МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

√ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

√ 2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

√ 4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

√ 6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №1

$a, b, c \in \mathbb{N}$.

$ab \vdots 2^{14}7^{10}$; $bc \vdots 2^{17}7^{17}$ и $ac \vdots 2^{20}7^{37}$

$$\begin{cases} ab \geq 2^{14}7^{10} \\ bc \geq 2^{17}7^{17} \\ ac \geq 2^{20}7^{37} \end{cases} \Big| \cdot \rightarrow a^2b^2c^2 \geq 2^{51}7^{64}$$

$abc \geq 2^{26}7^{32}$, безв $\frac{51}{2} \notin \mathbb{N}$, а если ст. вхожд. 2-и в abc меньше $\frac{51}{2}$, то получим противоречие.

Заметим, что $ac \vdots 7^{37} \Rightarrow abc \vdots 7^{37}$, т.е. если бы 7 входило в ~~abc~~ abc в степ. от 32 до 36, то мы бы получили противоречие $\Rightarrow$ ~~тот~~ оценка следующая: $\underline{abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}}$.

Пример: на $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$
Пусть $b = 2^6$; $a = 2^8 \cdot 7^{10}$; $c = 2^{12} \cdot 7^{27}$

Тогда: $abc = (2^6 \cdot 2^8 \cdot 2^{12}) \cdot (7^{10} \cdot 7^{27}) = 2^{26} \cdot 7^{37}$

$ab = 2^8 \cdot 7^{10} \cdot 2^6 = (2^{14} \cdot 7^{10}) \vdots (2^{14} \cdot 7^{10})$

$bc = 2^6 \cdot 2^{12} \cdot 7^{27} = (2^{18}7^{27}) \vdots (2^{17}7^{17})$

$ac = 2^8 \cdot 7^{10} \cdot 2^{12} \cdot 7^{27} = (2^{20} \cdot 7^{37}) \vdots (2^{20}7^{37})$.

Пример подходит ~~...~~.

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2 Ответ: 8

Если $\frac{a}{b}$ — несократима, где $a, b \in N$, то ~~…~~ НОД$(a;b)=1$, т.е. у a и b нет общих простых множителей.

~~…~~ Пусть $(a+b) \vdots m$ и $(a^2-6ab+b^2) \vdots m$, найдём, что и требуется в задаче, максимально-возможное значение m.

$(a^2-6ab+b^2) = a^2+2ab+b^2-8ab = ((a+b)^2-8ab) \vdots m$, где $(a^2-6ab+b^2) \vdots m$

имеем: $(a+b) \vdots m \Rightarrow 8ab \vdots m$

$\begin{cases} (a+b) \vdots m \\ 8ab \vdots m \end{cases}$ Если мы предположим, что в m есть простой множитель из a или b,

то ~~…~~ $(a+b) \not\vdots m$, ведь ~~…~~, к примеру, если мы возьмём в m множитель из a, то ~~…~~ a будет кратно этому множителю, а b уже нет.

В общем говоря, ~~…~~ $(a+b)$ не может быть $\vdots$ числу, входящему в разложение на прост. множ. a или b, ведь: докажем от противного: пусть ~~…~~ q — простой делитель a (или b — это неважно). Тогда $8ab \vdots q$, но $a+b = qk+b \equiv b \pmod q \not\equiv 0$, т.е. $(a+b) \not\vdots q$, поэтому ~~…~~ получим противоречие к тому, что $m \vdots q \Rightarrow m \not\vdots q$, где q — прост. множ. ~~…~~ a или b.

Таким образом, $8ab \vdots$ ~~…~~ $1, 2, 4, 8$ и числам, которые в разложении имеют простые делители a или b ~~…~~ (если a или $b \vdots 2$, то $2, 4$ и 8 могут пересек. с ~~…~~ остальными числами). Из всех этих чисел $(a+b)$ делит только те, которые в разлож. не имеют делителей a или $b \Rightarrow$
$\Rightarrow$ если a или $b \vdots 2$, то ~~…~~ НОД$(a+b; 8ab) = 1$, если оба числа нечётные, то $\max[\text{НОД}(a+b; 8ab)] = 8$. Приведём пример: $a = 3$; $b = 13$;

$\frac{a}{b} = \frac{3}{13}$ — несокр. ✓

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} = \frac{3+13}{16^2-8\cdot3\cdot13} = \frac{16}{16^2-8\cdot39} = \frac{2}{2\cdot16-39} = -\frac{2}{7}$$

$32 - 39$

несокр. к данному

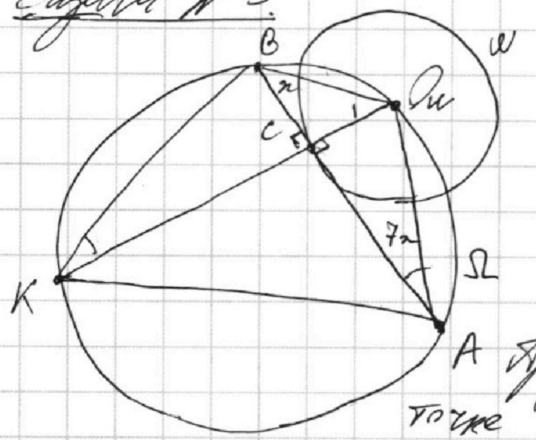
Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3.



