



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



$$b=2^5 \quad a=7^{16} \cdot 2^5 \quad c=7^{25} \cdot 2^5$$

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$b=2^5$$

$$c=7^{25} \cdot 2^{10}$$

$$a=7^{16} \cdot 2^{13}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$ $\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 : 2^{5+17+23} \cdot 7^{11+22+39}$
 $bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$ $(abc)^2 : 2^{55} \cdot 7^{66}$
 $ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$ $\Rightarrow (abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{66} \cdot k$, где k - натуральное

числом $(abc)^2$

т.к. $(abc)^2$ все делителем простого множителя делим

Значит $k=2 \Rightarrow$ т.к. 2^{55} , $k_{\min}=2$

$\Rightarrow (abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{66}$ - делимость

$\Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{33}$

Значит, что при этом $ac : 7^{39} \Rightarrow abc : 7^{35}$

$\Rightarrow abc \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$

Также т.к. $a \cdot c : 2^{23}$, $ab : 2^{15}$; $bc : 2^{17}$

Значит a, b, c имеют на-максимальном делителем

входящим $2 \mid a, n_b - \text{дел}, n_c - \text{дел}$

еще

$$\begin{cases} n_a + n_b \geq 15 \\ n_b + n_c \geq 17 \\ n_c + n_a \geq 23 \end{cases}$$

$\Rightarrow n_c + n_b - n_b - n_a \geq 2$

$n_c - n_a \geq 2$

$\Rightarrow n_c + n_a + n_c - n_a \geq 25$

$2n_c \geq 25$, т.к. n_c - целое,

$n_c \geq 13$, тогда $n_a \geq 10, n_b \geq 5$

Значит m_a, m_b, m_c - максимальные делители входящим $7 \mid a, b, c$ соотв. $\Rightarrow m_a + m_c \geq 39, m_a + m_b \geq 11, m_c + m_b \geq 16$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$m_c + mb - mb - mc \geq 7$$

$$m_c - mc \geq 7$$

$$m_c - m_a + m_c + m_a \geq 46$$

$$2m_c \geq 46$$

$$m_c \geq 23 \Rightarrow m_a \geq 16 \Rightarrow m_b \geq 0$$

возьмем минимальные значения m и n для каждого

имеем:

пусть $a = 2^{10} \cdot 7^{16}$

$$b = 2^5$$

$$c = 2^{15} \cdot 7^{23}$$

тогда $ab = 2^{15} \cdot 7^{16} : (2^{15} \cdot 7^{11})$

$$bc = 2^{19} \cdot 7^{23} : (2^{17} \cdot 7^{18})$$

$$ac = 2^{25} \cdot 7^{39} : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\Rightarrow a \cdot b \cdot c = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Ответ. $2^{28} \cdot 7^{39}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$, если a и b взаимно просты, то

$$(a+b) : m$$

$$(a^2-7ab+b^2) : m$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} \Rightarrow ((a+b)^2-9ab) : m$$

$$\text{т.к. } (a+b) : m \Rightarrow (a+b)^2 : m^2 (a : m^2)$$

$$\Rightarrow 9ab : m$$

$$\text{пусть } \begin{cases} a : m \\ ab : m \end{cases}$$

Рассмотрим второй случай

$$\text{если } ab : m \Rightarrow 7ab : m \Rightarrow (a^2-7ab+b^2) : m,$$

$$(a^2+b^2) : m$$

$$\text{т.к. } a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2 : m^2$$

$$\begin{matrix} a^2+b^2 : m \\ 2ab : m \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a^2-2ab+b^2 : m \\ (a-b)^2 : m \end{matrix}$$

\Rightarrow если m - простое число, то $a-b : \sqrt{m}$, если нет,

$$a-b : m \text{ (т.к. делимость числа (напрямую))}$$

$$\Rightarrow \text{т.к. } a+b : m, \Rightarrow \sqrt{m}$$

$$\text{пусть } a+b+a-b=2a : m \text{ или } : \sqrt{m}$$

$$\text{или } a+b-(a-b)=2b : m \text{ или } : \sqrt{m}$$

пусть $2 : \sqrt{m}$ или m , тогда $a, b : \sqrt{m}$ и b делит a и b делит a

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

обычно десятичные m или \sqrt{m} $\Rightarrow \frac{a}{b}$ - иррациональное - упрощаем

пусть $g : m$ или $2 : m$ или $2 : \sqrt{m}$

g - число, m - минимальное, $m = g$:

пример при $a = 4$, $b = 5$ $\frac{4}{5}$ - иррациональное

$$\frac{4+5}{16-140+25} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$$

Ответ: $m = g$.

