



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

- 1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



При выборе чисел  $a, b$  и  $c$  важна лишь делимость на 2 и 7, поэтому для миним. значения будет достаточно чисел вида  $2^x \cdot 7^y$ ,  $x, y \in \mathbb{N}$

Пусть тогда

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$$

$$b = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$$

$$c = 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}, \text{ из условия следует:}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 15 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 23 \end{cases}$$

$$\text{и } \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 11 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 18 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 39 \end{cases}$$

сложив неравенства в каждой системе и получим:

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 55$$

$$\text{и } 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 68$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 27,5$$

$$\text{и } \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34$$

~~$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28$~~

~~$abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$~~   
 ~~$\min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{34}$~~  Пример, когда  $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$ :

~~$a = 2^{10} \cdot 7^{20}$~~

~~$b = 2^{5} \cdot 7^{19}$~~

~~$c = 2^{13} \cdot 7^{19}$~~

$$abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}$$

$$\text{м.к. } \beta_1 + \beta_3 \geq 39, \text{ но } 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \geq 7^{39}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 27,5, \text{ но м.к. } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \in \mathbb{N}_0, \text{ но}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28 \text{ и } 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \geq 2^{28}$$

$$\text{м.к. } abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39} \text{ и } \min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

пример:

$$a = 2^{10} \cdot 7^{20}$$

$$b = 2^5 \cdot 7^0 = 2^5$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{19}$$

тогда

$$a \cdot b = 2^{15} \cdot 7^{20} : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$b \cdot c = 2^{18} \cdot 7^{19} : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$a \cdot c = 2^{23} \cdot 7^{39} : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$  сократима на  $m$ , тогда

$$\begin{cases} a+b : m \\ a^2-7ab+b^2 = (a+b)^2 - 9ab : m \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b)^2 : m, \text{ т.к. } a+b : m \\ (a+b)^2 - 9ab : m \text{ по укл.} \end{cases} \Rightarrow 9ab : m$$

если  $a : m$ , то т.к.  $a+b : m$ , <sup>знаем</sup>  $a+b-a = b : m$ , но  
 знаем  $a$  и  $b$  взаимно просты на  $m$ ,  $\Rightarrow$  ни  $a$ , ни  $b$  не  
 делятся на  $m$  <sub>противоречие</sub>  
 при этом  $9ab : m$

Если  $m$  - простое, то т.к.  $\begin{cases} a \not: m \\ b \not: m \\ 9ab : m \end{cases} \Rightarrow 9 : m, m=3$

~~Если  $m$  - составное, то  $a : p, b : q$  также это  $p, q$   
 где  $p, q$  взаимно просты, ~~то~~ так как  $a$  и  $b$  взаимно просты  
 при этом  $9pq : m$  т.е.  $a = px, b = qx, p, x, q, y \in \mathbb{N}$   
 $a+b : m$   $px + qx = 9qz$   $px + qx = 9qz$   
 Если  $m$  составное, то  $b$  не обязательно  
 простое ~~или делится на  $p$  в искомом~~~~

Если  $m$  составное, то пусть  $m = pq$  ~~и~~  $a : p$  тогда  $a+b : pq$   
 $a : p \Rightarrow$

$\Rightarrow b : p$ , но  $a$  и  $b$  взаимно просты, противоречие  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  в разложении чисел  $a$  и  $b$  не входят никакие множители  
 из  $m$ , значит в произв.  $9ab : m$  число  $m$   
 является делителем  $9 \Rightarrow \max(m) = 9$

пример:  $\frac{a=2}{b=7} \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{2+7}{2^2-7 \cdot 2 \cdot 7+7^2} = \frac{9}{4-98+49} = \frac{9}{-45} = -\frac{1}{5}$  Ответ: 9



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1    2    3    4    5    6    7  
                 

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

корень  $x = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 0$ , а значит  $< 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ , т.е.  $\in \mathbb{R}^3$

корень  $x = \frac{1}{9} < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ , значит  $\in \mathbb{R}^3$

Ответ:  $x \in \left\{ \frac{1}{9}; \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \right\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x^2-6x+2 \geq 0 \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$1-9x = 3x^2-6x+2 - 3x^2+3x+1$ , *знаем*  
 если  $f(x) = 3x^2-6x+2$ ;  $g(x) = 3x^2+3x+1$ , то

$$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = f(x) - g(x) = (\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}) (\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}), \text{ м.к.}$$