$AC : CB = 7 : 1$ $\boxed{AB - ?}$

$r_\omega = 1$; $r_\Omega = 5$

Решение:

Пусть $AC = 7x$; тогда $CB = x$ и $AB = 8x$.

По условию AB касается ω $\Rightarrow$

$\Rightarrow O_\omega C = r_\omega = 1$ и $O_\omega C \perp AB$.

Продлим $O_\omega C$ до пересечения с Ω в точке K.

$\angle BKO_\omega = \angle BKC = \angle O_\omega AB = \angle O_\omega AC$, поскольку они опираются на 1 дугу BO_ω.

~~$\triangle BKC \sim \triangle O_\omega AC$ по 2 углам ($\angle BCK = \angle O_\omega CA = 90°$ и $\angle BKC = \angle O_\omega AC$) $\Rightarrow \frac{BC}{CO_\omega} = \frac{KC}{AC}$~~

Поскольку KO_ω и AB — ~~хорды~~ пересек. хорды,

$KC \cdot CO_\omega = AC \cdot CB$

$AC \cdot CB = 1 \cdot KC$, т.е. $7x^2 = KC$ (численно, конечно).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 Ответ: $x = \frac{2}{7}$

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$ проверим ~~...~~ $\frac{2}{7}$: $2-7x=0$

~~Если~~ $7x = 2$

$x = 2/7 \Rightarrow$ ~~$2x^2 - 5x + 3 = \frac{8}{49} - \frac{10}{7} + 3 =$~~

Заметим, что $(2x^2+2x+1)+(2-7x) = 2x^2-5x+3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ если $2-7x=0$, то $2x^2+2x+1 = 2x^2-5x+3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~и это~~ $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 0 = 2-7x \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{7}}$ — 1 из решений. (оказалось единственным решением)

Теперь вернёмся ко всем ост. случаям:

домн. на сопряжённое

$$\frac{2x^2-5x+3-2x^2-2x-1}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x$$

$$\frac{2-7x}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x \quad \Big| \cdot \frac{1}{2-7x}$$, случай, в котором $2-7x=0$, мы уже разобрали

$$\frac{1}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}} = 1$$

$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1 \quad | (\ldots)^2$ всё $\geq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ можем

$$\begin{cases} 2x^2-5x+3+2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}+2x^2+2x+\cancel{1} = \cancel{1} \\ 2x^2-5x+3 \geq 0 \\ 2x^2+2x+1 \geq 0 \end{cases}$$ — выполнено, всегда $2x^2+2x+1 = (x+1)^2+x^2$

$4x^2 - 3x + \cancel{4}\,3 + 2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} = 0$

$2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} = 3x - 4x^2 - 3 \quad (1)$

Теперь заметим, что левая часть ~~р~~рав-ва ≥ 0, а правая всегда < 0: $-4x^2+3x-3 \to D = 9-4(-3)(-4) = 9-48 = \underset{<0}{-39} \Rightarrow$

$\Rightarrow -4x^2+3x-3 < 0 \;\forall x \in R \Rightarrow$ у ур. (1) нет реш.

остался единств. случ. $x = \frac{2}{7}$ Ответ: $x = \frac{2}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

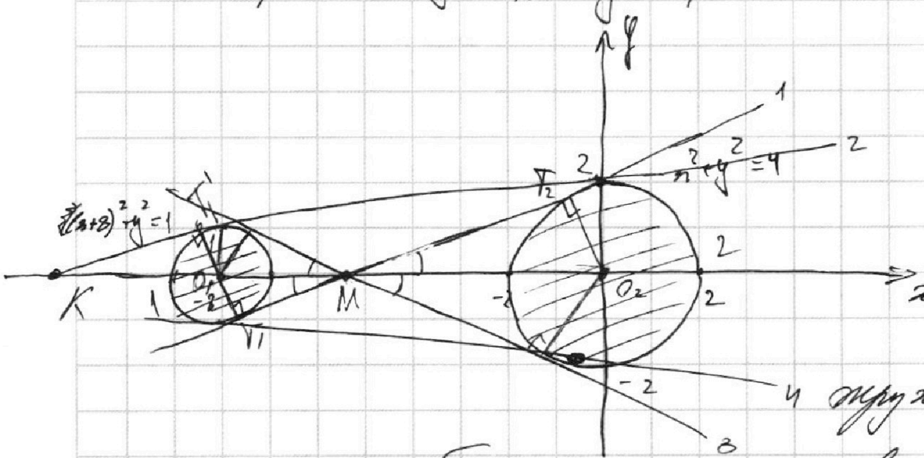
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Задача~~ Задача №6

$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2+y^2-4) \leq 0 \end{cases}$ имеет только 2 реш.

