\sqrt{2\cdot\left(\frac{8+\sqrt{64+4\cdot3\cdot41}}{82}\right)^2-}}$$

$2-7\cdot\left(\frac{8+\sqrt{64+4\cdot3\cdot41}}{82}\right)<0.$

значит $7-2\cdot\left(\frac{8+\sqrt{64+4\cdot3\cdot41}}{82}\right)>0.$

поэтому $\sqrt{2\cdot\left(\frac{8+\sqrt{64+4\cdot3\cdot41}}{82}\right)^2-5\cdot\frac{8+\sqrt{64+4\cdot3\cdot41}}{82}+1}-\sqrt{2\cdot\left(\frac{8+\sqrt{64+4\cdot3\cdot41}}{82}\right)^2+2\cdot\frac{8+\sqrt{64+4\cdot3\cdot41}}{82}+1}$

<0, а значит корень нам подходит. Т.к корни X_1, X_2, X_3 можно считать корнями уравнения

$$\left|\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}\right|=\left|2-7x\right| \quad \text{и} \quad \frac{8+\sqrt{64+4\cdot3\cdot41}}{82}<\frac{8+24}{82}<1$$

3) $X_2=\frac{8-\sqrt{64+4\cdot3\cdot41}}{82}<0$

$7x_2<0$, значит $2-7x_2>0$, следовательно

$2x_2^2-5x_2+3>2x_2^2+2x_2+1$, поэтому этот корень тоже нам подходит и $X_2\notin[1;1{,}5)$

Ответ: $\frac{2}{7}$; $\frac{8+\sqrt{64+4\cdot3\cdot41}}{82}$; $\frac{8-\sqrt{64+4\cdot3\cdot41}}{82}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

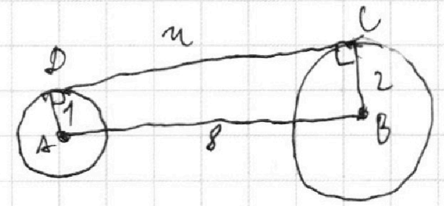
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

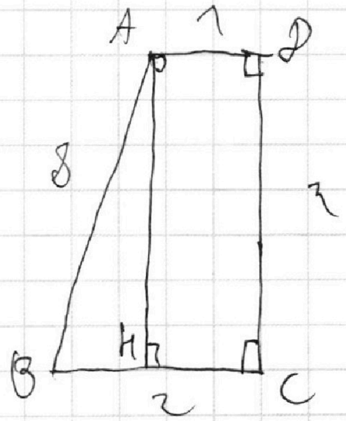
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Следовательно, чтобы было ровно 2 решения, то прямая $y = ax+10$ в должна касаться обоих окружностей. Рассмотрим все общие касательные этих окружностей и посчитаем все возможные значения a:

1)

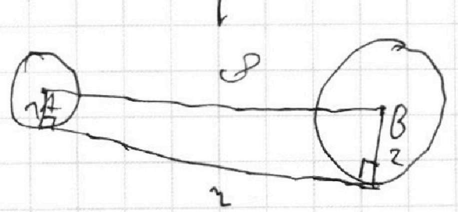


~~$AC^2 = \ldots$~~ $DC = r$



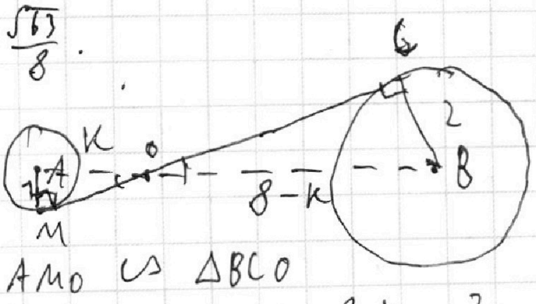
$AH = AD$, т.к. $ADCH$ - прямоугольник.
Значит $r = \sqrt{64 - BH^2}$
$BH = 2 - CH$, $CH = AD$, т.к. $ADCH$ - прямоуг., значит
$r = \sqrt{64-1} = \sqrt{63}$
~~рассмотрим~~ найдём к - цент наклона a:
для этого рассмотрим прямую $y = ax$, где в точке $x=0$ y равно 0, а в точке $x=8$ y равно $\sqrt{63}$:
$\sqrt{63} = 8a$
$a = \frac{\sqrt{63}}{8}$

2)



Случай 2 симметричен первому, значит в этом случае $a = -\frac{\sqrt{63}}{8}$.

