



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

10:26
14:26

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что \underline{ab} делится на $2^{15}7^{11}$, \underline{bc} делится на $2^{17}7^{18}$, \underline{ac} делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab, c \in N, ab : 2^{15} \cdot 3^m (1)$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^n, ac : 2^{23} \cdot 7^{39} (2) (3)$$

$$(abc)_{\min} - ?$$

1) ясно, чтобы (abc) было \min то
при умножении (abc) на 7^{39} делится
только 2^0 и 7^4 , т.к. $p \neq 7$
 $p \neq 2$

2) если $ac : 7^{39}$, то abc нет
минимум делится на 7^{39} , т.к.
 $a = 7^{21} \cdot k$

$$8 / 7$$

$$c = 7^n \cdot p$$

условия (1), (2), (3), согр. $(abc)_{\min}$ при
умножении на 7^{39}

$$\left. \begin{array}{l} ab \cdot bc = 2^{15} \cdot 5 \\ b \leq 2^4 \\ ac \cdot bc = 2^{40} \cdot 5 \\ c \leq 7^{12} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} ab \cdot ac = 2^{30} \cdot 5 \\ a \leq 2^{11} \end{array} \right\}$$

3) ясно, чтобы делители bcd

3) условия \uparrow нужно чтобы $a = 2^{11} \cdot 5$
и $c = 7^{12}$, т.к. bcd делится на 7^{39}
 abc делю \min

$$b = 2^5 \cdot x$$

$$c = 2^{10} \cdot z,$$

согр. $(abc)_{\min}$ делится на 2^{28}

$$\text{Отвтв.: } 2^{20} \cdot 7^{39}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

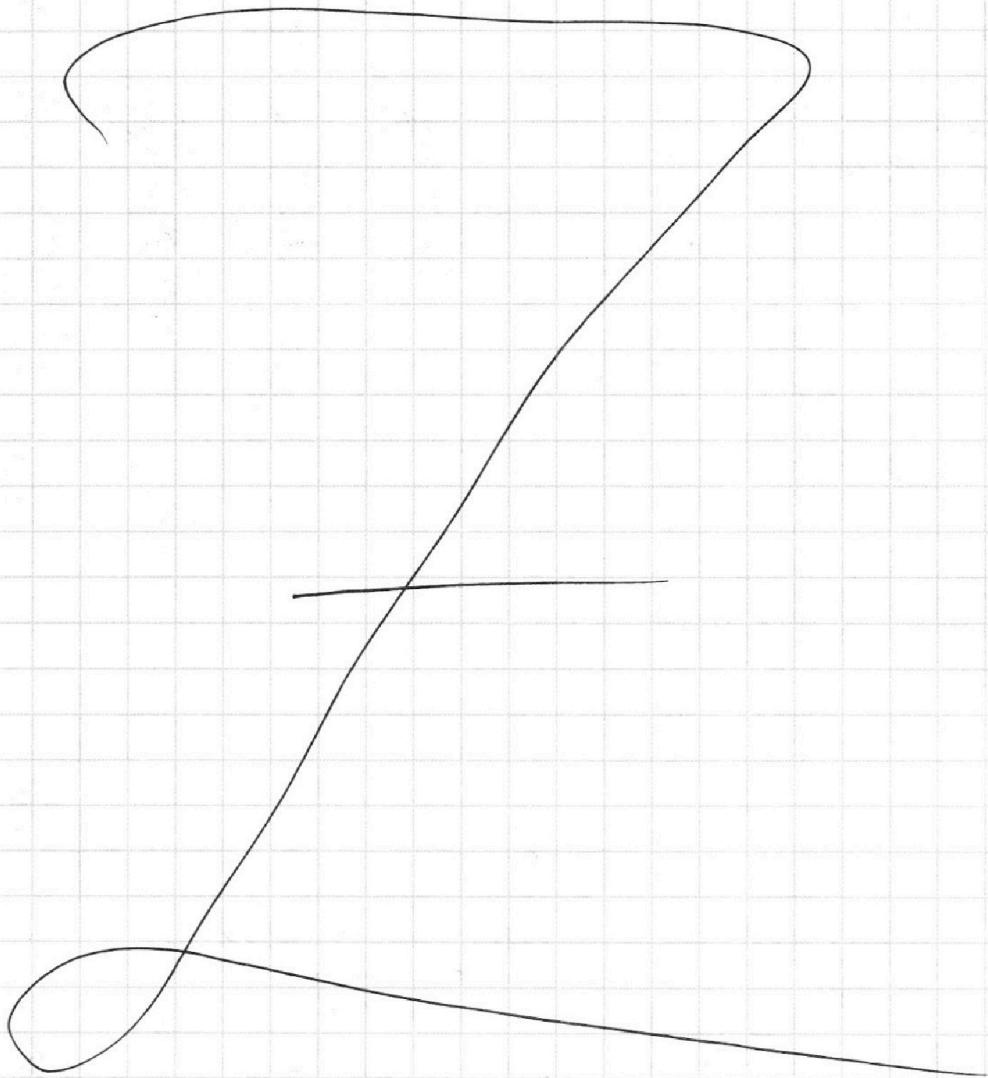
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}, \text{ с учётом}$$

$$\text{того, что } \frac{a}{b} \text{ несократимая дробь с}$$
$$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, \text{ то } m_{\max} = 9$$

Ответ: 9.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) *проверить* $O_2H \perp AB$

$$AH = HB$$

поскольку $AC = 12x$
 $CB = 7x$, тогда

$$AH = HB = 12x$$

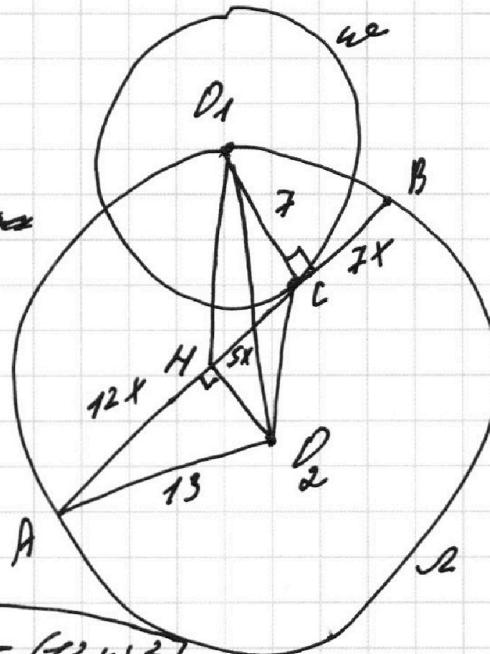
$$HC = 5x$$

2) рассмотрим $\triangle AH_2C$

из т. Тибрата

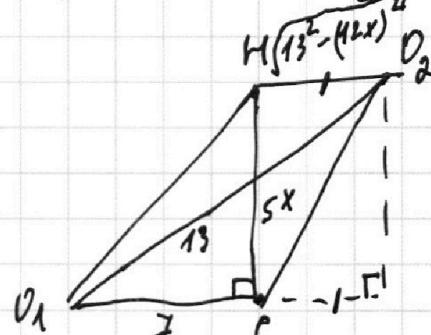
запись этого теор.