Заметим, что 1) $ax - y + 10b = 0 \to$ прямая с ур. $y = ax + 10b$

2) $((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \leq 0$ — 2 круга ~~окружности~~.



Если $(x;y)$ вне обеих окр., то $((x+8)^2+y^2-1)>0$ и $(x^2+y^2-4)>0 \Rightarrow$ я не подходит

Если $(x;y)$ на 1 из 4 окружностей, то 1 из множителей обращ. в 0 и усл. выполнено.

Если $(x;y)$ в 1 из кругов, то 1 множ. >0, другой <0, следовательно всё произв. $\leq 0 \to$ верно.

Если $y = ax+b$ пересекает ~~В~~ хотя бы 1 окружность в 2 точках, то решений > 2, ведь все точки прямой, наход. внутри окружности тоже подходят.

Если ~~пря~~ $y = ax+b$ не пересек. окр., то очевидно, решений нет совсем.

Если $y=ax+b$ касается только 1 окр., то реш. 1. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $y = ax+b$ должна касаться ~~обеих~~ окружностей — это единств. возможный вариант.

У 2-ух (непересек.) окружн. могут быть только 4 общие касат., они изображены на чертеже сверху (схематично) — 2 внешние, 2 внутренние.

Осталось найти угловые коэффициенты у этих прямых.

1) Займёмся внутренними: достаточно найти угл. коэф. 1-ой, чтобы найти коэф. 3 (они отличаются только знаком, поск. симметричны отн. оси OX, как и обе окружности).

~~Пусть~~ T_1 и T_2 — соответственно точки касания 1 и 2 окружностей. M — т. пересеч. ~~В~~ касат. №1 оси OX.

O_1 и O_2 — центры окр. 1 и 2 соотв.

$\triangle O_1T_1M \sim \triangle O_2T_2M$ по 2 углам (1 вертик.: $\angle O_1MT_1 = \angle O_2MT_2$ и 2 прямые из того, что ~~касат~~ T_1T_2 — касат, а O_1T_1 и O_2T_2 — радиусы).

Тогда $O_1M : MO_2$ как $O_1T_1 : O_2T_2 = 1:2$

$O_1M + MO_2 = 8 = 3MO_1 \Rightarrow MO_1 = \frac{8}{3}$ и $MO_2 = \frac{16}{3}$

Тогда $ax + 10b$ ~~где~~ содерж. точку $(-\frac{16}{3}; 0)$.

$-a\frac{16}{3} + 10b = 0$

$16a = 30b \Rightarrow \boxed{8a = 15b} \Rightarrow$ ~~$10b = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}8a = \frac{16}{3}a$~~

Продолжение 6-ой

Теперь найдём такие a и b, что
$\begin{cases} y = ax + 10b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ имеет 1 реш. (т.е. касается).

$\begin{cases} y = ax + \frac{16}{3}a \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ $\quad x^2 + a^2x^2 + 2a^2\frac{16}{3}x + \frac{256}{9}a^2 = 4$

$x^2(a^2+1) + \frac{32}{3}a^2x + \left(\frac{256}{9}a^2 - 4\right) = 0$

$\Leftrightarrow$ единств. реш.

$\frac{D}{4} = 0 = \frac{256}{9}a^4 - (a^2+1)\left(\frac{256}{9}a^2 - 4\right) = \frac{256a^4}{9} - \frac{256a^4}{9} + 4a^2 - \frac{256a^2}{9} + 4 = 0 \mid \cdot 9$

$-\frac{256}{36}$, 220

$36a^2 - 256a^2 + 36 = 0$

$220a^2 = 36$

$a = \pm\sqrt{\frac{36}{220}} = \pm\sqrt{\frac{18}{110}} = \pm\sqrt{\frac{9}{55}} = \pm\frac{3}{\sqrt{55}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ если возьмём b такое, что $10b = \frac{16}{3}a$, то получим касательные.

