МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^{15}7^{11}$, $bc$ делится на $2^{17}7^{18}$, $ac$ делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем $m$ могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на $m$?

3. [4 балла] Центр окружности $\omega$ лежит на окружности $\Omega$, хорда $AB$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $C$ так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину $AB$, если известно, что радиусы $\omega$ и $\Omega$ равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник $ABC$ вписан в окружность. Пусть $M$ – середина той дуги $AB$ описанной окружности, которая не содержит точку $C$; $N$ – середина той дуги $AC$ описанной окружности, которая не содержит точку $B$. Найдите расстояние от вершины $A$ до центра окружности, вписанной в треугольник $ABC$, если расстояния от точек $M$ и $N$ до сторон $AB$ и $AC$ соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

При выборе чисел $a, b$ и $c$ важна лишь делимость на 2 и 7, поэтому для миним. значений будет достаточно чисел вида $2^x \cdot 7^y$, $x, y \in \mathbb{N}$

Пусть тогда
$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1} \quad \text{все } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$$
$$b = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$$
$$c = 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3},$$
из условия следует:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 15 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 23 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 11 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 18 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 39 \end{cases}$$

сложим неравенства в каждой системе и получим:

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 55 \quad \text{и} \quad 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 68$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 27{,}5 \quad \text{и} \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34$$

~~$abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$ т.е. $\min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{34}$ Пример, когда $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$: $a = 2^{10} \cdot 7$, $b = 2^5 \cdot 7$, $c = 2^{13} \cdot 7$~~

$$abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$$

т.к. $\beta_1 + \beta_3 \geq 39$, то $7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \geq 7^{39}$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 27{,}5$, но т.к. $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \in \mathbb{N}_0$, то $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28$ и $2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \geq 2^{28}$

т.е. $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$ и $\min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{39}$

пример:

$a = 2^{10} \cdot 7^{20}$ $\qquad a \cdot b = 2^{15} \cdot 7^{20} \vdots\ 2^{15} \cdot 7^{11}$

$b = 2^5 \cdot 7^0 = 2^5$ $\qquad b \cdot c = 2^{18} \cdot 7^{19} \vdots\ 2^{17} \cdot 7^{18}$

$c = 2^{13} \cdot 7^{19}$, тогда $\qquad a \cdot c = 2^{23} \cdot 7^{39} \vdots\ 2^{23} \cdot 7^{39}$

$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☒ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ сократима на $m$, тогда

$$\begin{cases} a+b \vdots m \\ a^2-7ab+b^2=(a+b)^2-9ab \vdots m \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b)^2 \vdots m, \text{ т.к. } a+b \vdots m \\ (a+b)^2-9ab \vdots m \text{ по усл.} \end{cases} \Rightarrow 9ab \vdots m$$

если $a \vdots m$, то т.к. $a+b \vdots m$, значит $a+b-a=b \vdots m$, но значит $a$ и $b$ сократимы на $m$ $\Rightarrow$ ни $a$, ни $b$ не делятся на $m$
противоречие

при этом $9ab \vdots m$

Если $m$ — простое, то т.к. $\begin{cases} a \not\vdots m \\ b \not\vdots m \\ 9ab \vdots m \end{cases} \Rightarrow 9 \vdots m$, $m=3$

~~Если $m$ — составное, то $a \vdots p$, $b \vdots q$ такие что~~ ~~$p$ и $q$ взаимно простые, так как $a$ и $b$ взаимно простые и~~ ~~при этом $9pq \vdots m$ т.е. $a=px$, $b=qy$ $p,x,q,y \in \mathbb{N}$~~
~~$a+b \vdots m$~~ ~~Если $m$ составное, то в его разложении есть~~
~~$px+qy=9pqz$~~ ~~простой множитель $p$ в н/к степени~~

Если $m$ составное, то пусть $m=pq$ и $a \vdots p$ тогда $a+b \vdots pq$, $a \vdots p$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow b \vdots p$, но $a$ и $b$ взаимно простые, противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в разложение чисел $a$ и $b$ не входят никакие множители из $m$, значит в произвед. $9ab \vdots m$ число $m$ является делителем $9$ $\Rightarrow \max(m)=9$

пример: $a=2$, $b=7$ $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}=\frac{2+7}{2^2-7\cdot 2\cdot 7+7^2}=\frac{9}{4-98+49}=\frac{9}{-45}=-\frac{1}{5}$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