3)



$\triangle AMO \sim \triangle BCO$ по 2 углам
$AO = k$; $OB = 8-k$.

$\Rightarrow \frac{8-k}{k} = \frac{2}{1}$

$\frac{8}{k} - 1 = 2$

$\frac{8}{k} = 3$; $k = \frac{8}{3}$

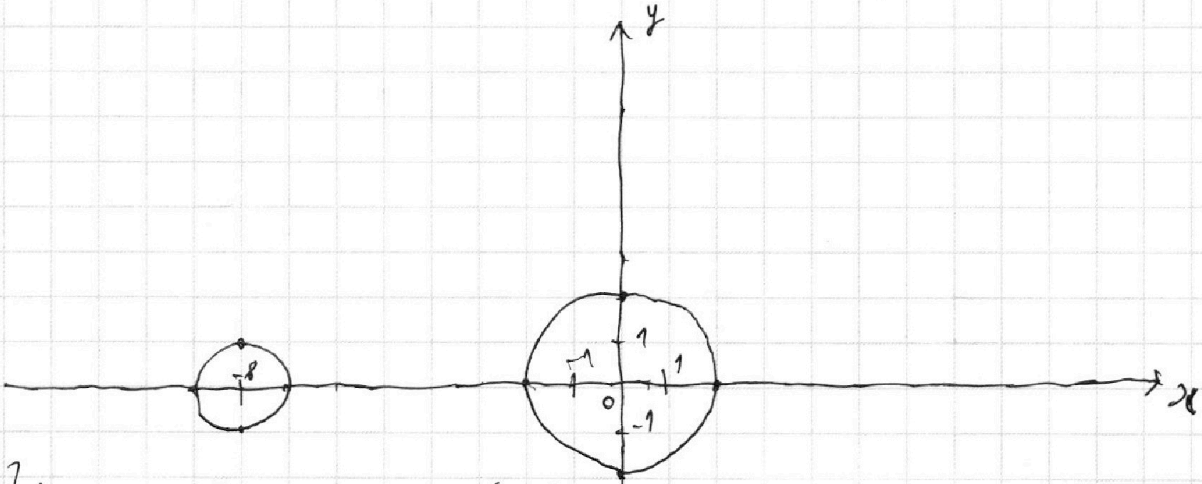
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ax-y+10b=0 \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\leq 0 \end{cases}$$



Заметим, что если точка $(x;y)$ ~~он~~ находится внутри одной из окружностей (они никак не пересекаются), то она подходит условию:

$$((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\leq 0$$

Т.к ~~для одной скобки она находится~~ одна скобка будет положительна, а другая ≤ 0.

Значит если прямая $y=ax+10b$ пересекает одну окружность в двух точках, то тогда решений будет бесконечно много. Если же прямая $y=ax+10b$ не проходит через окружности или же касается только одной из них, то тогда решений ≤ 1.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Значит $MO^2 = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 1}$; $CO^2 = \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 - 4}$

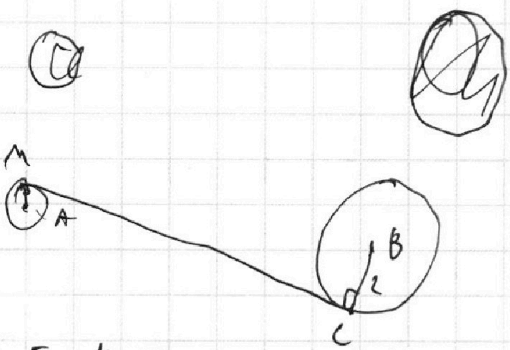
Отсюда $CM = 3\sqrt{\frac{64-9}{9}} = \sqrt{55}$

Найдем a:

$\sqrt{55} = 8a$

$a = \frac{\sqrt{55}}{8}$

4)



Случай 4 симметричен третьему, поэтому $a = -\frac{\sqrt{55}}{8}$

Других общих касательных у этих окружностей нет, значит мы нашли все значения a, потому что коэффициент 10b в $y = ax + 10b$ может параллельно перенести нашу прямую в любую прямую параллельной нашей.