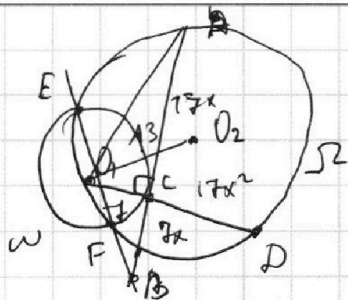
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть O_1 и O_2 - центры окр. ω и Ω соответственно; Проведем O_1C из O_1 в C и Ω и проведем O_2D

тогда $AC \cdot CB = O_1C \cdot CD$ так как пересеклись хорды

$$\Rightarrow r_1^2 \cdot r_2^2 = r_1^2 \cdot CD \Rightarrow CD = r_2^2$$

Замечает, что радиусы между центрами $O_1, O_2 = 13$

(прямые Ω)

Проведем отрезок хорды EF где окр ω и Ω

они $\perp O_1O_2$, тогда \angle который нас интересует

$$\angle AOB = \angle O_2O_1D \text{ (по стороне)}$$

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1 - 9x \geq 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 + 2(1 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

Рассмотрим 2 варианта:

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 + 2(1 - 9x) \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-6x = 3x + 81x^2 - 18x + 2(1 - 9x) \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-2(1 - 9x) \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 81x^2 - 9x;$$

$$(9x - 1) \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x(9x - 1)$$

$$9x - 1 = 0$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x \quad \text{и} \quad 9x > 0$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 81x^2$$

Рассмотрим $3x^2 + 3x + 1 = 81x^2$

$$78x^2 - 3x - 1 = 0;$$

$$D = 9 + 312 = 321$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{321}}{156}$$

Проверим условие $\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1 - 9x \geq 0$

или $9x - 1 = 0 \quad \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 0 \geq 0$

или $\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 9x \quad 9x + 1 - 9x \geq 0$

Проверим ОДЗ: или $x = \frac{1}{9} \quad \frac{1}{9} < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ не подходит;

ОДЗ: $3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$

Група 1-го:

$D = 36 - 24 = 12$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} =$

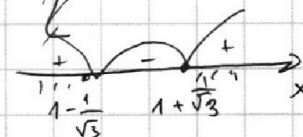
$= 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

$= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$

$D = 9 - 12 < 0$

\Rightarrow всегда > 0

$\Rightarrow (\sqrt{3x-1}) \sqrt{3x+1}$



(Група 1-го)

ОДЗ: $x \in (-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup$

$\cup [1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{нпр } x = \frac{3 + \sqrt{321}}{156}$$

$$17 < \sqrt{321} < 18 \Rightarrow x \approx \frac{3+18}{156} = \frac{21}{156} = \frac{7}{52} < 1 \Rightarrow \text{н}$$

решение в интервале $[1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} \quad \sqrt{3} \approx 1,7$$

$$\Rightarrow \frac{0,7}{1,7} > \frac{7}{52}$$

$$\text{нпр } x = \frac{3 - \sqrt{321}}{156} < 0 \Rightarrow < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ т.к. } 9x > 0$$