корень $x=\frac{6-2\sqrt{78}}{69}<0$, а значит $<1-\frac{\sqrt{3}}{3}$, т.е. $\in$ ОДЗ

корень $x=\frac{1}{9}<1-\frac{\sqrt{3}}{3}$, значит $\in$ ОДЗ

Ответ: $x\in\left\{\frac{1}{9};\ \frac{6\pm2\sqrt{78}}{69}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$  ОДЗ: $\begin{cases}3x^2-6x+2\geq 0\\ 3x^2+3x+1\geq 0\end{cases}$

$1-9x=3x^2-6x+2-3x^2+3x+1$, значит

если $f(x)=3x^2-6x+2$; $g(x)=3x^2+3x+1$, то

$\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=f(x)-g(x)=(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)})(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)})$, т.к. по ОДЗ $f(x),g(x)\geq 0$

I) если $f(x)=g(x)$, то

$3x^2+2-6x=3x^2+3x+1$

$x=\frac{1}{9}$

II) если $f(x)\neq g(x)$, то $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=1$;  $1-\sqrt{g(x)}=\sqrt{f(x)}\ |^2$

$1+g(x)-2\sqrt{g(x)}=f(x)$

$1+\cancel{3x^2}+3x+\cancel{1}-2\sqrt{1+3x^2+3x}=\cancel{3x^2}-6x+\cancel{2}$

$9x=2\sqrt{1+3x+3x^2}\ \uparrow^2$

$81x^2=4(1+3x+3x^2)$

$69x^2-12x-4=0$

$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{12\cdot12+4\cdot4\cdot69}}{2\cdot69}=\frac{12\pm\sqrt{4\cdot4(9+69)}}{2\cdot69}=\frac{12\pm4\sqrt{78}}{2\cdot69}=\frac{6\pm2\sqrt{78}}{69}$

---

ОДЗ: $3x^2-6x+2\geq 0$

$3x^2-6x+2=0$

$x_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{36-24}+6}{6}=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, т.е. ОДЗ: $x\in\left(-\infty;1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]\cup\left[1+\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$

(т.к. $3x^2+3x+1=3(x^2+x+\frac{1}{3})=3(x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{1}{12})=3((x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{12})>0$ при $x\in\mathbb{R}$)

$\frac{6+2\sqrt{64}}{69}<\frac{6+2\sqrt{78}}{69}<\frac{6+2\sqrt{81}}{69}$  $\frac{22}{69}<\frac{6+2\sqrt{78}}{69}<\frac{24}{69}$  Чтобы корень

попал на ОДЗ, нужно чтобы $\frac{24}{69}$ было меньше $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ или

$\frac{22}{69}$ было больше $1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ (не подх., т.к. $\frac{22}{69}<1<1+\frac{\sqrt{3}}{3}$), т.е. надо

сравнить

$\frac{24}{69}\ \vee\ 1-\frac{\sqrt{3}}{3}$  $1-\frac{\sqrt{3}}{3}>1-\frac{1,8}{3}=0,4$

$\frac{8}{23}\ \vee\ 1-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{8}{23}<\frac{8}{20}=0,4<1-\frac{\sqrt{3}}{3}$, значит

корень $x=\frac{6+2\sqrt{78}}{69}$ попадает в ОДЗ;

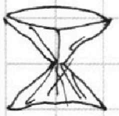
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

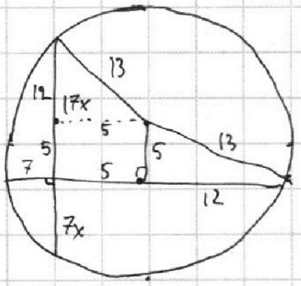
$\cancel{(1-9x)^2}$ $(1-9x)^2 = 3x^2-6x+2+3x^2+3x+1 - 2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)}$

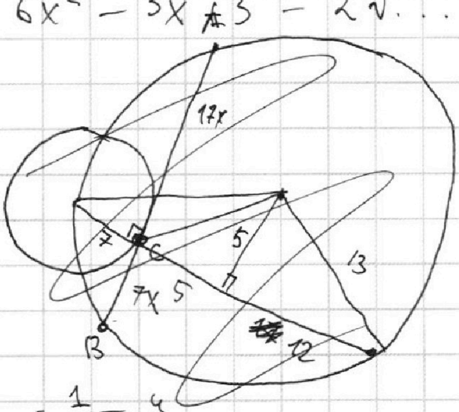
$1+81x^2-18x = 6x^2-3x+3 - 2\sqrt{\ldots}$