2) Теперь найдём угл. коэф. внешних касат.:

Пусть касат. №2 (соотв. и №4 по симметрии) пересек. ось OX в точке K. T_1' — точка касания касат. №2 окр. 1. Тогда $\triangle O_2T_2K \sim \triangle O_1T_1'K$ по 2 углам (прямые $\angle O_2T_2K$ и $\angle O_1T_1'K$ и общий $\angle O_2KT_2$).

Поэтому $\frac{O_1K}{O_2K} = \frac{O_1T_1}{O_2T_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow O_1K = \frac{1}{2}O_2K$, т.е. O_1 — середина O_2K, $O_1O_2 = 8 \Rightarrow O_2K = 16$ и $O_1K = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Получили, что касат. 2 пересек. ось OX в т. $(-16;0)$, т.е.

$-16a+10b=0$

$\underline{10b = 16a}$

Теперь найдём такое a, что $\begin{cases} y=ax+10b \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ имеет 1 реш.

$\begin{cases} y=ax+16a \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ $\quad x^2+a^2x^2+32a^2x+256a^2-4=0$

(касается) $\quad x^2(a^2+1)+32a^2x+256a^2-4=0$

$D/4=0 \quad = 256a^4-(256a^2-4)(a^2+1)=\cancel{256a^4}-\cancel{256a^4}-$

$-256a^2+4a^2+4 = 4a^2+4-256a^2=0$

$252 \,|\, 4$, -24, 63, 12

$252a^2=4$

$63a^2=1 \Rightarrow a=\pm\sqrt{\frac{1}{63}}$ — $+$ — №2, $-$ — №4

(по симметрии),

опять же, взяв b такое, что $10b=16a$, мы получим касательные.

Мы получили все 4 возможных знач. a и из того, что больше общих касат. у 2 непересек. окр. нет, следует, что эти знач. a — единств. подходящие.

Ответ: $a=\pm\sqrt{\frac{1}{63}}$; $\pm\frac{3}{\sqrt{55}}$

Продолжение 6-ой задачи.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик $\min[abc] - ?$

$ab : 2^{14} 7^{10}$, $bc : 2^{17} 7^{17}$ $ac : 2^{20} 7^{37}$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 14 \\ a_7 + b_7 = 10 \\ b_7 + c_7 = 17 \\ b_2 + c_2 = 17 \\ a_2 + c_2 = 20 \\ a_7 + c_7 = 37 \end{cases}$$

$a_2 +$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 14 \\ b_2 + c_2 = 17 \\ a_2 + c_2 = 20 \end{cases}$$

$a_2 = 20 - c_2$

$20 - c_2 + b_2 = 14$

$$\begin{cases} b_2 - c_2 = -6 \\ b_2 + c_2 = 17 \end{cases}$$

$2b_2 = 11$

$b_2 =$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 14 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \\ a_2 + c_2 \geq 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 + 17 - c_2 \geq 14 \\ b_2 \geq 17 - c_2 \\ a_2 + c_2 \geq 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 - c_2 \geq -3 \\ a_2 + c_2 \geq 20 \\ b_2 \geq 17 - c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_2 \geq 17 \\ b_2 \geq 17 - c_2 \end{cases}$$

$a_2 \geq 9 \Rightarrow$ $a_2 + c_2 \geq 9 + c_2 \geq 20$

~~$b_2 \geq 17 - c_2$~~ ≤ 6 $c_2 \geq 11$

$\frac{a}{b}$ – несокр. $a, b \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \cancel{\frac{a+b}{a^2 - 6ab + 9b^2 - 8b^2}} = \cancel{\frac{a+b}{(a-3b)^2 - 8b^2}} \quad \frac{a+b}{a^2 + 2ab + b^2 - 8ab} =$$

$$= \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

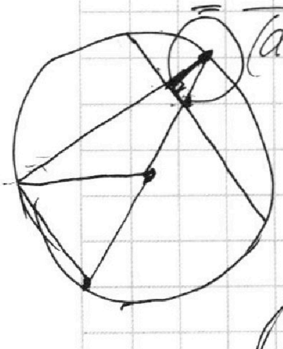
$(a+b) : n$

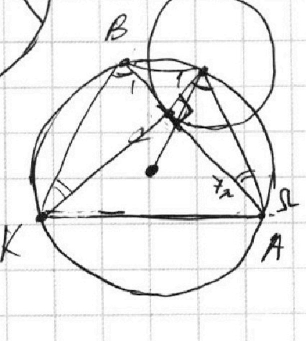
$\left((a+b)^2 - 8ab\right) : n$

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$8ab : n$

$2b =$





$7x^2$ $8x$?