$x > 0$
 $\Rightarrow \text{н не подходит}$

нр/нр/нр/нр/нр

$$\text{Или: } x = \frac{1}{5}; \frac{3 + \sqrt{321}}{156}$$

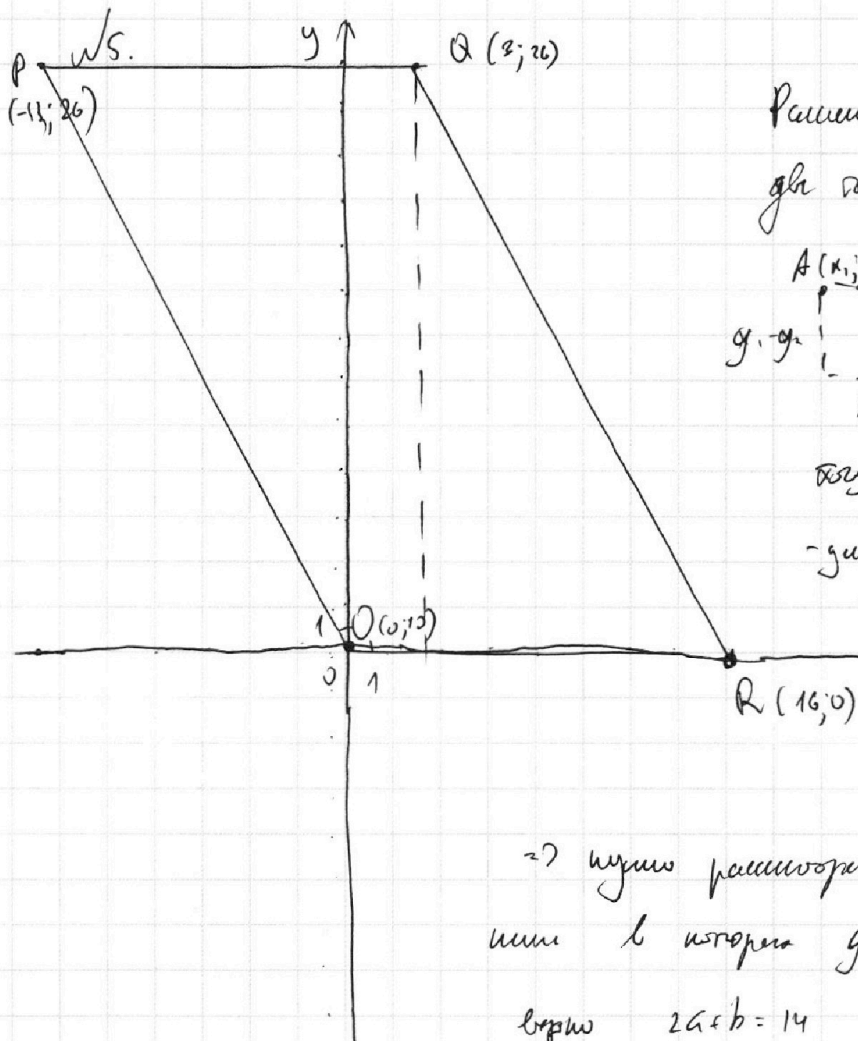
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

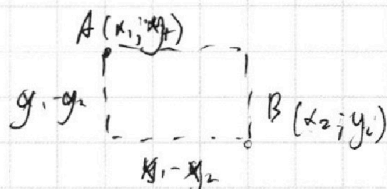
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим модуль
для сторон A и B



всегда $|x_1 - x_2|$ и $|y_1 - y_2|$ -

- длины сторон прямоугольника,
в котором A и B являются

вершинами
x и y осей
координат

\Rightarrow нужно рассмотреть только прямоуголь-
ники в которых две стороны a и b

выраж $2a + b = 14$ (где a - вертикальная,
b - горизонтальная)

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{6}. \quad \begin{cases} ax + y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим: $ax + y - 3b = 0$

$y = 3b - ax$ — линейная функция, график — прямая;
пересечение с Oy $(0; 3b)$, угловой коэффициент $= -a$

Рассмотрим: $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$;

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 1) = 0 & (1) \\ (x^2 + (y-12)^2 - 16) = 0 & (2) \\ \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 < 0 \\ x^2 + (y-12)^2 - 16 > 0 \end{cases} & (3) \\ \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 > 0 \\ x^2 + (y-12)^2 - 16 < 0 \end{cases} & (4) \end{cases}$$

Рассмотрим $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$x^2 + y^2 = 1$ — график окружности с центром $(0; 0)$

и радиусом 1;

Рассмотрим: $x^2 + (y-12)^2 - 16 = 0$

$x^2 + (y-12)^2 = 16$ — график окружности с центром $(0; 12)$;

и радиусом 4.

Везде отметки на графике решения неравенства:

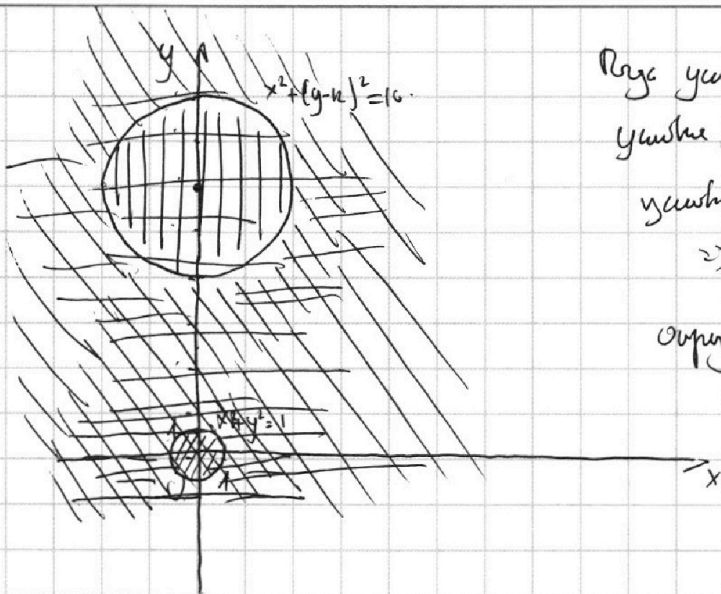
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Результат (1) - окружность $x^2 + y^2 = 1$