следует: $O_2H = \sqrt{13^2 - (12x)^2}$



3) рассмотрим *трапецию* O_1H_2C

$$O_1O_2 = 13$$



Используемо $HC^2 + (O_2C + H_2D)^2 = O_1O_2^2$

$$25x^2 + (7 + \sqrt{169 - 144x^2})^2 = 169$$

$$25x^2 + 49 + 169 - 144x^2 + 14\sqrt{169 - 144x^2} = 169$$

$$x = 1$$

След. $AC = 24x = 24$

Ответ: 24.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$
$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + (1 - 9x)$$
$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 + 1 - 9x + 2 \cdot (1 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$
$$- 81x^2 + 9x = 2 \cdot (1 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$
$$9x(1 - 9x) = 2 \cdot (1 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

1) $1 - 9x = 0$.

$x = \frac{1}{9}$, число $\frac{1}{9}$ удовлетворяет
карикатурное уравнение

2) $1 - 9x \neq 0$, тогда $9x = 2 \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 81x^2 = 12x^2 + 12x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 69x^2 - 12x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 144 + 4 \cdot 69 \cdot 4 =$$

$$= 1240$$

$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{1240}}{2 \cdot 69} < 0$$

(из подложим)

$$x_2 = \frac{12 + \sqrt{1240}}{2 \cdot 69}$$

Важно, чтобы $\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + (1 - 9x) \geq 0$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 81x^2 + 1 - 9x$$
$$81x^2 - 21x \leq 0$$

$$x \in [0; \frac{21}{81}]$$

Решим: $\frac{1}{9}$

$$x_2 > \frac{21}{81}, \text{ изг. на } \text{не подходит.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ.

чч.

чч



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

если $y=0$, то **№ 5 (продолжение)**
 $\alpha = \frac{\alpha_B}{x_0}$

рассмотрим $\triangle ABC$
 находим CB

$$\sin \alpha = \frac{t}{\sqrt{4}} = \frac{5}{\sqrt{119}}$$

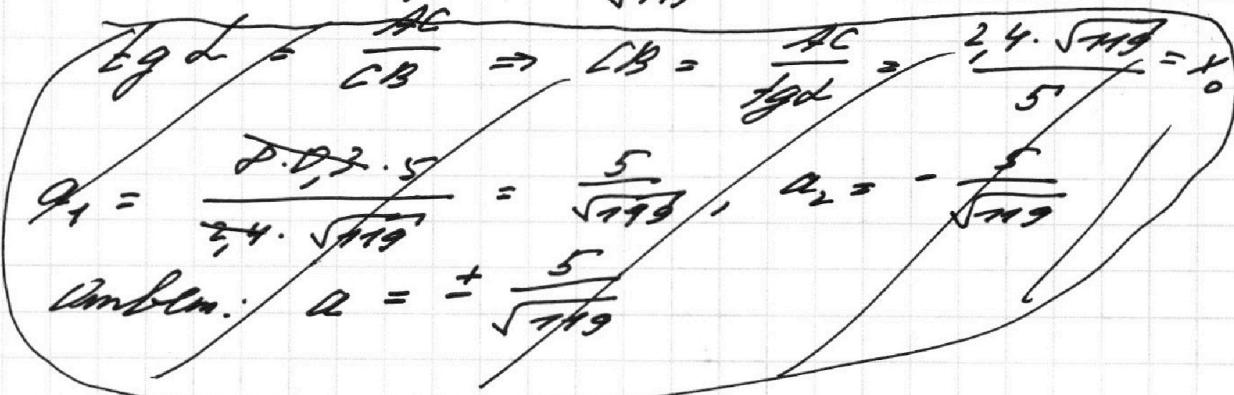
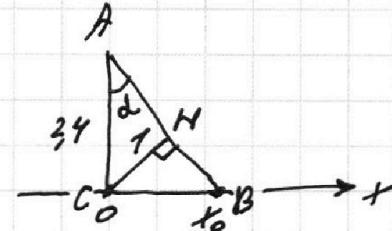
$$\cos \alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{t}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{144}{25} - 1$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{119}{25}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{\sqrt{119}}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ - 25 \\ \hline 119 \end{array}$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{CB} \Rightarrow CB = AC \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{24 \cdot \sqrt{119}}{5} = t_0$$

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_B}{x_0} = \frac{24 \cdot \sqrt{119}}{24 \cdot 5} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$\alpha_2 = -\frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$\text{Умслн: } \alpha = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