$3x^2+3x+1$

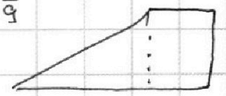
$D = 9-12<0$

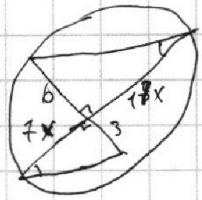



$\frac{1}{2}$

$\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{7}{4}+\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}$






$16\cdot 69+144$ 24

$a=7x,\ b=$ " $4^2(69)+4^2\cdot 3^2 = 4^2(69+9) = 4^2(78)$

$\dfrac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$

$64 = 3\cdot 8$

$a+b = mx$ $\frac{12}{69}$ $\frac{-4}{69}$ $\cancel{7x\cdot 6 = 17x}$

$a+b=11k$

$a^2-7ab+b^2=11n$ $\quad a^2-7ab+b^2=my$

$(a+b)^2-9ab = 11k^2-9ab=11n$

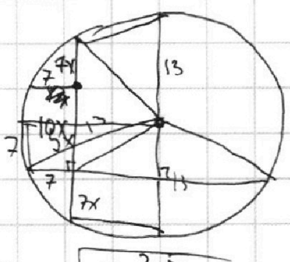
$a^2+2ab+b^2-9ab = (a+b)^2-9ab = my$

$9ab=11t$

$m^2x^2-9ab=my$

$ab=11t$

$9ab = m(mx^2-y)$




$2-6x=1+3x$

$1=9x$

$9ab=mz$

$9ab \vdots m$

$a+b \vdots m$

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

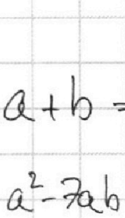
ОДЗ: $3x^2-6x+2\geq 0$

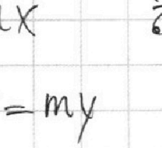
$x\in(-\infty;$

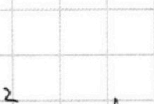
$3x^2-6x+2 = \quad 3\cdot 5^2-1$

$\sqrt{3(x-1)^2-1}$

$\cancel{-\sqrt{3(x^2}}$

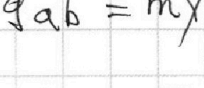




$\frac{9}{81}-\frac{6}{9}+2 = \frac{1}{27}-\frac{2}{3}+2$

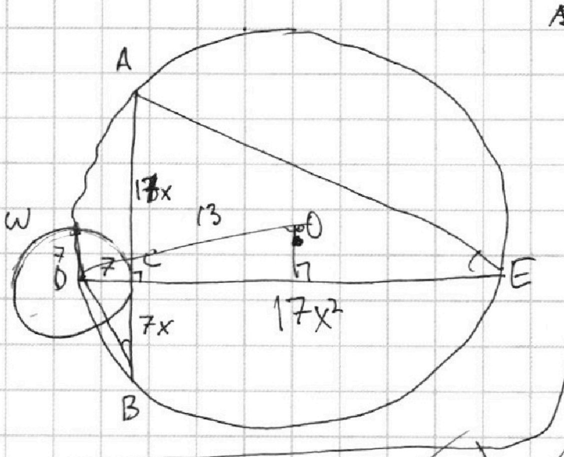


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ




1) Пусть центр ω это точка D, тогда $CD = R_\omega = 7$ и $DC \perp AB$ (т.к. AB касается ω)

2) Пусть $AC = 17x$, $CB = 7x$, тогда если $DC \cap \Omega = E$, ~~по т. о. пересек. хорд DC и AB:~~

~~$AC \cdot CB = DC \cdot CE$, $17x \cdot 7x = CE \cdot 7$~~

$\angle AED = \angle ABD$ (опир. на дугу $\breve{AD}$)

$\angle ACE = \angle DCB = 90°$ (верт. углы)

$\Rightarrow \triangle DCB \sim ACE$ и в подобных $\triangle$: $\cancel{\frac{AC}{CE} = \frac{DC}{CB}}$, ~~$AC \cdot CB = DC \cdot CE$ (по т. о. пер. хорд)~~

