



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



- ✓ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- ✓ 3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
- ✓ 4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- ✓ 5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
- ✓ 7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
- а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
- б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

стр 1 из 3!

$$(1) ab: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$a = a' \cdot 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5}, \quad a' \nmid 2, 3, 5$$

$$(1) bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$b = b' \cdot 2^{\beta_2} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\beta_5}, \quad b' \nmid 2, 3, 5$$

$$(3) ca: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

$$c = c' \cdot 2^{\delta_2} \cdot 3^{\delta_3} \cdot 5^{\delta_5}, \quad c' \nmid 2, 3, 5$$

~~дополнительно~~

из (1), (2) и (3) следует:

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 7 \\ \beta_2 + \delta_2 \geq 13 \\ \alpha_2 + \delta_2 \geq 14 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 \geq 11 \\ \beta_3 + \delta_3 \geq 15 \\ \delta_3 + \alpha_3 \geq 17 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_5 + \beta_5 \geq 14 \\ \beta_5 + \delta_5 \geq 18 \\ \delta_5 + \alpha_5 \geq 43 \end{cases} \quad (*)$$

сложим все строки в столбцах и получим неравенства

$$\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq 17$$

$$\alpha_3 + \beta_3 + \delta_3 \geq 22,5$$

$$\alpha_5 + \beta_5 + \delta_5 \geq 37,5$$

неотрицательные

переменные типа

т.к. все α переменные ~~целые~~, то

$$\min(\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2) = 17, \quad \min(\alpha_3 + \beta_3 + \delta_3) = 22,$$

$$\min(\alpha_5 + \beta_5 + \delta_5) = 38.$$

$$abc = a' b' c' \cdot 2^{(\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2)} \cdot 3^{(\alpha_3 + \beta_3 + \delta_3)} \cdot 5^{(\alpha_5 + \beta_5 + \delta_5)}$$

минимальное значение a', b' и c' равно 1.
продолжение $\rightarrow$ на след. стр.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3 стр. из 3

Получаем новую оценку:

$$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

Пример:

$$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{20}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{23}$$

Нужно проверить, что для этих a, b и c выполняется
условие и решается равенство.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

~~$$5 \arcsin(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$~~

$$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5 \arcsin(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{20} - x = \arcsin(\sin x)$$

$$\frac{\pi}{5} - x = \arcsin(\sin x)$$

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{5} - x \leq \frac{\pi}{2} & \quad -\frac{\pi}{2} \leq x - \frac{\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2} & \quad -\frac{3\pi}{10} \leq x \leq \frac{7\pi}{10} \end{aligned} \right.$$

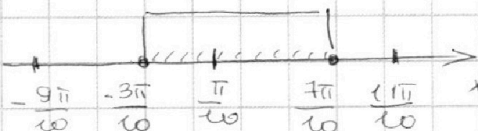
$$\left\{ \begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{5} - x\right) &= \sin x \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} x \in \left[-\frac{3\pi}{10}; \frac{7\pi}{10}\right] \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\pi}{5} - x &= x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} & x &= \frac{\pi}{10} - \pi k \\ \frac{\pi}{5} - x &= \pi - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} & & \emptyset \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} x \in \left[-\frac{3\pi}{10}; \frac{7\pi}{10}\right] \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\pi}{10} - \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right.$$



Ответ: $\frac{\pi}{10}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3 стр. из 3

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{5\sqrt{24}}{24} < -\frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{24}}{24} \\ -\frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{24}}{24} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 0: \quad \frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{24}}{24} \quad a > \frac{\sqrt{24}}{15} \\ a < 0: \quad -\frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{24}}{24} \quad a < -\frac{\sqrt{24}}{15} \end{array} \right.$$

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{\sqrt{24}}{15}) \cup (\frac{\sqrt{24}}{15}; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1 стр. из 3!

$$x + 3ay - 7b = 0$$

$$\begin{cases} (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \\ \quad (1) \qquad \qquad (2) \end{cases}$$