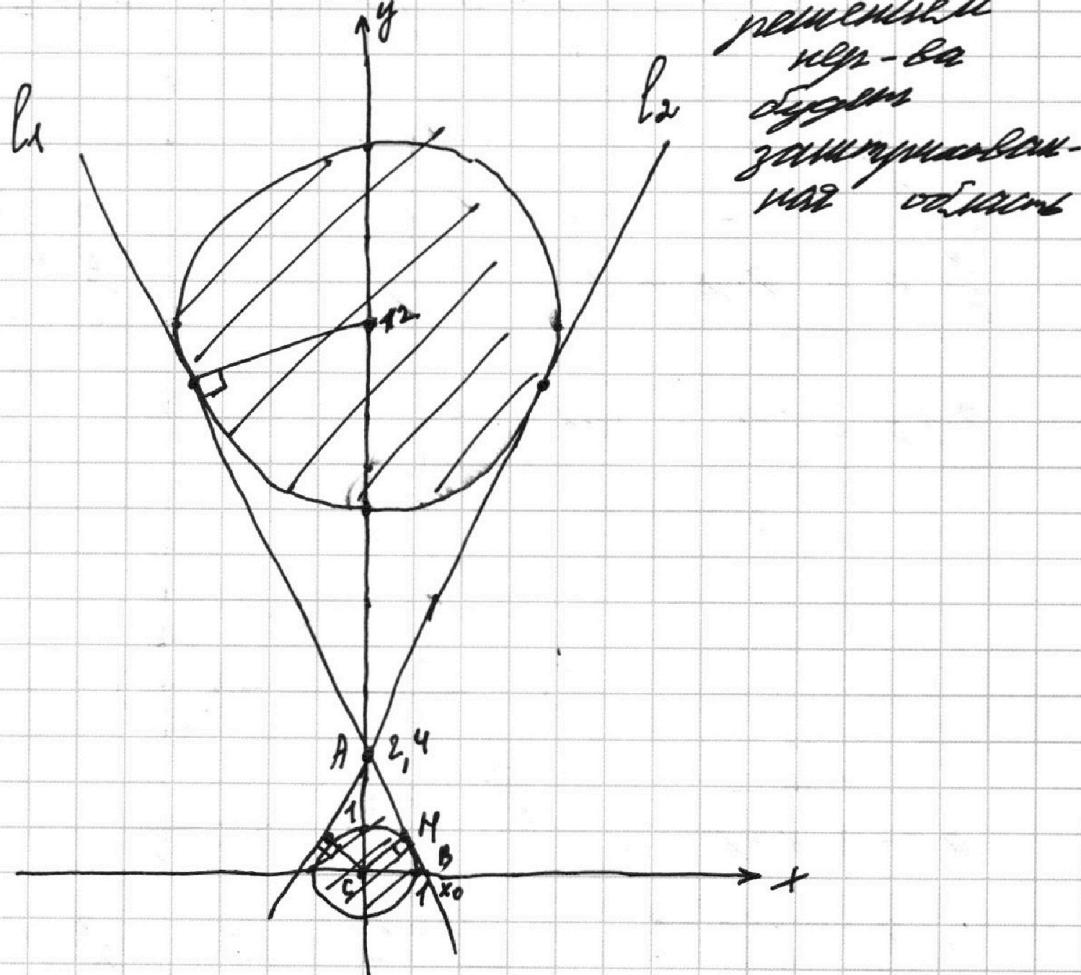
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№.

$$\begin{cases} ax + y = \delta & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим ур-во (2):

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$



метод симплекс числа 2 решения
нуль, метод уравнение (2) соответ-
ствует уравнению l_1 и l_2
т.к. при $x=0$ $y=2.4$ (из подобия),
но $\delta = 0.3$

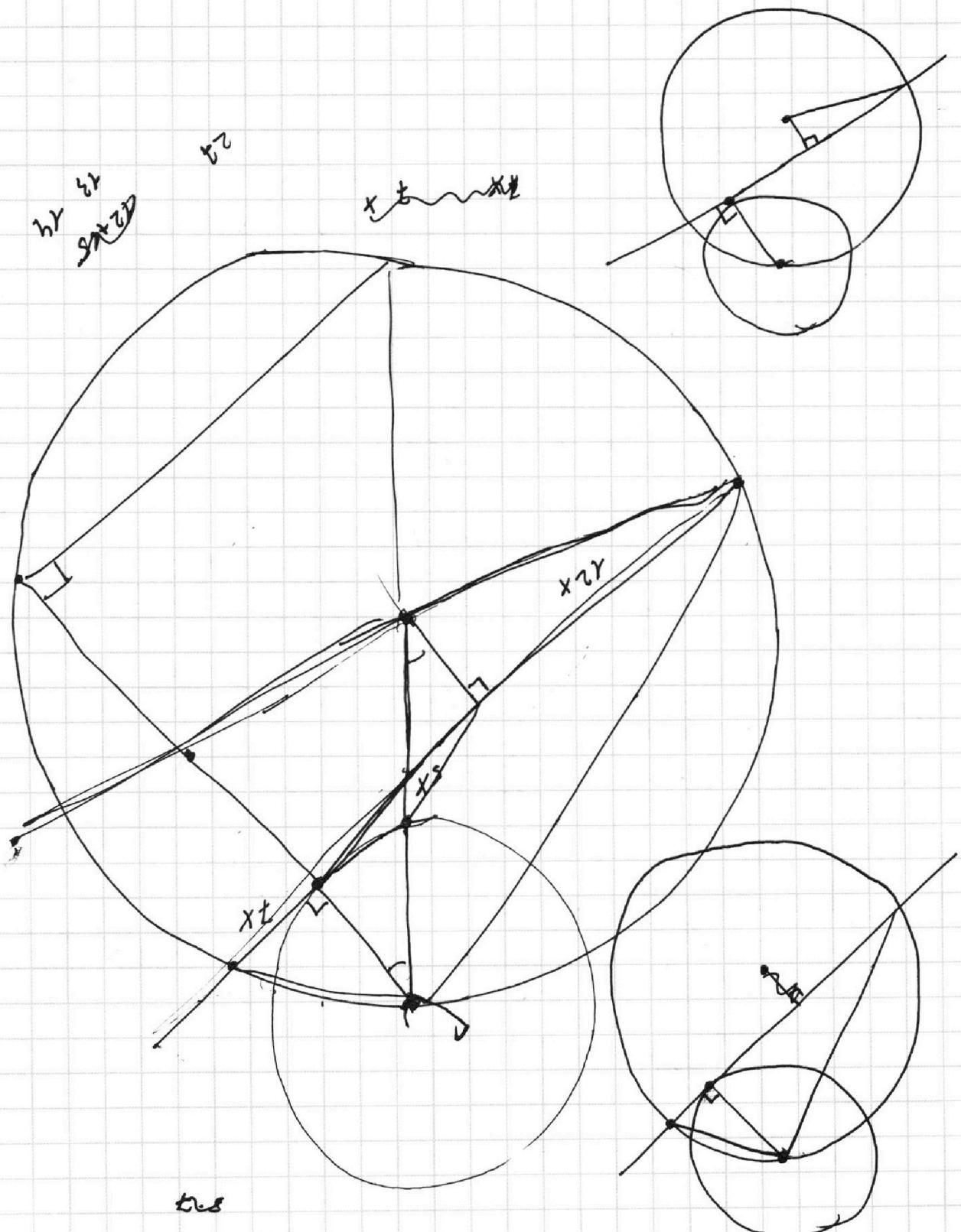
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5.