$\cancel{\frac{17x}{CE} = \frac{7}{7x}}$

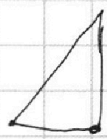
2) $\angle AED = \angle ABD$ (опир. на дугу $\breve{AD}$), в п/уг $\triangle$ DCB и $\triangle$ACE: $tg\angle AEC = \frac{17x}{CE}$, $tg\angle CBD = \frac{7}{7x}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{17x}{CE} = \frac{7}{7x}$, $CE = 17x^2$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

$y_2 + 2x_2 - (y_1 + 2x_1) = 14$

$1 + 3x^2 - 6x + 2 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 3x^2 + 3x + 1$



$f(x) \quad g(x)$

$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = 1$

$f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} = 1$

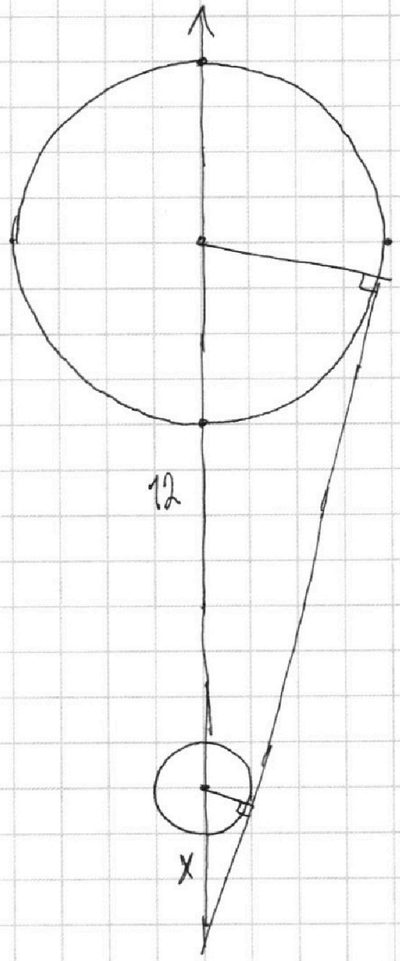
$2\sqrt{fg} = 1 + f + g$

$4fg = 1 + f^2 + g^2 + 2f + 2g + 2fg$

$1 + 3x^2 - 6x + 2 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 3x^2 + 3x + 1$

$2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 2 - 9x$

$4(3x^2 - 6x + 2) = 4 + 81x^2 - 36x$


12
x

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

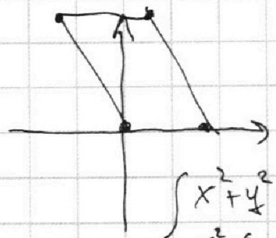
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab = k2^{15}7^{11}$

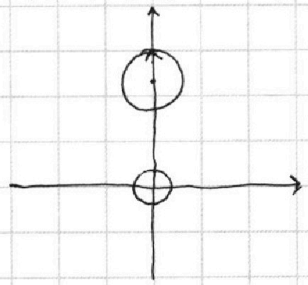
$bc = m2^{17}7^{18}$

$ac = n2^{23}7^{39}$

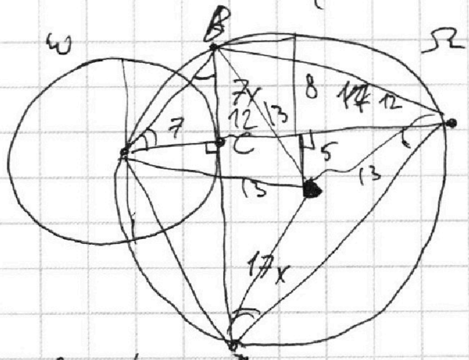
$(abc)^2 = kmn\,2^{55}7^{58}$



$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 1 \\ x^2+(y-12)^2 \geqslant 16 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+y^2 \geqslant 1 \\ x^2+(y-12)^2 \leqslant 16 \end{cases}$