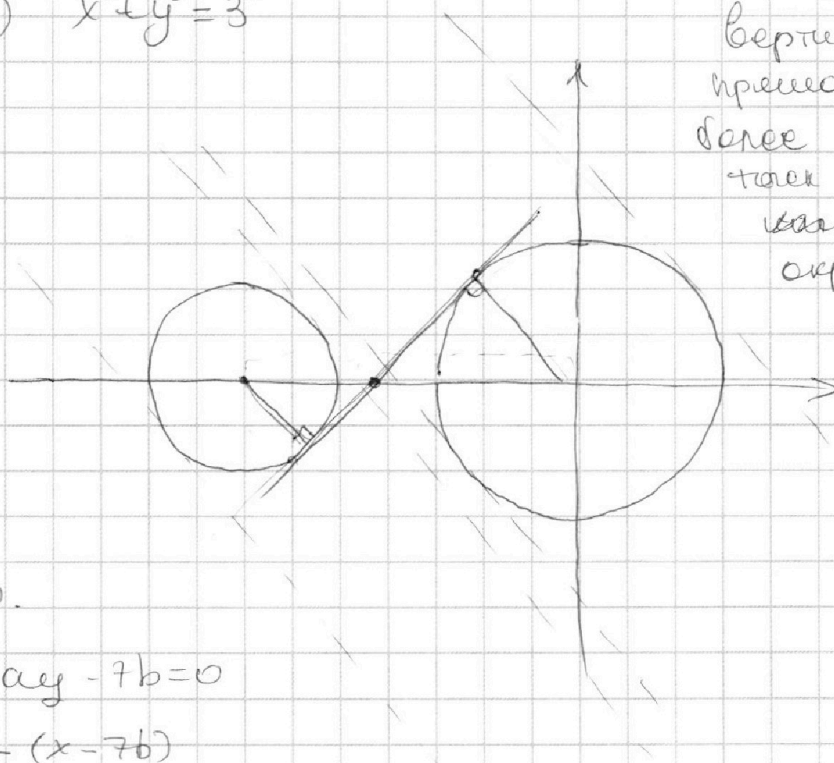
$$(1) (x+7)^2 + y^2 = 2^2$$

если $a=0$:

$$(2) x^2 + y^2 = 3^2$$

$$x = 7b$$

вертикальная
прямая, не
более двух общих
точек с каждою
из окружностей.



$a \neq 0$.

$$x + 3ay - 7b = 0$$

$$y = \frac{-(x-7b)}{3a}$$

$$7b = p$$

каждому значению p и q
соответствует значение a и b .

$$-\frac{1}{3a} = q$$

$y = q(x-p)$ — прямая с углом наклона q ,
пересекающая ось x в точке p .

~~Найти~~ Найти q , при котором существует
прямую именно одну, такую, чтобы
она пересекала обе окружности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1 стр из 2!

$$6x = z \neq$$

$$\text{ОДЗ: } t > 0, y > 0 \quad (6x)^2 \neq 1, y^2 \neq 1$$

$$\log_7^4 t - 2 \log_7 t = \frac{3}{2} \log_7 t - 4$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_7 y = \frac{5}{2} \log_7 y - 4$$

$$\log_7^4 y + 4 = \frac{7}{2 \cdot \log_7 y}$$

$$\log_7^4 t + 4 = \frac{7}{2 \cdot \log_7 t}$$

$$\log_7^5 t + 4 \log_7 t = \frac{7}{2}$$

$$\log_7^5 y + 4 \log_7 y = -\frac{7}{2}$$

$$\log_7^5 t + \log_7 t = 0$$

$$(1) a^5 + a = \frac{7}{2}$$

$$(2) b^5 + b = -\frac{7}{2}$$

$\log_7 t = a$ контролю
из значений
 $\log_7 y = b$ а и b соотв.
свойств ср. зн. t
и y.

в каком выражении
возрастающая функция
равна константе,
споровательно
един. ср. решение.

если в (1) уравнении
 a_0 является решением, то

$(-a_0)$ является решением
второго уравнения, значит

существуют решения a и b, удовлетво-
ряющих уравнениям равна 0,
других решений быть не может
→ продолжение



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2. ср. 43 2.1

из-за ~~возрастания~~ того, что функция возраст.

$$\log_7 z + \log_7 y = 0$$

$$\log_7 zy = 0 \quad zy = 1$$

$$6xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{6}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