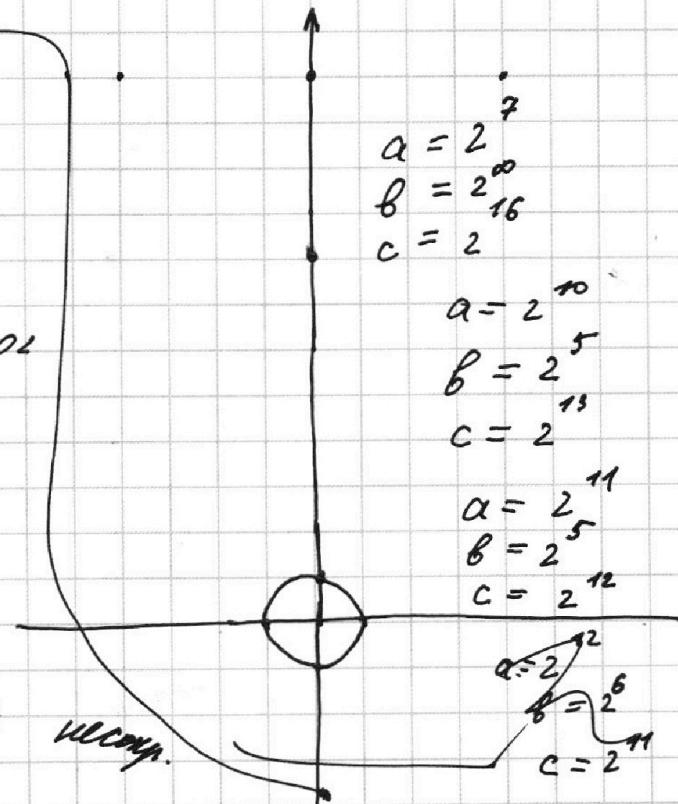
$$\begin{cases} ax + y - ab = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим кривые (2).

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$$

$$\frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{a}{b} \cdot a - 7 \cdot a + b}$$

$$a+b = a^2 - 7ab + b^2$$



$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

$\frac{a}{b}$ исчур.

$$\frac{a+b}{a+b}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} =$$

$$\frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{a}{b} \cdot a - 7 \cdot a + b}$$

$$\left(\frac{a}{b} + 1\right) \cdot \frac{1}{b}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} - 7 \cdot \frac{a}{b} + 1$$

$$\frac{\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a}{b} - 7\right) + 1}{\left(\frac{a}{b} + 1\right) \cdot \frac{1}{b}}$$

На одной странице можно оформлять **только** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

$$a+b \quad a^2 + b^2 + 2ab - 9ab = (a+b)^2 - 9ab$$

$$\frac{(a+b)^2}{a+b} - \frac{9ab}{a+b} = a+b - \frac{9a}{1+\frac{a}{b}}$$

$$\frac{a}{b} \cdot k$$

$$(a \times b) \cdot k$$

$$\frac{a}{b}$$

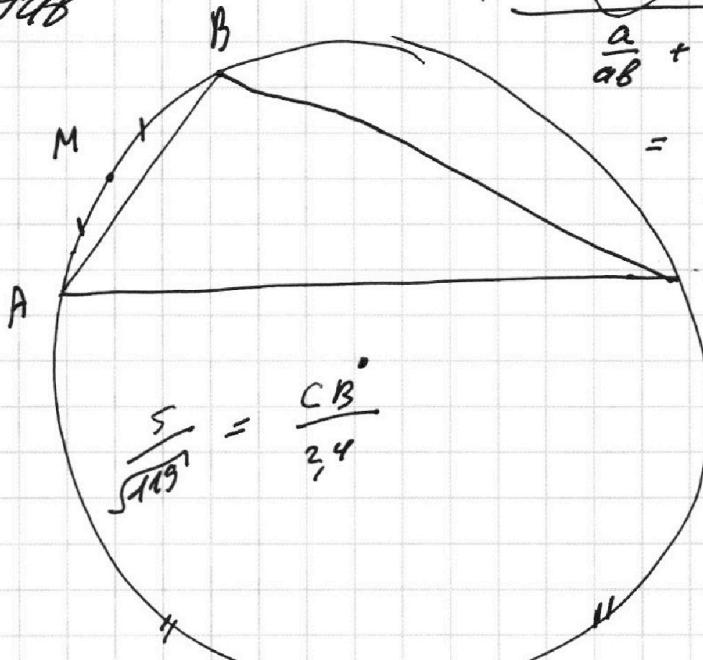
$$\frac{a^2 - 7ab + b^2}{a+b} \because ab$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} =$$

$$\frac{a^2}{ab} - 7 + \frac{b^2}{ab} =$$

$$\frac{a}{ab} + \frac{b}{ab} =$$

$$= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 7$$



$$\frac{a+b}{9ab} =$$

$$= \frac{a}{9ab} + \frac{b}{9ab}$$

$$\frac{s}{AB} = \frac{CB}{2r}$$

$$\frac{a+b}{ab} = 9$$

$$a/b + b/a = 9$$

$$\frac{a^2 - 7ab + b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 9ab}{a+b} =$$

$$= a+b - \frac{9ab}{a+b} = a+b - \frac{9}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} \quad 4.5.$$

$$\frac{a+b}{a+b-9ab} = \frac{1}{a+b-9ab}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 9$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{9}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

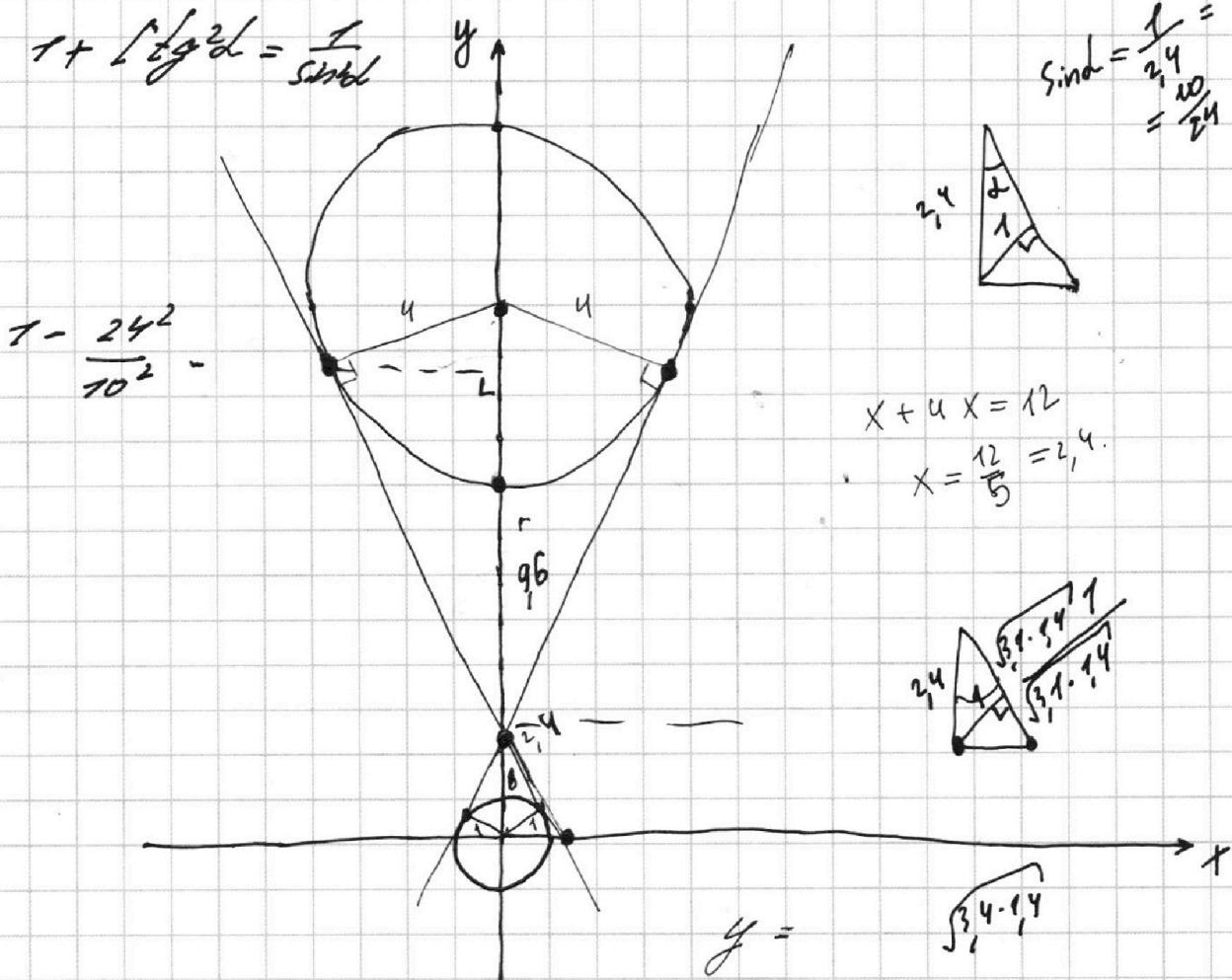
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = -ax + bf \quad x=0 \Rightarrow bf = 2,4 \\ y=2,4 \quad b=0,3.$$