$\frac{AC}{CD} = 7 : 1$ $= CK$

$$\frac{7x}{CK} = \frac{x}{1}$$ $7x = CK \cdot x$

$CK = 7$

$7x^2 = CK = 7$

$x^2 = 1 \Rightarrow \underline{x = 1} \Rightarrow 8x = \underline{8}$

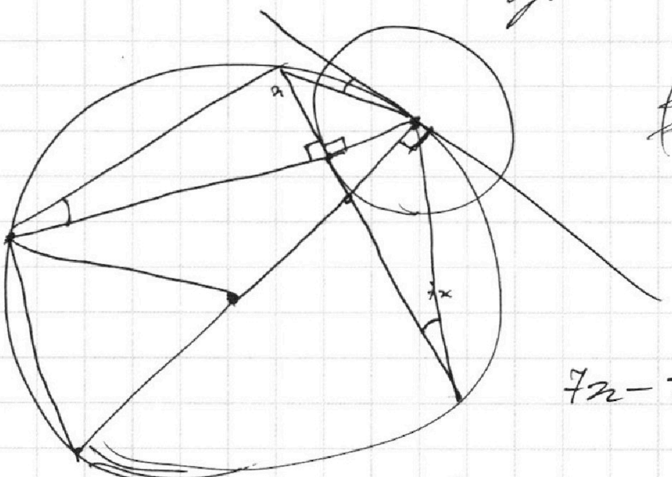
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик



$\sqrt{2x^2-5x+3} = 2-7x+\sqrt{2x^2+2x+1}$

$2-7x+\sqrt{2x^2+2x+1} \geq 0$

$7x-2 \leq \sqrt{2x^2+2x+1}$

$\frac{a}{b}$ – несокр.

$$\frac{2x^2-5x+3-2x^2-2x-1}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x$$

$$\frac{2-7x}{-2x^2-5x+3} = 1$$

$2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} = 3x-4x^2-3$

$\begin{cases} 2x^2-5x+3 \geq 0 \to 2(x-1)(x-\frac{3}{2}) \geq 0 \\ 3x-4x^2-3 \geq 0 \to \end{cases}$

$-4x^2+3x-3=0$

$D = 9-4(-3)(-4) = 9-48<0$

$$= \frac{a^2-6ab+b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2-8ab}{a+b} = a+b-\frac{8ab}{a+b}$$

$(a+b) \vdots m$

$8ab \vdots m$

у a и b нет общих простых множителей.

$8ab \vdots m$ $\qquad a+b$

$\frac{3}{5}$ – несокр. V

$a=3$ $b=5$

$$\frac{a+b}{a^2+6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} \qquad \frac{8}{8^2-8\cdot 8} =$$

$$\frac{13+3}{16^2-8\cdot(13+3)} = \frac{16}{16^2-16\cdot 8} = \frac{1}{16-8} = \frac{1}{8}$$

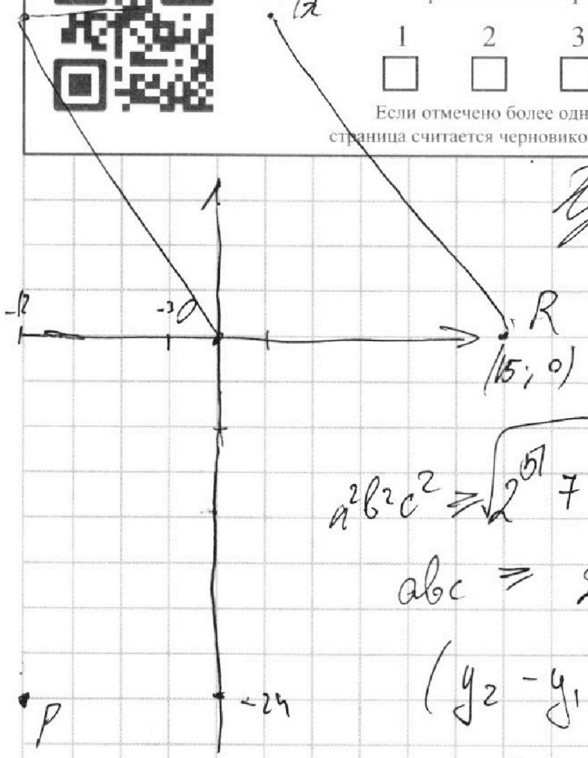
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