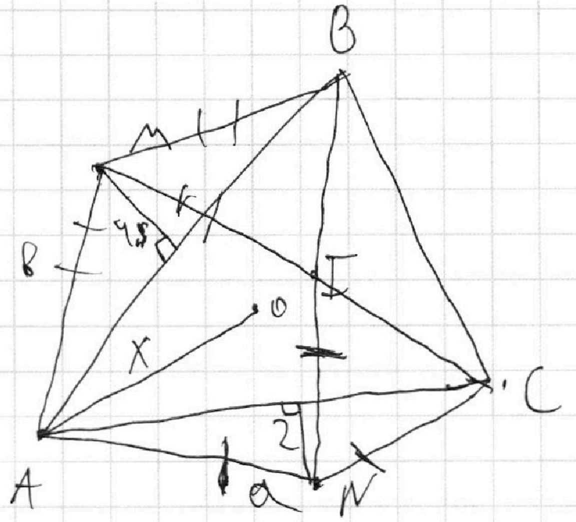
Ответ: ~~$a = \pm\sqrt{\frac{55}{8}}$;~~ $\pm\frac{\sqrt{55}}{8}$; $\pm\frac{\sqrt{63}}{8}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



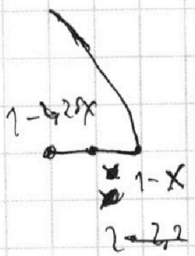
O – центр описанной

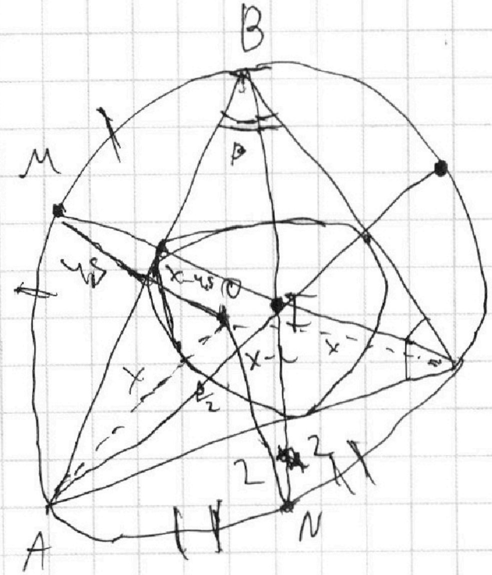
По лемме о трезубце $NI = NC = AN$ и $IM = MB = AM$. Пусть $OA = x$, тогда $AC^2 = 2x^2 - 2\cdot\cos 2\angle B\, x^2$ и $AN^2 = 2x^2 - 2\cos\angle B\, x^2$, $\cancel{AC^2 = 2AN^2 + 2\cdot\cos B\cdot AN^2 = (4x^2 - 4\cos\angle B x^2)(1+\cos B)}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





$2x^2-5x+3 \geq 0$

$D = 25 - 8 \cdot 3 = 1$

$x = \frac{5 \pm 1}{4}$

$2a - b^2 = \sqrt{4a^2 - b^2}$

$4a^2 - 4ab^2 + b^4 = 4a^2 - b^2$

$b^4 - 4ab^2(4a-1) = 0$

$b^2(b^2 - 4a$

$2a - \sqrt{4a^2-b^2} = b^2$

$2a - b^2 = 2\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$

$2a - b^2 = \sqrt{4a^2 - b^2}$

$8 + \sqrt{64 + 1264}$

$= 420 + 746 = 556$

$25 - 4 \cdot 6 = 24$

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2 - 7x$

$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 - 2$

$4 - 14x + 49x^2$

$(x+1) + x$

$2a - \sqrt{4a^2 - b^2} = b^2$

$2a - \sqrt{(2a-b)(2a+b)} = b^2$

$2a \quad 1 - 2\sqrt{a^2 - (3{,}5x-1)^2} =$

$= 4 - 14x + 49x^2$

$2a - 2\sqrt{a^2 - \frac{(7x-2)^2}{4}} = (2-7x)^2$

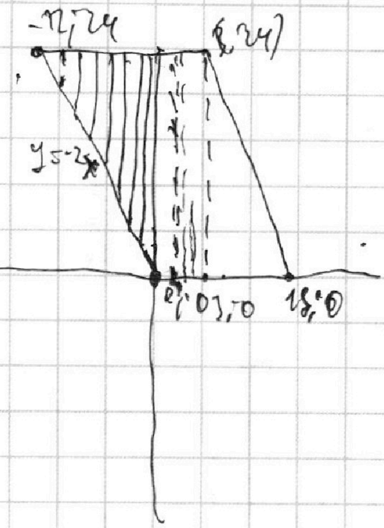
$2a - 2\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = b^2$

$4a^2 - 4a^2 + b^2$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$

$\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$ нет общих $\underset{a\,u\,b}{\text{общих}}$ общих a и b,

НОД $\left((a+b);(a+b)^2-8ab\right)$ если a и b - взаимно простые.