$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} =$




$a^2+ab+b^2$

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

$36-3\cdot2\cdot4 = 12$

$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

$a^2-7ab+b^2 =$

$49a^2b^2-4a^2b^2$

$a = \frac{7b \pm 3\sqrt{5}b}{2}$

Пусть $a = 2^{\alpha}\cdot 7^{\beta}$

$b = 2^{x}\cdot 7^{y}$

$c = 2^{w}\cdot 7^{z}$

$\alpha+\beta = 15$

$\beta+\gamma = 17$

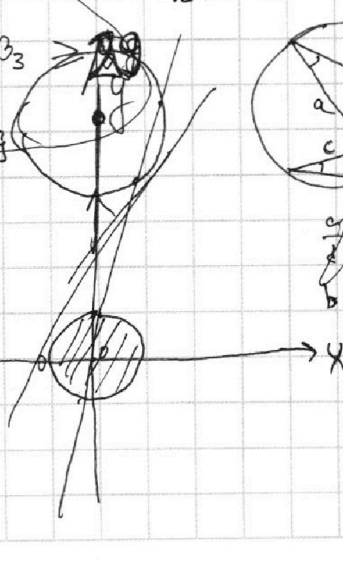
$\alpha+\gamma = 23$

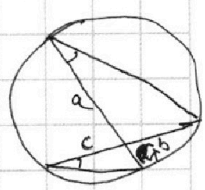
$\begin{cases} \gamma-\beta = 8 \\ \beta+\gamma = 17 \end{cases}$

$2\gamma = 17$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geqslant \frac{53}{2} = 26{,}5$

$\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geqslant 29$




$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$bc = ad$

$x\;\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$ad = bc$

$\begin{cases} \\ \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 1 \\ x^2+(y-12)^2 - 16 \end{cases}$

$3x^2-1{,}5x+1{,}5 = t$

$\sqrt{t-4{,}5x+0{,}5} - \sqrt{t+4{,}5x-0{,}5} = 1-9x$

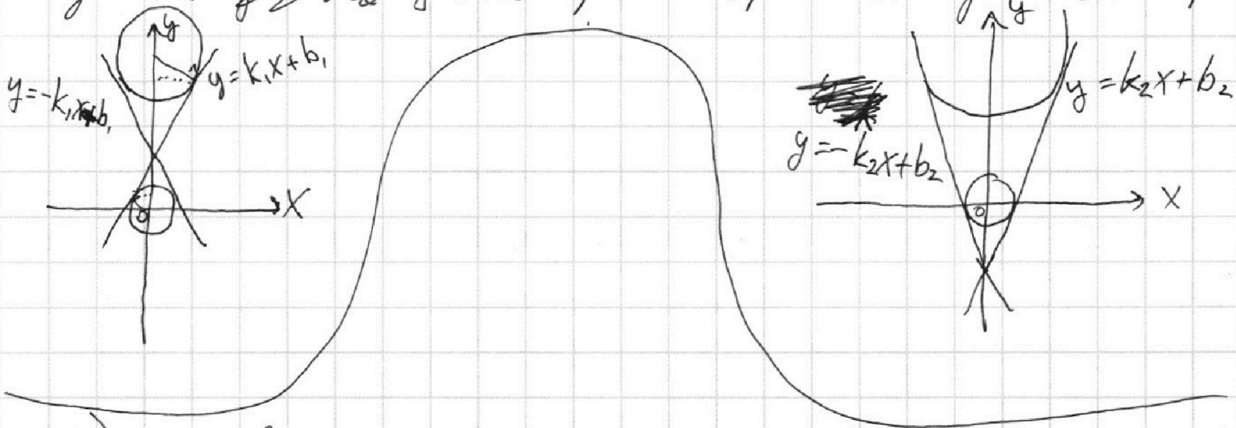
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

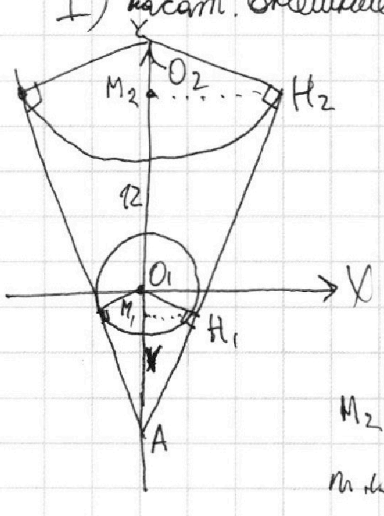
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Значит чтобы найти все значения $a$ достаточно узнать угловые коэффиц. 4 прямых. ~~Они~~ попарно симметричные относ. оси $OY$ так как относ. этой оси симметричные оба круга, значит у этих прямых противоп. угловые коэф.:




I) касат. внешние




$\triangle AO_1H_1 \sim \triangle AO_2H_2$ (общий угол и прямой)