I) если  $f(x) = g(x)$ , то

$$3x^2+2-6x = 3x^2+3x+1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

м.к. ОДЗ  $f(x), g(x)$

II) если  $f(x) \neq g(x)$ , то  $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = 1$ ;  $1 - \sqrt{g(x)} = \sqrt{f(x)}$

$$1 + g(x) - 2\sqrt{g(x)} = f(x)$$

$$1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{1+3x^2+3x} = 3x^2 - 6x + 2$$

$$9x = 2\sqrt{1+3x^2+3x} \quad \uparrow^2$$

$$81x^2 = 4(1+3x+3x^2)$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{12 \cdot 12 + 4 \cdot 4 \cdot 69}}{2 \cdot 69} = \frac{12 \pm \sqrt{4 \cdot 4 \cdot (9 + 69)}}{2 \cdot 69} = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

ОДЗ:  $3x^2-6x+2 \geq 0$

$$3x^2-6x+2=0$$

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{36-24} + 6}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ м.к. ОДЗ: } x \in (-\infty, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$$

(м.к.  $3x^2+3x+1 = 3(x^2+x+\frac{1}{3}) = 3(x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}) = 3((x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{12}) > 0$  при  $x \in \mathbb{R}$ )

$$\frac{6+2\sqrt{6}}{69} < \frac{6+2\sqrt{78}}{69} < \frac{6+2\sqrt{81}}{69} \quad \frac{22}{69} < \frac{6+2\sqrt{78}}{69} < \frac{24}{69} \quad \text{чтобы корни}$$

~~$\frac{1+\sqrt{3}}{3}$~~  - начал м.к. ОДЗ, нужно чтобы  $\frac{24}{69}$  было меньше  $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$  или

$\frac{22}{69}$  было больше  $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$  (не подх., м.к.  $\frac{22}{69} < 1 < 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ ), м.к. надо

увеличить  $\frac{24}{69} \checkmark 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$   $1 - \frac{\sqrt{3}}{3} > 1 - \frac{1,8}{3} = 0,4$

$\frac{8}{23} \checkmark 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$   $\frac{8}{23} < \frac{8}{20} = 0,4 < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ , *знаем*

корень  $x = \frac{6+2\sqrt{78}}{69}$  попадает в ОДЗ;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

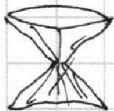
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



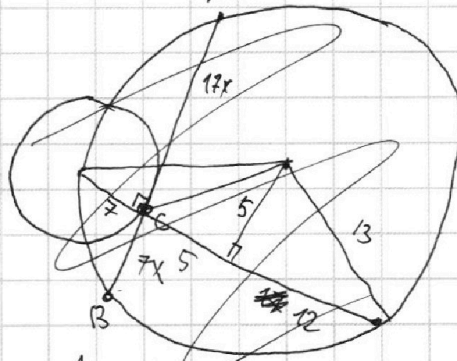
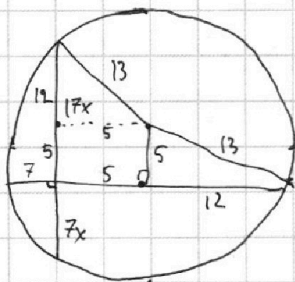
~~(1-9x)^2 = 3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}~~



$1 + 81x^2 - 18x = 6x^2 - 3x + 3 - 2\sqrt{\dots}$

$3x^2 + 3x + 1$

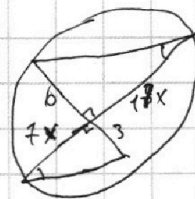
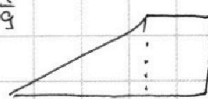
$9 - 12 < 0$



$\frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{k} + \frac{7}{2} + \frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}$