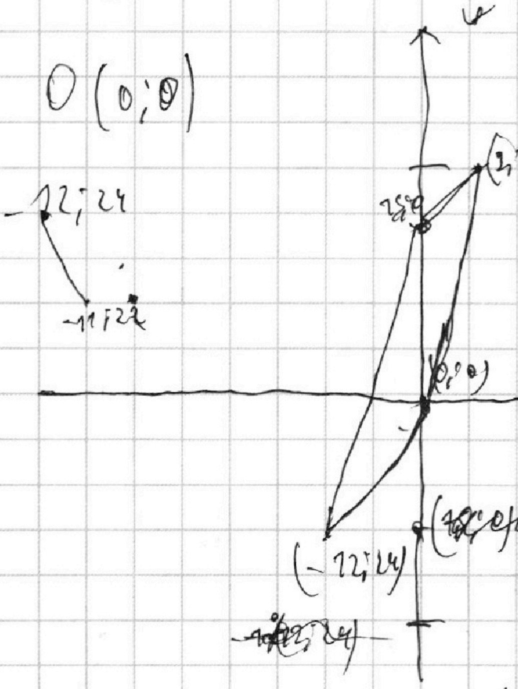


$S\,f3\,\cancel{?}=8\cdot5\cdot3$

~~S f3 ; 64 8·5·3~~

$$\begin{cases} \cancel{ax-y+20b=0} \\ \cancel{\left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right)\le 0} \end{cases}$$

$O(0;0)$



Если $x\ge 3$, то $y\le -2x+30$

Если $x\le 0$, то $y\ge -2x$

$\cancel{-2x}\ \cancel{30}+30$

$-2x+30$

24

$2(x_2-x_1)+y_2-y_1=12$

Если $x_2-x_1=1$, то

$2\quad y_2-y_1=10$

$10;0$

$24;14$

14 точек.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

ab делится на $2^{14}\cdot 7^{10}$

bc дел. на $2^{17}\cdot 7^{17}$

ac дел. на $2^{20}\cdot 7^{37}$

$abc\ min = ?$

$\cancel{a=2^{d}\cdot 7^{f}}$

$a=2^{x}\cdot 7^{y}$

$b=2^{z}\cdot 7^{w}$

$c=2^{m}\cdot 7^{n}$

$\cancel{x+z=14}$

$\cancel{z+m=17}$

$x+z\geq 14$

$z+m\geq 17$

$x+m\geq 20$

$\cancel{min\ x+y+z}$

$y+w\geq 10$

$w+n\geq 17$

$y+n\geq 37$

$m-x\geq 3$

$x+m\geq 20$

$\cancel{x\ m=x+3}$

$2x+3\geq 20$

$2x\geq 17$

$x\ min=9$

$m\ min=12$

$z\ min=5$

26

$y\geq 10-w$

$\cancel{w\geq 17-n}$

$w\geq 17-n$

$y+17-n\geq 10$

$y\geq n-7$

$\cancel{n\geq 37-y}$

$y\geq 37-n$

$y\geq 10-w$

$w\geq 17-n$

$n\geq 37-y$

$2(y+w+n)\geq$

≥ 64

$y+w+n\geq 32$

$y+w+n\geq 37$

~~y=10~~

$17+20$

$x+z\geq 14$

$z+m\geq 17$

$x+m\geq 20$

$\cancel{x\geq 14-z}$

$z\geq 14-x$

$\cancel{14-x}\ m\ \cancel{z}\geq 17-\cancel{z}$

$x\geq 20-m$

$y=10-w$

$\cancel{w}\ 10-w+n=17$

$\frac{a}{b}$ - несократимая

наиб $n=?$

НОД $(a,b)=7$

$x+z+m\geq 51-x-z-n$

$2(x+z+m)\geq 51$

$x+z+n\geq \frac{51}{2}$

$x+z+m\overset{?}{=}26$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$

$\frac{a+b}{(a-b)^2-3ab}$

Наиб. НОД $(a+b;(a-b)^2-3ab)=?$

$(\cancel{a+b})(b\ \cancel{(a+b)}\ a(a-3b)+$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