$AO_1 = x$, $O_1O_2 = 12$ $O_2H_2 = 4$, $O_1H_1 = 4$

тогда $\frac{x}{x+12} = \frac{1}{4}$ $4x = x+12$, $x = 4$

значит $\cancel{y=kx+b}$ $b_1 = -4$

уравнение $\cancel{x^2+y^2-1=k_1x-4}$ имеет 1 решение, так как касат. пересек. меньшую окр. в 1 точке

$M_2, M_1$ высоты на $OY$, $M_2H_2 \parallel OX \parallel M_1H_1$

т.к. $\frac{M_2H_2 - M_1H_1}{AM_1 - AM_2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

~~в уравн. (2)~~ из уравн. (2):

$$\begin{cases} x^2+y^2-1\leq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16\geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+y^2-1\geq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16\leq 0 \end{cases}$$

уравнение $x^2+y^2=1$ задает окружн. с центром $(0;0)$ и $R=1$

ур-ние $x^2+(y-12)^2=16$ задает окружн. с центром $(0;12)$ и $R=4$

Из уравнения 2 следует что точки лежат всегда внутри/на границе 1 круга и снаружи/на границе другого. так как на графике круги не пересек., то решениями могут быть ~~только точки на границе обоих окружн. так как~~ ~~1) если точка снаружи обоих, то она не внутри, но~~ только точки внутри обоих кругов (см. рис 1), штриховка с границей — решения

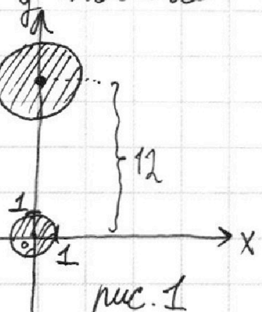
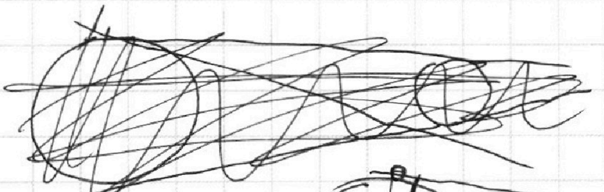


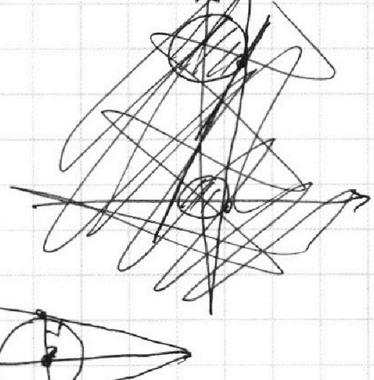
рис. 1

чтобы ~~прямая~~ система имела ровно 2 решения, нужно чтобы прямая $ax+y-8b=0$ пересекала каждый из кругов ровно в 1 точке, ~~т.е.~~ (иначе прямая внутри окр. пересек. ∞ точек)

~~уравнения: $\begin{cases} ax+y-8b=x^2+y^2-1 \\ ax+y-8b=x^2+(y-12)^2-16 \end{cases}$ имели ровно 1 решение~~

общих касат. к 2 кругам 4:





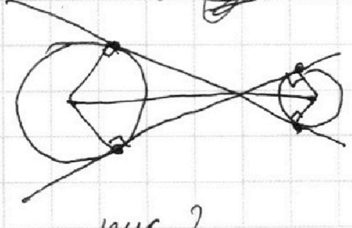


рис. 2

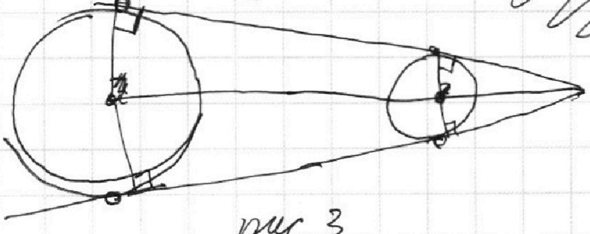


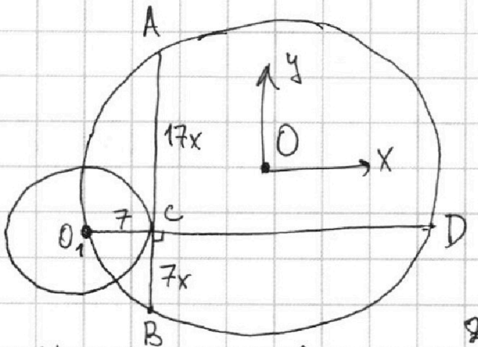
рис. 3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ




1) Пусть $O_1C$, где $O_1$ – центр ω пересекает Ω в точке D, тогда $O_1C = 7$ и $O_1C \perp AB$, т.к. $O_1C$ касается AB, радиус в (.) касания ⊥ касательной

~~2) по св-ву пересек. хорд:~~

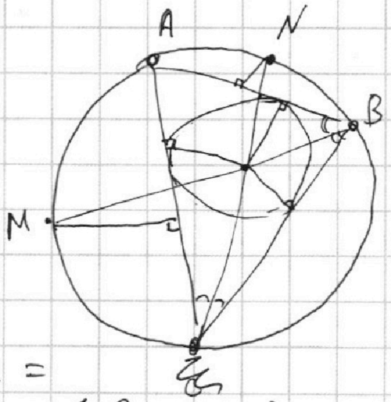
Введем систему координат с центром в (.) O, ось y ∥ AB, ось x ∥ $O_1D$

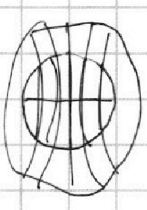
тогда если $A = (x_1; y_1)$

$B = (x_1; y_2)$  $O_1 = (x_2; y_3)$, $C = (x_1; y_3)$ то

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 7 \\ \dfrac{y_1 - y_3}{y_3 - y_2} = \dfrac{17}{7} \\ x_1^2 + y_1^2 = 13^2 \\ x_1^2 + y_2^2 = 13^2 \\ x_2^2 + y_3^2 = 13^2 \end{cases}$$

$(x_1 - 7)^2 + y_3^2 = 13^2$



$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} =$

$1 - 9x = 3\cancel{x^2+3x+1}$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a} -$

$2 - 1 - 9x = 2 - 6x - 1 - 3x$

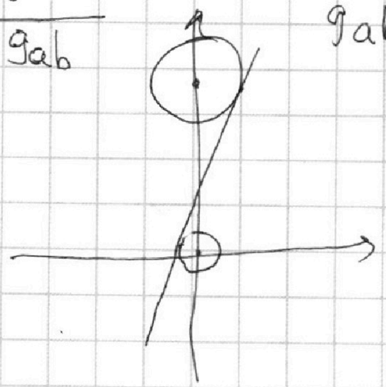
$a + b \vdots m$  $a \not\vdots m$

$9ab \vdots m$  $b \not\vdots m$

$\Downarrow$

$9 \vdots m$

$\dfrac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x \qquad \text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x^2-6x+2\geq 0 \\ 3x^2+3x+1\geq 0 \end{cases}$$

$$1-9x = 2-1-3x-6x = (2-6x)-(1+3x) = (2-6x)+3x^2-(1+3x)-3x^2$$

$$= (3x^2-6x+2)-(3x^2+3x+1), \text{ т.е.}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1} = \left(\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}\right)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{3x^2+3x+1}\right)$$

Если $\sqrt{3x^2-6x+2}=\sqrt{3x^2+3x+1}$, т.е. $2-6x=1+3x$, то

$9x=1$ и $x=\frac{1}{9}\in$ ОДЗ

Иначе:

$$\cancel{\sqrt{3x^2+3x+1}+\sqrt{3x^2-6x+2}=1}$$

$$\cancel{1-\sqrt{3x^2+3x+1}=\sqrt{3x^2-6x+2}}$$

$$\cancel{1+3x^2+3x+1-2\sqrt{3x^2+3x+1}=3x^2-6x+2}$$

$$\cancel{3x^2+3x+1+3x^2-6x+2+2\sqrt{(3x^2+3x+1)(3x^2-6x+2)}}$$

$$\cancel{9x=2\sqrt{3x^2+3x+1}}$$

$$\cancel{81x^2=4(3x^2+3x+1)}$$

$$\cancel{81x^2-12x^2-12x-4=0}$$

$$\cancel{69x^2-12x-4=0}$$

$$\cancel{D=144+4\cdot4\cdot69=}$$

$$\cancel{=4^2\cdot3^2+4^2\cdot69=4^2(9+69)}$$

$$\cancel{=4^2(78)}$$