$$y = -a \cdot x + 2,4.$$

$$ax = 8,6 \\ a = \frac{8,6}{x}.$$

$$d = \sqrt{9,6^2 - 4^2} = \sqrt{116 \cdot 5,6}$$

$$\cancel{\text{Задача}} \quad \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$



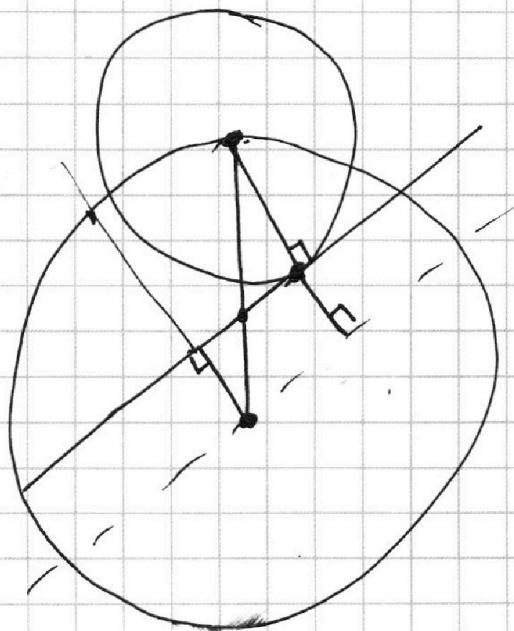
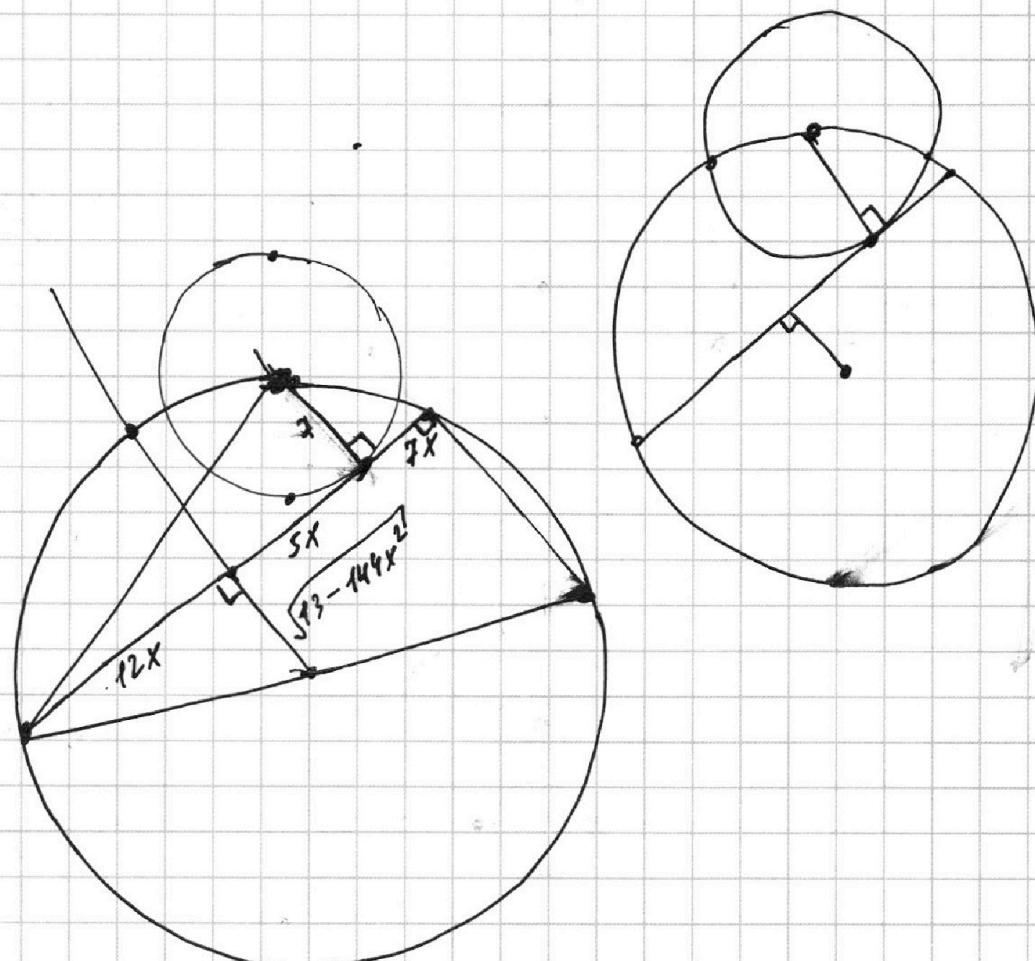
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$r = 7 \\ R = 13 \\ AB - ?$$