уравнение (2) - окружность $x^2 + (y-12)^2 = 16$

уравнение (3): ~~каждый~~ ~~отражений~~

⇒ Круги, ограничивают

окружность $x^2 + y^2 = 1$ (как

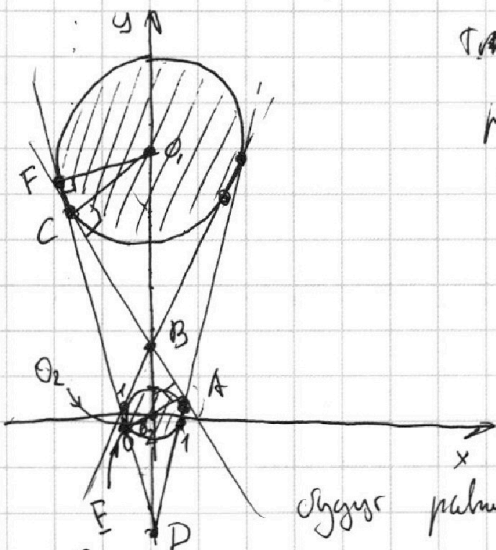
пересечение двух окружностей
отражением себя)

уравнение (4): вертикальный

и вертикальный отражений: откуда логически круг, ограничивающий
окружность $x^2 + (y-12)^2 = 16$

⇒ область решений отражения:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \leq 16 \end{cases}$$

Рассмотрим на графике область решений вертикального вида
с прямой $y = 2b - ax$



Т.к. вертикальный вид с углом

решением ⇒ это касательные
(внутренние и внешние)

Т.к. окружность симметрична

относительно Oy , касательные

также симметричны ⇒

из y и значения a где кас.

Следует решить по мощностям и решить по знаку.

Рассмотрим $\triangle BCO_1$ и $\triangle BAO_2$, вписанные на одну дугу
эти прямоугольные, т.к. в них радиусы O_1C и O_2B образуют

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Реша аналогично кривым углы a находим

$$\text{ctg} \angle EDO_2$$

$$\Rightarrow 1 + \text{ctg}^2 \angle EDO_2 = \frac{1}{\sin^2 \angle EDO_2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 16$$

$$\Rightarrow \text{ctg} \angle EDO_2 = \sqrt{15}$$

$$\Rightarrow a = \pm \sqrt{15}$$

$$\text{Отв. } a = \pm \sqrt{15}; \pm \sqrt{4,76}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11} \quad 12 + (15 + 16) = 38$$

$$a \cdot b = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot k_1$$

$$b \cdot c = 2^{17} \cdot 7^{13} \cdot k_2$$

$$a \cdot c = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot k_3$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{9}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$3\sqrt{3} + 1 = 12$$

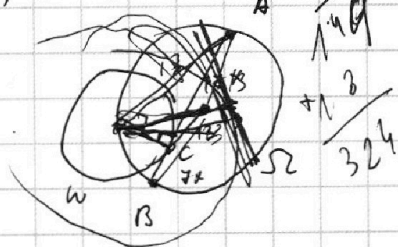
$$3\sqrt{3} = 11$$

$$\sqrt{3} = \frac{11}{3}$$

$$\frac{5+16}{156}$$

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2^{55} \cdot 7^{66} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{34} \cdot k_1$$



$$a+b: m$$

$$g^{u_a} \cdot 7^{u_c} \geq 7 \quad a \cdot c: 7^{55} \cdot 49 - 49$$

$$3+6: 9$$

$$a^2 + b^2 + 2ab$$

$$n_{a2} + n_{c2} \geq 39$$

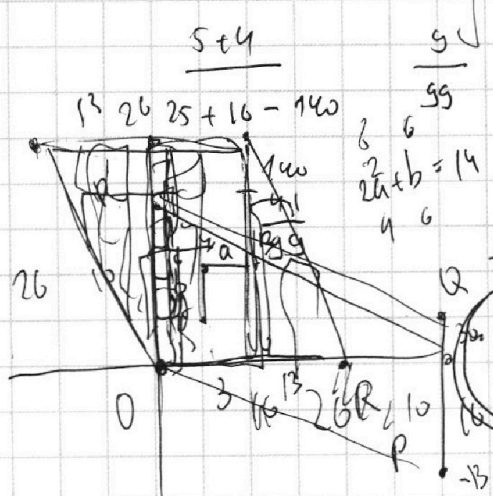
$$a+b: m \quad \frac{78}{9}$$

$$a-b: m \quad \frac{312}{107}$$

$$\begin{cases} ax+by=ab \\ (x^2+y^2-1) \cdot a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = R^2$$