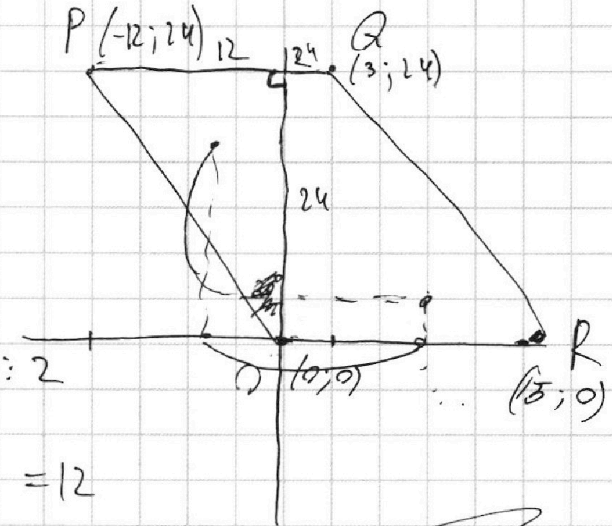
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик





$a^2b^2c^2 \geq \sqrt{2^{151}\, 7^{64}}$

$abc \geq 2$

$(y_2 - y_1) \vdots 2$

$2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1) = 12$

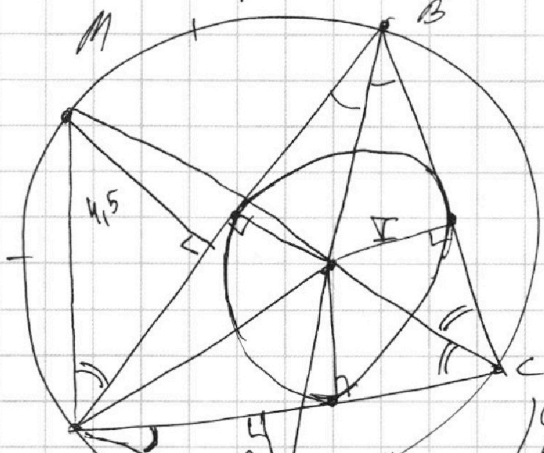
$2x_2 + y_2 = 12 + \cancel{2x_1 + y_1}$

$576 + 144 = 720$

$\cancel{144 + 576} = \cancel{\sqrt{720}}$

$\cancel{12^2(1+2)^2}$

$12^2 + 24^2 = 12^2 + 4 \cdot 12^2 = \cancel{12^2} \sqrt{12^2 \cdot 5} = \underline{12\sqrt{5}}$



$abc = 2^{30} 7^{37}$

$ac = 2^{30} 7^{37} \Rightarrow b = 1$

$a = 2^{14} 7^{10}$

$c = 2^{17} 7^{17}$

$a_2 + b_2 + c_2 \geq ?$

$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 14 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \\ a_2 + c_2 \geq 20 \end{cases}$

$a_2 \geq 14 - b_2$

$a_2 + b_2 + c_2 \geq 31 - b_2$

$2a_2 + 2b_2 + 2c_2 \geq 51$

$a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{51}{2}$

$a_2 + b_2 + c_2 \geq 26$

$abc = 2^{26} 7^{37}$ $\quad ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \to$

$b = 2^6$

$a \cdot 2^6 \geq 2^{14} \cdot 7^{10}$

a

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача № 1. ~~Черновик~~

$a, b, c \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} ab \vdots 2^{14} 7^{10} \\ bc \vdots 2^{17} 7^{17} \\ ac \vdots 2^{20} 7^{37} \end{cases}$$

Пусть a_2, b_2, c_2 — степени вхождения 2-и в число a, b и c соотв. Аналогично a_7, b_7 и c_7, только для 7-и.

Оценка:

1) Из $ab \vdots 2^{14}$; $bc \vdots 2^{17}$; $ac \vdots 2^{20}$ следует, что

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 14 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \\ a_2 + c_2 \geq 20 \end{cases} \Big| + \Rightarrow 2a_2 + 2b_2 + 2c_2 \geq 51$$

$a_2 + b_2 + c_2 \geq 26 > \frac{51}{2}$, т.к. $\frac{51}{2} \notin \mathbb{N}$, а 26 — ближ. натур. $> \frac{51}{2}$.

$$\boxed{a_2 + b_2 + c_2 \geq 26}$$

2) Из $ab \vdots 7^{10}$; $bc \vdots 7^{17}$ и $ac \vdots 7^{37}$ следует:

$$\begin{cases} a_7 + b_7 \geq 10 \\ b_7 + c_7 \geq 17 \\ c_7 + a_7 \geq 37 \end{cases} \Big| + \rightarrow 2a_7 + 2b_7 + 2c_7 \geq 64$$

$$\boxed{a_7 + b_7 + c_7 \geq 32}$$

~~Тогда оценка такова: $abc \geq 2^{26} \cdot 7$~~, но $c_7 + a_7 \geq 37 > 32 \Rightarrow$ миним. оценка на $a_7 + b_7 + c_7$ — это 37.