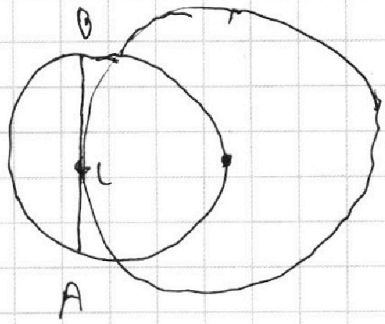
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

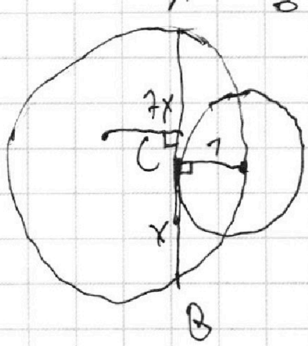
МФТИ

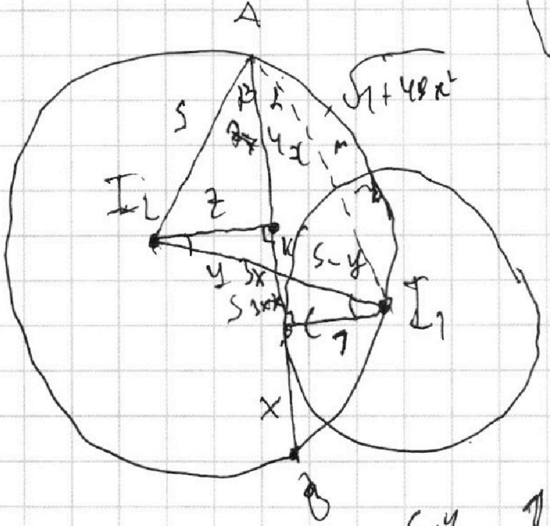
№4

$AC:CB=7$



$AB=?$





$z=\sqrt{25-16x^2}$

$m=\sqrt{1+49x^2}$

$$\frac{1}{5-y}=\frac{\sqrt{25-16x^2}}{y}$$

$$\frac{5-y}{y}=\frac{1}{z}=\frac{3x-k}{k}$$

$\cos\alpha=$

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+49x^2}}$

$\sin\beta=\frac{\sqrt{25-16x^2}}{5}$

$$\frac{3x-k}{k}=\frac{1}{\sqrt{25-16x^2}}$$

$k=(3x-k)\sqrt{25-16x^2}$

$\cos\alpha=\frac{7x}{\sqrt{1+49x^2}}$

$k^2=(3x-k)^2(25-16x^2)$

$\cos\beta=\frac{4x}{5}$

$k^2=(9x^2-6xk+k^2)(25-16x^2)$

$\cos(\alpha+\beta)=$

$=\frac{28x^2}{5\sqrt{1+49x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+49x^2}}\cdot\frac{4x}{5}=$

$25=25+1+49x^2-2\cdot\left(\frac{28x^2}{5\sqrt{1+49x^2}}-\frac{4x}{5\sqrt{1+49x^2}}\right)\cdot 5\sqrt{1+49x^2}$

$1+49x^2-56x^2+8x=0$

$7x^2-8x-1=0$

$D=64+4\cdot7=64+28=92$

$\sqrt{D}=\sqrt{92}$

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$

$\frac{2x^2-5x+3+2x^2+2x+1}{2}=2x^2-1{,}5x+2=a$

$\sqrt{a-3{,}5x+1}+\sqrt{a+3{,}5x-1}=2-7x$

$a-3{,}5x+1+a+3{,}5x-1+2\sqrt{a^2-(3{,}5x-1)^2}=4-28x+49x^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\left(\left((x+8)^2+y^2-1\right)\right)\left(x^2+y^2-4\right)\le 0$$

$$\frac{4}{1-\cos\gamma}-\frac{4}{1-\cos\gamma}\cdot\cos\beta=$$
$$=\frac{4}{1-\cos\beta}-\frac{4}{1-\cos\beta}\cdot\cos\gamma$$