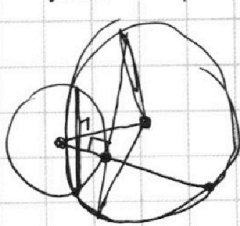
$$a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2: m$$



$$Sab: m$$

$$amb: m \quad 5: m$$

$$amb: cb: m$$



$$\frac{7x}{7} = \frac{7}{7x}$$

$$? \cdot 7 = 7 \cdot 7x^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

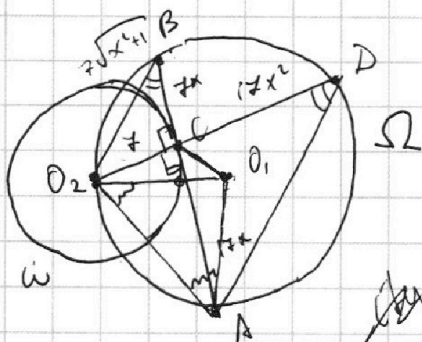
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.



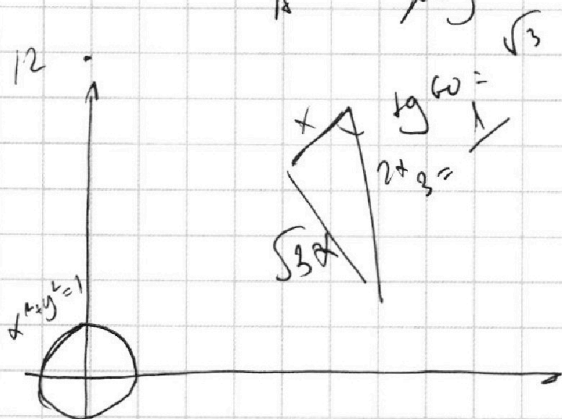
Дано: $\omega(O_2; r)$, $\Omega(O_1; R)$

$O_2 \in \Omega$, $A, B \in \Omega$

AB - хорда Ω ; AC - касательная
к ω , в точке C

$$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$$

Искомое: AB



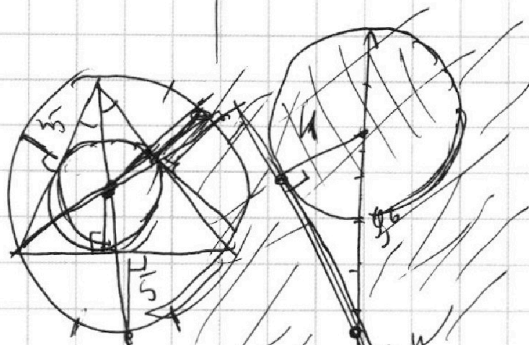
$$\frac{96}{\omega}$$

$$24$$

$$3 \pm \sqrt{321}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 576 \\ + 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$12 \quad 5 \quad \times 8$$



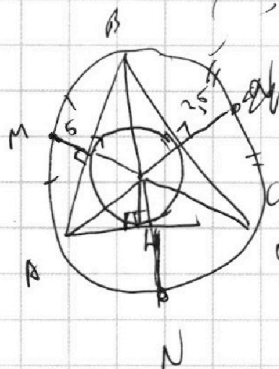
$$tg \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

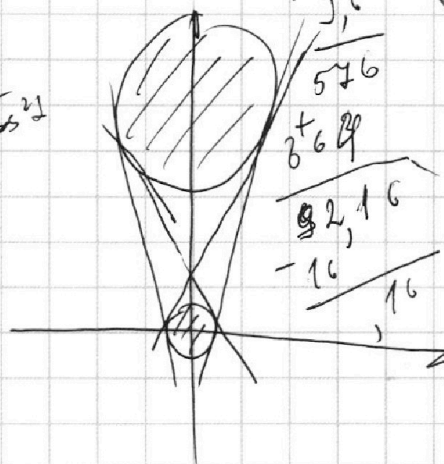
$$96 : 4 =$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ b \dots \leq 1 \end{cases}$$

$$chy 2L = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$y = 2b - 4x$$



$$\begin{array}{r} 96 \\ \times 96 \\ \hline 576 \\ + 624 \\ \hline 1200 \\ - 16 \\ \hline 1184 \end{array}$$