$$\frac{81}{-12} \\ 69$$

$$n3. \quad \begin{array}{r} 69 \\ \times 16 \\ \hline 414 \\ 1104 \\ \hline 1104 \\ 1104 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x = \frac{12 + \sqrt{7450}}{69 \cdot 2}$$

$$3 \cdot 20^2 - 6 \cdot 20 + 2$$

$$\sqrt{3 \cdot 80^2 + 3 \cdot 20 + 1} + \\ + 1 - 9 \cdot 80 \cdot 1$$

$$6 + \frac{1}{69}$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} > 9x - 1$$

$$\frac{12x^2 + 15}{69}$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

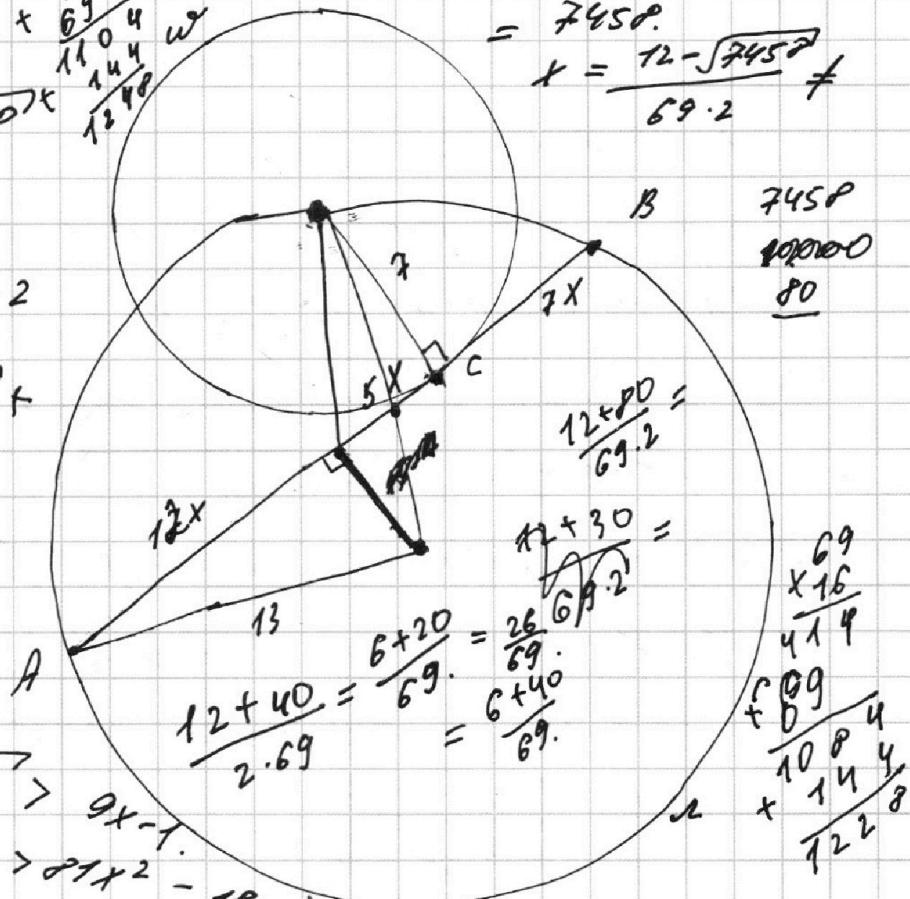
$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 16 \cdot 69 =$$

$$= 7450$$

$$x = \frac{12 - \sqrt{7450}}{69 \cdot 2} \neq$$

$$7450 \\ 10000 \\ 80$$



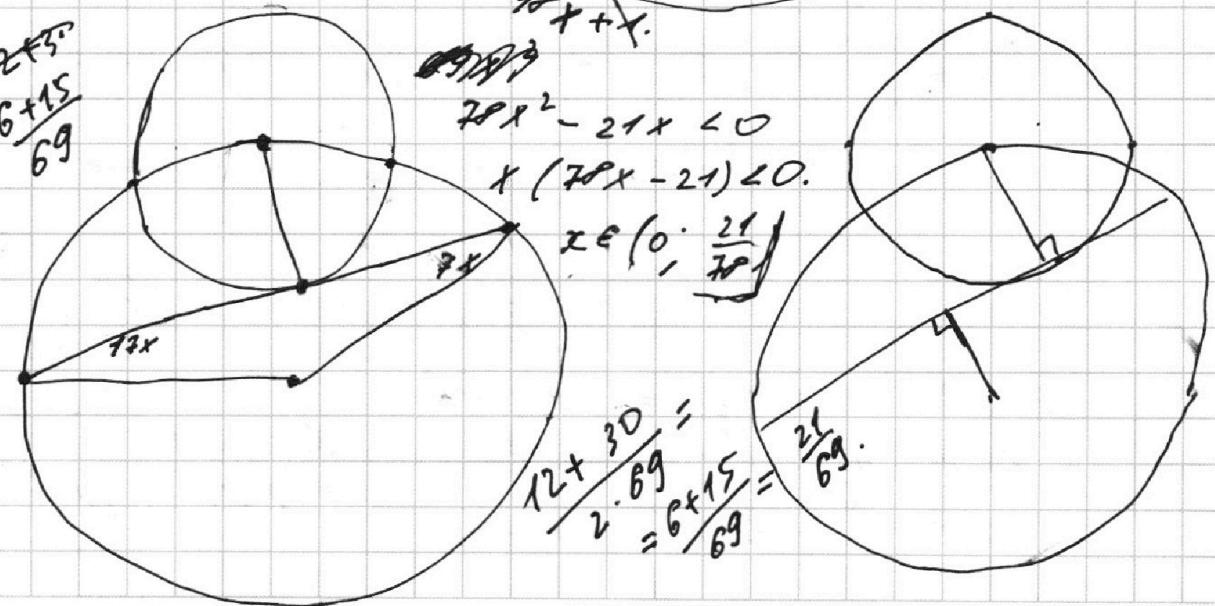
$$12x + x$$

$$28x^2 - 21x < 0$$

$$x(28x - 21) < 0$$

$$x \in (0; \frac{21}{28})$$

$$\frac{12x + 30}{2 \cdot 69} = \\ = \frac{6x + 15}{69} = \frac{21}{69}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 7 - 9x$$

$$D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12 \quad b = 9 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -3.$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = (7 - 9x) + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\cancel{3x^2 - 6x + 2} = (7 - 9x)^2 + \cancel{3x^2 + 3x + 1} +$$

$$+ 2 \cdot (7 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-6x + \cancel{2} = \cancel{x} + \cancel{81x^2} - 18x + 3x + \cancel{x} - \dots$$