$$\sqrt{2b^2+2\cos\beta\, b^2}$$

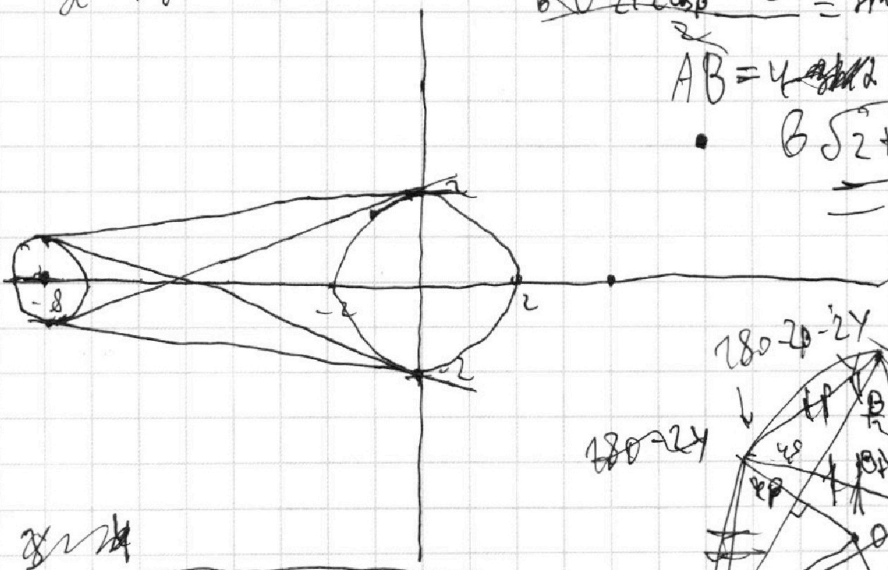
$$x^2+y^2=4$$

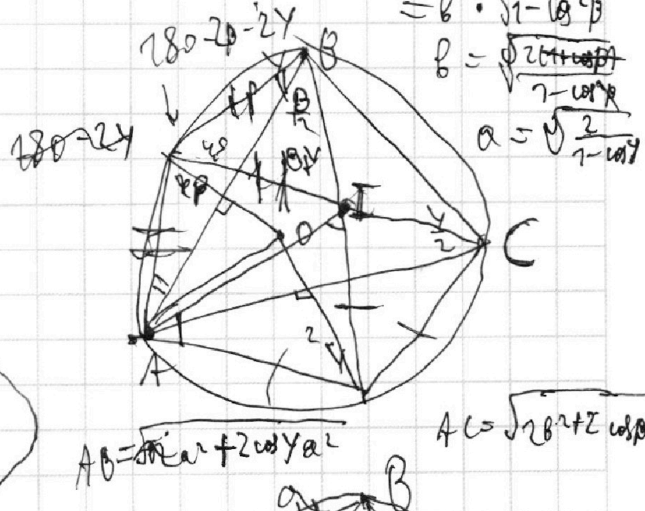
$$\frac{b\sqrt{2+2\cos\beta}\cdot 2}{2}=\sin\gamma\cdot\frac{b^2}{2}$$

$$AB=4$$

$$b\sqrt{2+2\cos\beta}=$$
$$=b^2\cdot\sin\beta$$

$$\sqrt{2+2\cos\beta}=$$
$$=b\cdot\sqrt{1-\cos^2\beta}$$
$$b=\sqrt{\frac{2}{1-\cos\beta}}$$
$$a=\sqrt{\frac{2}{1-\cos\gamma}}$$





$$AI=\sqrt{a^2+\frac{4}{1+\cos\gamma}-2\cdot\cos\beta\cdot\frac{2}{1-\cos\gamma}}$$