$16 \cdot 69 + 16$

$a = 7x, b = \dots = 4^2(69) + 4 \cdot 3^2 = 4^2(69+9) = 4^2(78)$



$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$

$a+b = 11k$

$a^2 - 7ab + b^2 = 11n$

$(a+b)^2 - 9ab = 11k^2 - 9ab = 11n$

$9ab = 11k^2 - 11n$

$ab = 11t$

$a+b = mx$

$\frac{12}{69} - \frac{4}{69}$

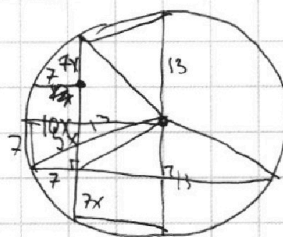
$\frac{8}{69} \cdot 7x \cdot 6 = 12x$

$a^2 - 7ab + b^2 = my$

$a^2 + 2ab + b^2 - 9ab = (a+b)^2 - 9ab = my$

$m^2x^2 - 9ab = my$

$9ab = m(mx^2 - y)$



$2 - 6x = 1 + 3x$

$1 = 9x$

$9ab = m^2z$

$9ab : m$

$a+b : m$

$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

$0 \leq 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

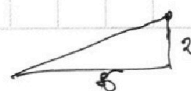
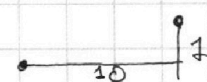
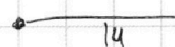
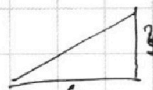
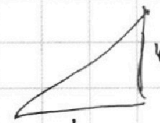
$x \in (-\infty; \dots]$

$3x^2 - 6x + 2 = 3 \cdot 5^2 - 1$

$\sqrt{3(x-1)^2 - 1}$

~~$\sqrt{3(x-1)^2 - 1}$~~

$\frac{3}{81} - \frac{6}{9} + 2 = \frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2$



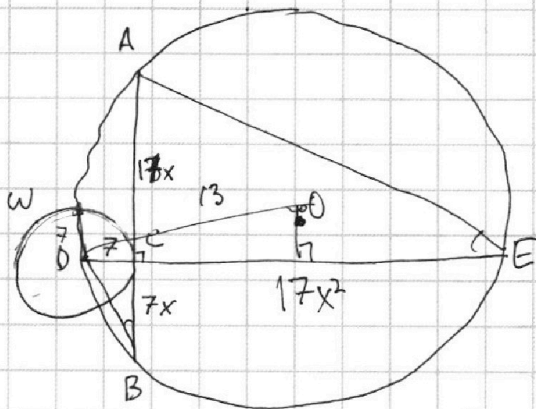
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть центр  $\omega$  это точка D, тогда  $CD = R_\omega = 7$  и  $DC \perp AB$  (п.к. AB касается  $\omega$ )

2) Пусть  $AC = 17x$ ,  $CB = 7x$ , тогда если  $DC \cap \Omega = E$ , то ~~тогда~~ ~~пересек~~ ~~хорд~~  $DC$  и  $AB$ :

~~$AC \cdot CB = DC \cdot CE$ ,  $17x \cdot 7x = CE \cdot 7$~~

~~$\angle AED = \angle ABD$  (опр. на хорду AD)~~

~~$\angle ACE = \angle DCB = 90^\circ$  (верт. углы)~~

$\Rightarrow \triangle DCB \sim \triangle ACE$  и в подобных  $\Delta$ :

~~$\frac{17x}{CE} = \frac{7}{7x}$~~

~~$\frac{AC}{CE} = \frac{DC}{CB}$~~

~~$\frac{17x}{CE} = \frac{7}{7x}$~~

2)  $\angle AED = \angle ABD$  (опр. на хорду AD), в выпр.  $\Delta DCB$  и  $\Delta ACE$ :  $\operatorname{tg} \angle AEC = \frac{17x}{CE}$   
 $\operatorname{tg} \angle CBD = \frac{7}{7x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{17x}{CE} = \frac{7}{7x}, CE = 17x^2$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

$y_2 + 2x_2 - (y_1 + 2x_1) = 14$

$1 + 3x^2 - 6x + 2 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 3x^2 + 3x + 1$

$f(x) \quad g(x)$

$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = 1$

~~$f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} = 1$~~

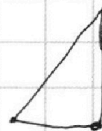
$2\sqrt{fg} = 1 + f + g$

$4fg = 1 + f + g^2 + 2f + 2g + 2fg$

$1 + 3x^2 - 6x + 2 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 3x^2 + 3x + 1$