$$\cancel{81x^2} - 201x + 2 \cdot (7 - 9x) \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0.$$

$$\cancel{3x^2 - 6x + 2} = \cancel{x} + \cancel{81x^2} - 18x + \cancel{3x^2 + 3x + 1} +$$

$$+ 2 \cdot (7 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\cancel{81x^2} - 9x + 2 \cdot (7 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$9x(9x - 7) + 2 \cdot (7 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0.$$

$$2. \cancel{(7 - 9x)} \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x \cancel{(7 - 9x)}$$

$$D - 1 - 9x = 0 \quad 7458. \quad 2$$

$$x = \frac{1}{9} \quad \checkmark$$

$$\sqrt{\frac{1}{27}} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2 = \frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2 =$$

$$= \cancel{3x^2 - 6x + 2} = \cancel{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-9x = -\cancel{5} \quad x > 0$$

$$x = \frac{5}{9} \quad x > 0$$

$$4 \cdot (3x^2 + 3x + 1) = \cancel{81x^2}$$

$$12x^2 + 12x + 4 = \cancel{81x^2} \quad D = 144 - \frac{144}{69} \times 16$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 144 - 144 \times \frac{16}{69}$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0. \quad - 4 \cdot 69 \cdot (69)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) пусть O_1 - центр окр. 1

O_2 - центр окр. 2, $O_2 \perp AB$

2) пусть $O_1 H_1 \perp AB$

3) пусть $AC = 12x$

$$CB = 2x$$

$$4) AH_1 = H_1 B =$$

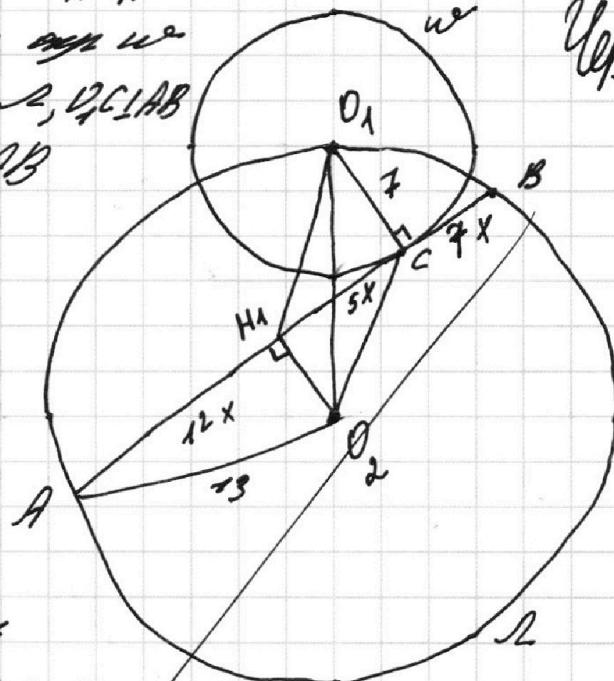
$$= \frac{AC + CB}{2} = 12x,$$

$$\text{и т. } H_1 C = 5x$$

5) рассмотрим

трапецию $O_2 H_1 O_1 C$

если это $O_1 O_2 = 13$



проверки $O_2 H_2 \perp O_1 C$

по т. Пифагора

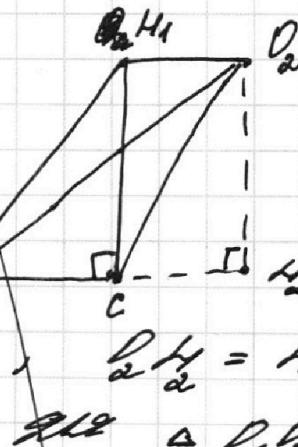
$$O_1 O_2^2 = O_2 H_2^2 + O_1 H_2^2 \quad (*)$$

$$O_1 O_2 = 13, \quad O_2 H_2 = H_2 C = 5x, \quad O_1 H_2 =$$

$$= O_1 C + H_2 C = 7 + H_2 C$$

6) по т. Пифагора $O_2 C \perp O_1 H_2$:

$$H_2 C = \sqrt{13^2 - (12x)^2}$$





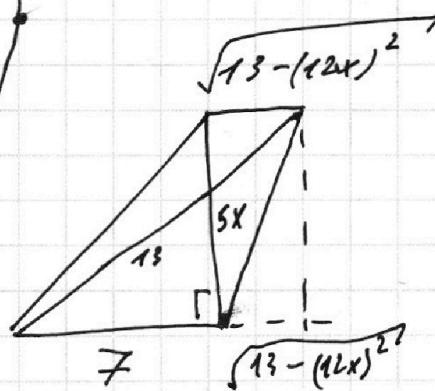
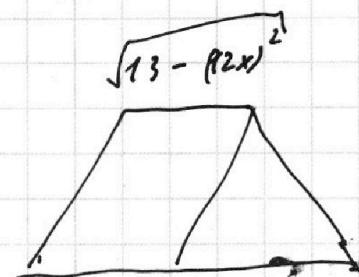
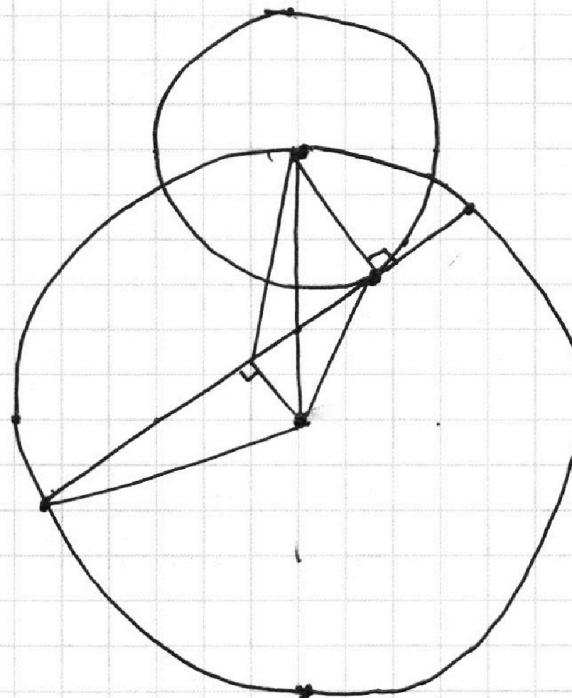
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$25x^2 + (2 + \sqrt{169 - 144x^2})^2 = 169$$

$$25x^2 + 49 + 18\cancel{9} - 144x^2 + \\ + 14 \cdot \sqrt{169 - 144x^2} = 169 \quad 0.$$

$$14 \cdot \sqrt{169 - 144x^2}.$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ - 25 \\ \hline 119 \end{array}$$