$AI=$

$$=\sqrt{\frac{4}{1-\cos\beta}-2\cos\gamma\cdot\frac{2}{1-\cos\beta}}$$

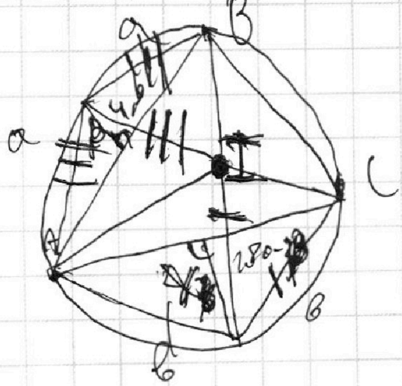
$$AB=\sqrt{2a^2+2\cos\gamma\, a^2}$$

$$AC=\sqrt{2b^2+2\cos\beta\, b^2}$$

$y=ax+b$

$$(2+a)(x_2-x_1)=12$$

$$64-1=63$$
$$\sqrt{63}$$



$y=ax+b$

$$-\sqrt{63}=a\cdot 8$$
$$a=\frac{-\sqrt{63}}{+8}$$

$$\sqrt{64-9}=$$
$$=\sqrt{55}$$

$180-2\beta-2\gamma$

$$-\sqrt{55}=-8a$$
$$a=\frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$2x_2-2x_1=12-y_2+y_1$$
$$2x_2-2x_1=12-ax_2+b+$$
$$2(x_2-x_1)=12-a(x_2-x_1)\quad ax_1+b$$

$$\frac{\sin\gamma\cdot b^2}{2}+\frac{\sin\beta\cdot a^2}{2}$$

$$(180-2\gamma)\quad\frac{\sin\gamma\cdot a^2}{2}+\frac{\sin\beta\cdot b^2}{2}$$

$AI=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

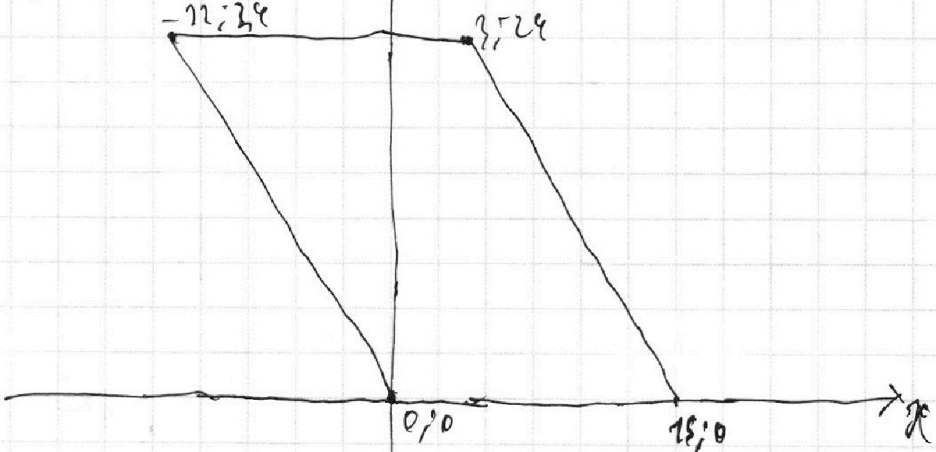
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

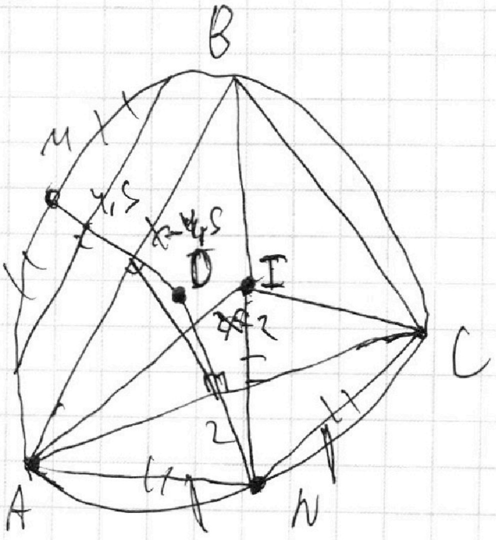
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{1-\cos\gamma} - \frac{\cos\beta}{1-\cos\gamma} = \frac{1}{1-\cos\beta} - \frac{1}{1-\cos\beta}\cdot\cos\gamma$$

$$\cancel{\frac{1}{1-\cos\gamma}(1-\cos\beta) = \frac{1}{1-\cos\beta}(1-\cos\gamma)}$$





$\cancel{(x_2 - x_1) = m}$ $\qquad x_2 - x_1$

$y = ax + 10b$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \le 0 \end{cases}$$

$\cos\alpha = 1 - x$

$\cos\beta = 1 - 2{,}25x$

$\cos\gamma = \cos(\pi$