Тогда оценка такова: $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$, т.к. если $abc < 2^{26} \cdot 7^{37}$, ~~то abc ⋮ 7^{37}~~ то степень вхождения 7-и или 2-и будет меньше 37 или 26 соотв., а это невозм. из приведённых выше неравенств.

Пример: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$ $\quad b = 2^6$

$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$ $\quad a_2 + c_2 = 20$

$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$ $\quad a = 7^{10} \cdot 2^8$ $\quad c = 7^{27}$

$a = 2^8 \cdot 7^{10}$ $\quad bc = 2^6 \cdot 2^{12} \cdot 7^{27} = 2^{18} \cdot 7^{27} \vdots 2^{17} \cdot 7^{17}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ \left((x+8)^2 + y^2 - 1\right)\left(x^2 + y^2 - 4\right) \le 0 \end{cases}$$

Черновик

им. только 2 реш.

$y = ax + 10b$ $\quad a^2 \cancel{- 6ab + b^2} =$

$\dfrac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$

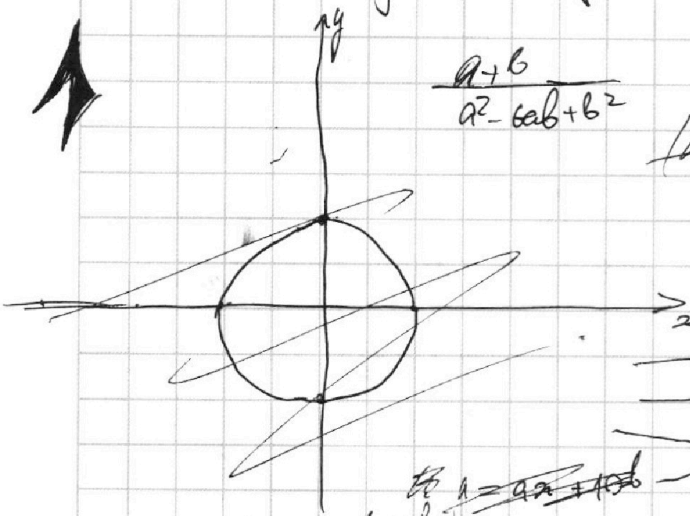
$\cancel{(a+m)}$ $(a+b) : m$

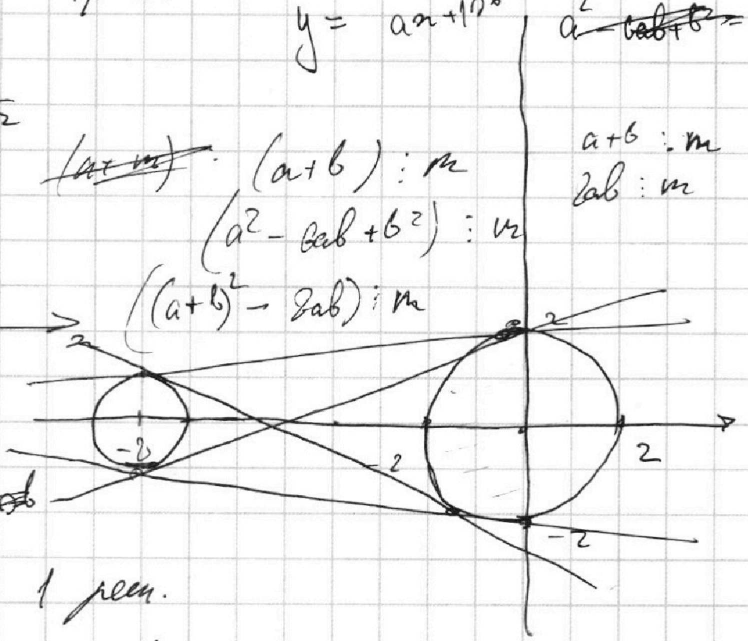
$(a^2 - 6ab + b^2) : m$

$((a+b)^2 - 8ab) : m$

$a+b : m$

$6ab : m$





$\cancel{y = ax + 10b}$

$\begin{cases} y = ax + 10b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ им. 1 реш.

$x^2 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$

$x^2(a^2+1) + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$

$D/4 = 100a^2b^2 - (100b^2 - 4)(a^2+1) =$

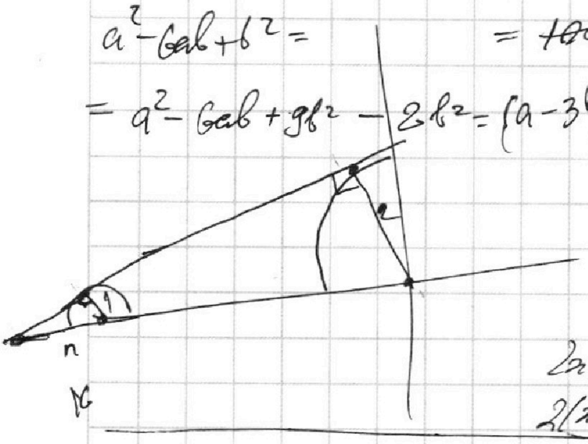
$= \cancel{100a^2b^2} - \cancel{100a^2b^2} - 100b^2 + 4a^2 + 4 =$