$2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 2 - 3x$

$4(3x^2 - 6x + 2) = 4 + 81x^2 - 36x$







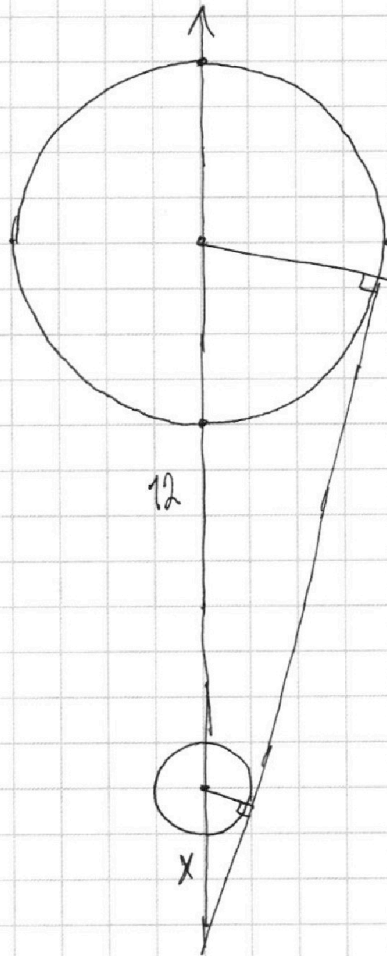
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = k 2^{15} 7^{11}$$

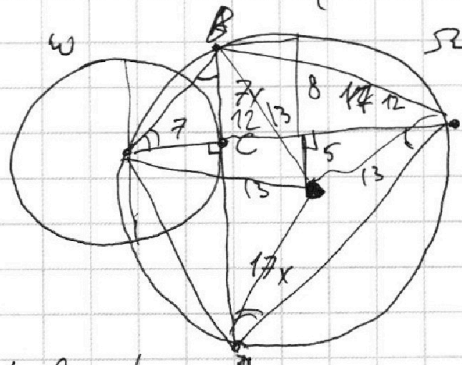
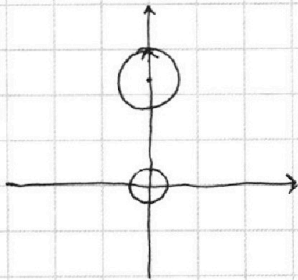
$$bc = m 2^{17} 7^{18}$$

$$ac = n 2^{23} 7^{39}$$

$$(abc)^2 = kmn 2^{55} 7^{58}$$

~~2/3~~

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} =$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \geq 16 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 y^2 \geq 1 \\ x^2 (y-12)^2 \leq 16 \end{cases}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad | \cdot 2$$

$$36 - 3 \cdot 2 \cdot 4 = 4$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$a^2 - 7ab + b^2 =$$

$$49a^2b^2 - 4a^2b^2$$

Пусть  $a = 2^x \cdot 7^y$

$$b = 2^x \cdot 7^y$$

$$c = 2^w \cdot 7^z$$

$$a = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

~~$$\begin{cases} d+x=15 \\ d+y=11 \end{cases}$$~~

$$d + \beta = 15$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$d + \gamma = 23$$

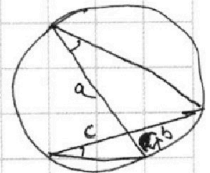
$$\begin{cases} \gamma - \beta = 8 \\ \beta + \gamma = 17 \end{cases}$$

$$2\gamma = 17$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{53}{2} = 26,5$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 29$$

$$20 \quad 19$$

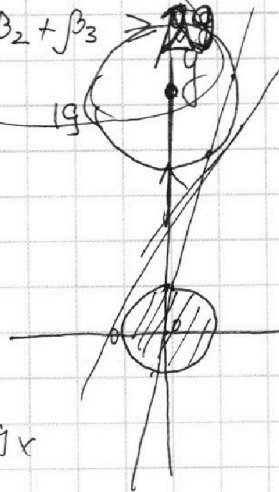


$$\frac{ac}{ad} = \frac{bc}{bd}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \geq 16 \end{cases}$$

$$3x^2 - 4,5x + 1,5 = t$$

$$\sqrt{t - 4,5x + 0,5} - \sqrt{t + 4,5x - 0,5} = 1 - 9x$$



$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \implies ad = bc$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

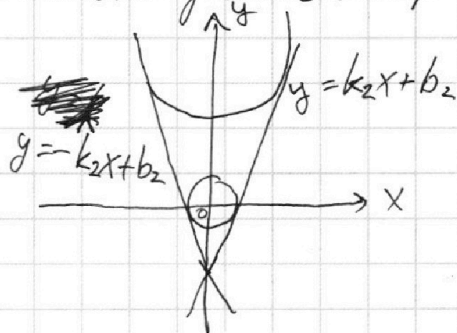
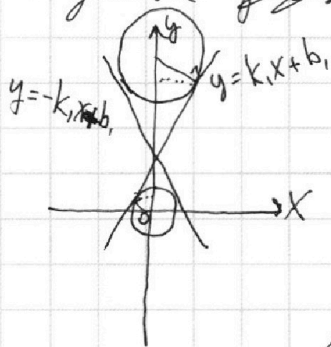
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