$$49 - 119x^2 = 14 \cdot \sqrt{169 - 144x^2}$$

$$12 + \cancel{144} \quad 144$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a^2 - 7ab + b^2}{a+b} = \frac{(a+b)(a-b) - 7ab}{a+b} = \\ = 1 + \frac{a-b-7ab}{a+b}$$

$$D = 49 - 4 \cdot 1$$

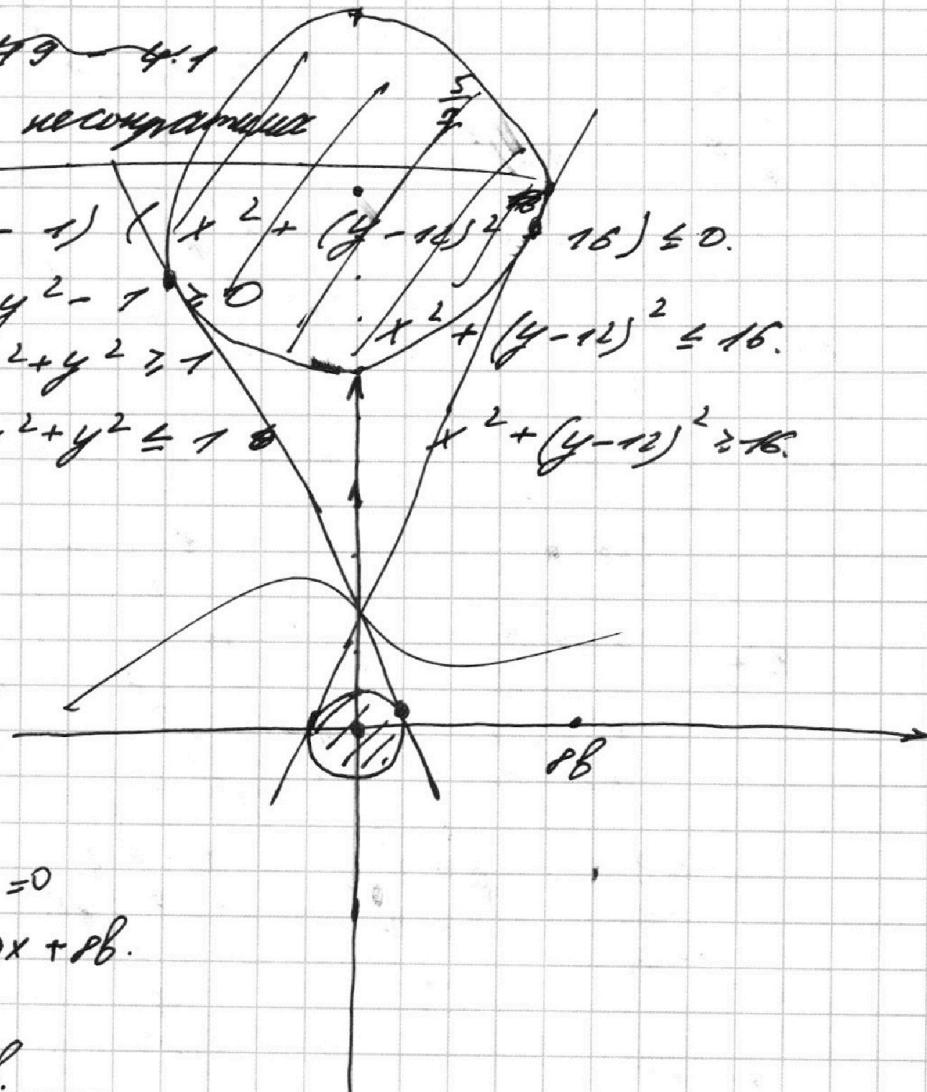
$\frac{a}{b}$ несуществующий

$$(x^2 + y^2 - 1) (x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0.$$

$$\textcircled{I} \quad x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 \geq 1$$

$$\textcircled{II} \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad x^2 + (y-12)^2 \geq 16.$$

$$ax + y - pb = 0 \\ y = -ax + pb. \\ x = 0 \\ y = pb.$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1240

$$\begin{array}{r} & 69 \\ \times & 16 \\ \hline & 414 \\ + & 69 \\ \hline & 1104 \\ + & 144 \\ \hline & 1240 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 28 : 2^{10} \cdot 7^x \\ 82 : 2^{12} \cdot 7^y \\ 2C : 2^{23} \cdot 7^{39} \end{array} \quad (abc)_{\min} - ?$$

$2^n, n_{\min}$

$$\begin{array}{l} 7^{39} \\ 7^{10} = b \\ a = 7^{12} \\ c = 7^{12} \end{array}$$

$$abc \cdot b$$

$$ac \cdot b^2 = 2^{32}$$

$$b^2 = 2^9$$

$$b = 2^4$$

$$c = 7^{10} \checkmark$$

$$a = 7^{12}$$

$$b = 7^4$$

$$ab = 2^{15} f$$

$$bc = 2^{12} f$$

$$ac = 2^{23} p$$

$$\frac{c}{a} = 2^2 \cdot \frac{p}{f}$$

$$(a+b+c)_{\min}$$

$$\bullet \frac{a}{b} = 2^6 \cdot \frac{p}{f}$$

~~688~~

$$\begin{array}{l} b = 2^{10} \\ a = 2^6 \\ c = 2^{21} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a = 2^8 \\ b = 2^7 \\ c = 2^3 \end{array}$$

$$\frac{1}{2^2}$$

$$\begin{array}{l} a = 2^{11} \\ c = 2^{12} \\ b = 2^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a = 2^9 \\ b = 2^{16} \\ c = 2^{11} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a = 2^8 \\ b = 2^7 \\ c = \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a = 2^{10} \\ b = 2^5 \\ c = 2^{13} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a = 2^{11} \\ b = 2^5 \\ c = 2^{12} \end{array}$$

$$ac \cdot b^2 = 2^{32}$$

$$2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$\begin{array}{l} a = 2^{12} \\ b = 2^6 \\ c = 2^{11} \end{array}$$

$$a \cdot b \cdot c^2 = 2^{37}$$

$$\begin{array}{l} a \leq 2^{11} \\ b \leq 2^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a = 2^{12} \\ b = 2^{11} \\ c = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ab \cdot c^2 = 2^{40} \\ 2^{15} \cdot c^2 = 2^{25} \\ c = 2^{12} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2^{10} \\ b = 2^5 \\ c = 2^{13} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a = 2^6 \\ b = 2^5 \\ c = 2^7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a = 2^6 \\ b = 2^{11} \\ c = 2^7 \end{array}$$