$= 4a^2 - 100b^2 + 4 = 0$

$a^2 - 25b^2 + 1 = 0$

$a^2 - 6ab + b^2 =$

$= a^2 - 6ab + 9b^2 - 8b^2 = (a-3b)^2 - 8b^2$



$\dfrac{2}{1} = \dfrac{n+8}{n}$

$2n = n + 8$

$n = 8$

$A(x_1; y_1)$ $B(x_2; y_2)$

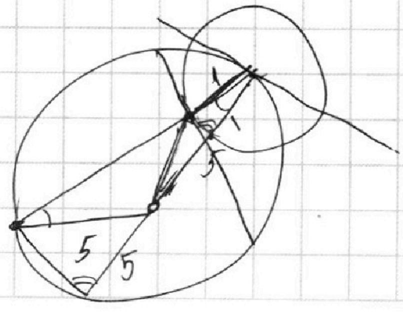
$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$

$(a+b) : m$

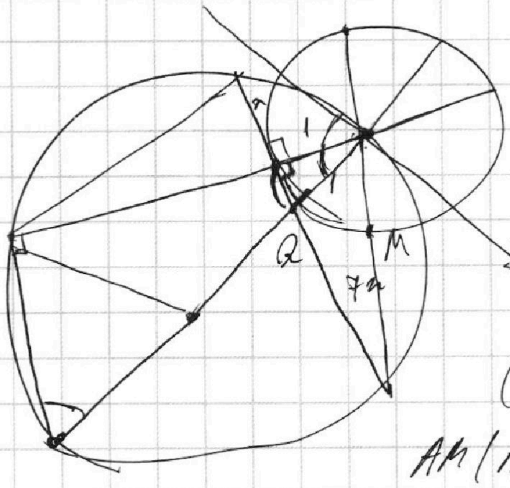
$8ab : m$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\cancel{4x}\frac{1}{CK+1} = \frac{\ln 2}{10}$ $\quad \cancel{7x}^2 = CK$

$9 = AK \cdot QB$ $\quad QC^2 = LQ(LQ+2)$

$49x^2 = AM \cdot (AM+2)$

$(AM+1)^2 = 49x^2 + 1$

$AM(AM+2) = (AM+1-1)(AM+1+1) = (AM+1)^2 - 1$

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$ $\quad \cancel{] \ 2x^2-5x}$

$] \ 2x^2+2x+1 = a$

$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$

$2-7x \ge 0$ $\quad 2-7x = b$

$7x \le 2$

$2x^2-5x+3 \ge 0$

$D = 25-24 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{4} = 1;\ \frac{3}{2}$

$\boxed{x \in (-\infty; 1) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)}$

$2x^2+2x+1 \ge 0$

$(x^2+2x+1)+x^2 = (x+1)^2 + x^2 > 0$ $\quad -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$\sqrt{a+b} = a + \sqrt{a}$ $\quad a^2 + 2a\sqrt{a} - b = 0$

$a+b = a^2 + 2a\sqrt{a} + a$

$b = a^2 + 2a\sqrt{a}$

$\sqrt{a+b} = b + \sqrt{a}$ $\quad 2-7x = 1 - 2\sqrt{2x^2+2x+1}$

$a+b = b^2 + 2\sqrt{a}b + a$ $\quad 1-7x = -2\sqrt{2x^2+2x+1}$

$\cancel{1 = b + 2\sqrt{a}}$ $\quad b^2 + 2\sqrt{a}b - b = 0$ $\quad 7x = 2\sqrt{2x^2+2x+1} + 1$

$b(b + 2\sqrt{a} - 1) = 0$

$b = 0$ $\quad b = 1 - 2\sqrt{a}$

$\cancel{\sqrt{a-b} - \sqrt{a} = b}$

$b = 2-7x$

$a = 2x^2 \cancel{+} 5x + 3$

$\cancel{\sqrt{a} - b = \sqrt{c}}$

$\sqrt{a} - \sqrt{a-b} = b$

$\sqrt{a} = b + \sqrt{a-b}$

$a = b^2 + 2b\sqrt{a-b} + a - b$

$b(b + 2\sqrt{a-b} - 1) = 0$

$\frac{x}{CK} = \frac{1}{7x}$

$(x^2+1)7x = 7x^3 + 7x$