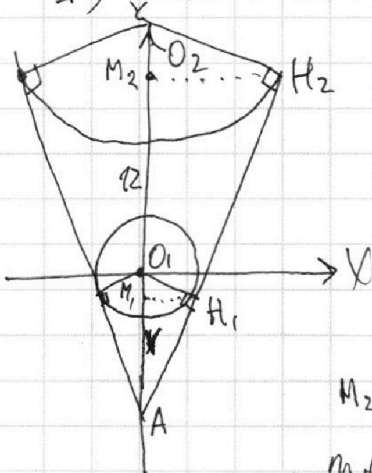
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Знаем, чтобы найти все значения  $a$  достаточно задать угловые коэффициенты,  $k$  прямых. ~~Значит~~ симметричные относительно оси  $OY$  так как отсюда. Этим ось симметричны обе окружности, знаем ~~значит~~ у этих прямых противоположные угловые коэф.:



I) касат. внешние



$\triangle AO_1M_1 \sim \triangle AO_2M_2$  (общую гипотенузу и прямой угол)

$AO_1 = x, O_1O_2 = 12, O_2M_2 = 4, O_1M_1 = 4$

тогда  $\frac{x}{x+12} = \frac{1}{4} \quad 4x = x+12, x=4$

значит  ~~$y = kx + b$~~   $y = -kx + b, b = -4$

уравнение  ~~$x^2 + y^2 = 4$~~  имеет 1 решение,

так как касат. пересекаются меньшейю окружностью в 1 точке

$M_2, M_1$  высоты на  $OY$ ,  $M_2H_2 \parallel OX \parallel M_1H_1$   
 тогда  $\frac{M_2H_2 - M_1H_1}{AM_1 - AM_2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

из уравн. (2) и из уравн. (2):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y-12)^2 - 16 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + (y-12)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$

уравнение  $x^2 + y^2 = 1$  задает окружн. с центром  $(0;0)$  и  $R=1$   
 уравнение  $x^2 + (y-12)^2 = 16$  задает окружн. с центром  $(0;12)$  и  $R=4$

Из уравнения 2 следует что точки лежат всегда внутри/на гра-  
 нце 1 круга и снаружи/на границе другого. так как на  
 границе круги не пересекаются, то решениями могут быть

~~только точки на границе обоих окружн. так как~~  
~~если точка снаружи обоих, то она не внутри ни~~  
 только точки внутри обоих кругов (см. рис. 1),  
 и граница с границей - решения

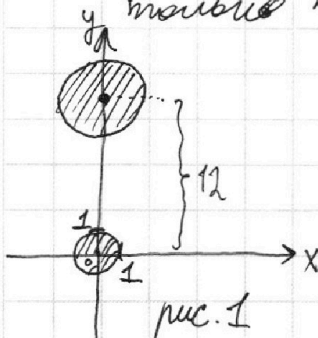


рис. 1

чтобы ~~граница~~ система имела ровно  
 2 решения, нужно чтобы прямая  
 $ax + y - 8b = 0$  пересекла границу  $\vee$   
 кругов ровно в 1 точке, т.е.  
 (касаясь только внутри окр. пересек. осей)

~~уравнения:  $\begin{cases} ax + y - 8b = x^2 + y^2 - 1 \\ ax + y - 8b = x^2 + (y-12)^2 - 16 \end{cases}$  имели ровно 1 решение~~

общая касат. к 2 кругам 4:

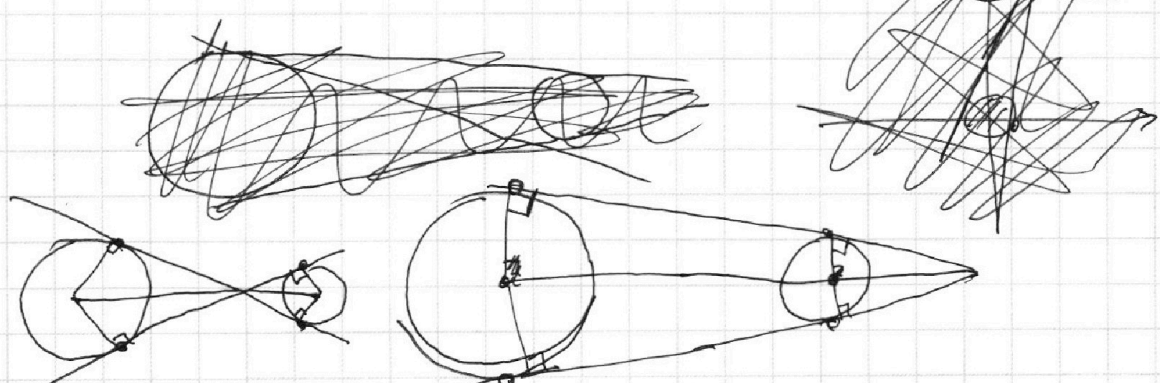


рис. 2

рис. 3

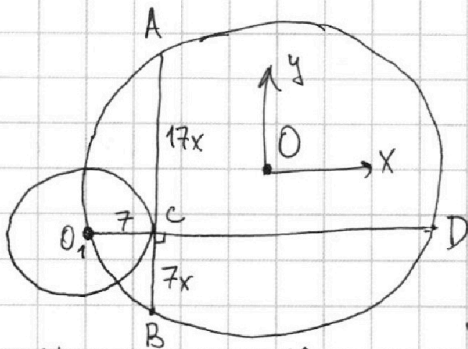
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть  $O, C$ , где  $O$  - центр  $\omega$  пересекает  $\Omega$  в точке  $D$ ,  
тогда  $O_1C = 7$  и  $O_1C \perp AB$ ,  
т.к.  $O_1C$  касается  $AB$ , радиус  
в  $(\omega)$  касается  $\perp$  касательной

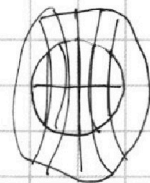
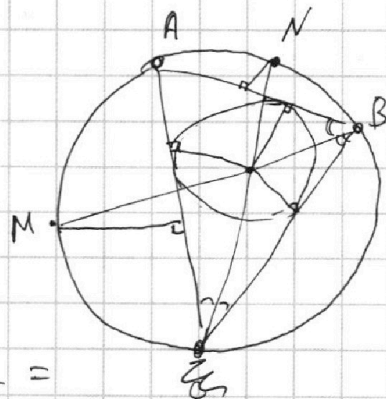
~~2) по дв. пересек. хорд:~~  
Введем систему координат с центром в  $(O)$ , ось  $y \parallel AB$   
~~ось  $x \parallel O_1D$~~  ось  $x \parallel O_1D$

тогда если  $A = (x_1; y_1)$   
 $B = (x_2; y_2)$

$O_1 = (x_2; y_3)$ ,  $C = (x_1; y_3)$  то

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 7 \\ y_1 - y_3 = \frac{17}{7} \\ y_3 - y_2 = \frac{7}{7} \\ x_1^2 + y_1^2 = 13^2 \\ x_2^2 + y_2^2 = 13^2 \\ x_2^2 + y_3^2 = 13^2 \end{cases}$$

$$(x_1 - 7)^2 + y_3^2 = 13^2$$



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} =$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a - b}$$

$$1 - 9x = 3x^2 + 3x + 1$$

$$2 - 1 - 9x = 2 - 6x - 1 - 3x$$

$$a + b : m$$

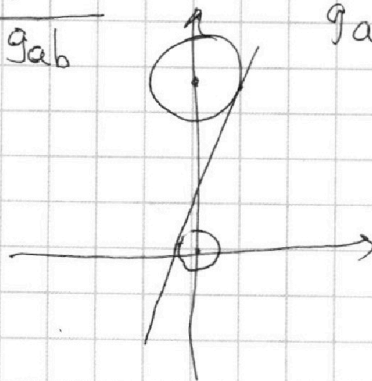
$$a : m$$

$$9ab : m$$

$$b : m$$

$$\Downarrow \\ 9 : m$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\text{OD3: } \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$1 - 9x = 2 - 1 - 3x - 6x = (2 - 6x) - (1 + 3x) = (2 - 6x) + 3x^2 - (1 + 3x) - 3x^2$$

$$= (3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1), \text{ м.е.}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

Если  $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$ , м.е.  $2 - 6x = 1 + 3x$ , то

$$9x = 1 \text{ и } x = \frac{1}{9} \in \text{OD3}$$

Вместо:

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1$$

$$1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 3x^2 - 6x + 2$$

$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$81x^2 - 12x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 69}}{2 \cdot 69}$$

$$D = 144 + 4 \cdot 69 =$$

$$= 4^2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 69 = 4^2(9 + 69)$$

$$= 4^2(78)$$