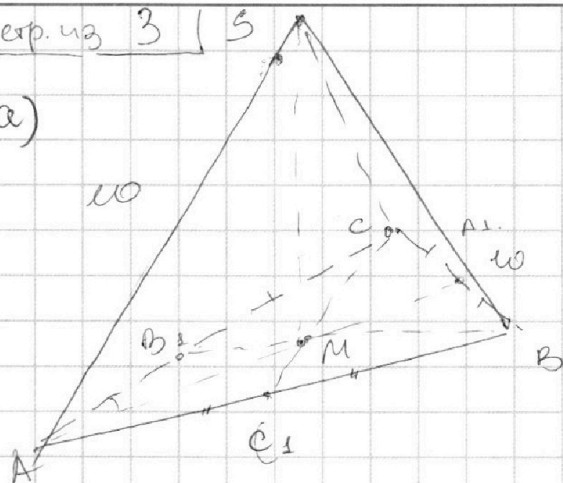
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

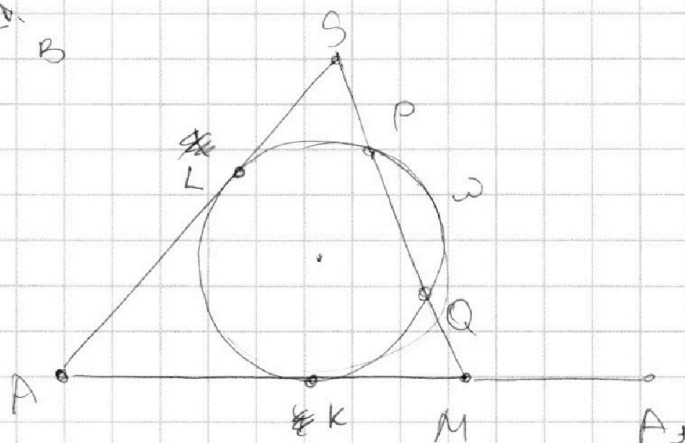
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1 стр. из 3 (5)

a)



4 na. ASM



$$SP = MQ \Rightarrow \text{Pres Pres}$$

$$(P_{\omega}^S = P_{\omega}^M) \Rightarrow (SL = km)$$

$$\Rightarrow (AM = AS) = 0$$

$$AA_1 = \frac{3}{2} AM = 15.$$

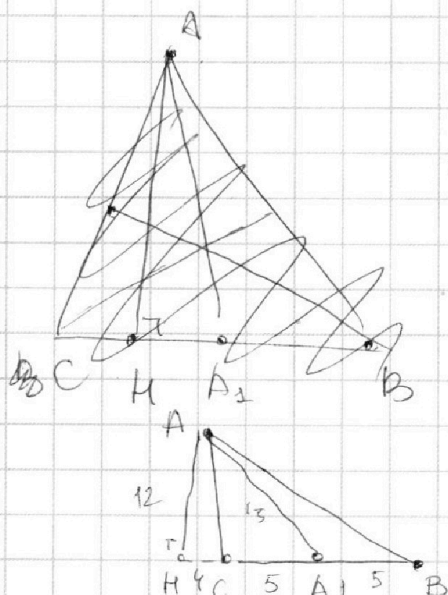
Высота AH в тр. $ABC = \frac{2S_{ABC}}{BC} =$

$= 12.$

Без ограничения одушевити

Пусть Π перпенд. ~~на~~ ~~плоскости~~ на луче A_1C

$$KA_2 = \sqrt{AA_2^2 - AH^2} = \sqrt{225 - 144} = 9.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

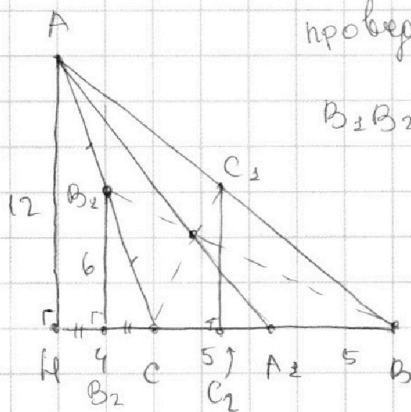
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2 стр из 3



проверим ер. линии ~~AA1, BB1, CC1~~

B_1B_2 в $\triangle ACH$

$$B_1B_2 \perp AC, \quad B_1B_2 = \frac{AH}{2} = 6.$$

$$CB_2 = \frac{CH}{2} = 2, \quad BB_2 = 10 + 2 = 12.$$

по т. Пифагора:

$$BB_1 = \sqrt{B_2B_1^2 + B_2B^2}, \quad BB_1 = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5}.$$

$$C_1C_2 - \text{ер. линии в } \triangle ABH, \quad C_1C_2 = \frac{AH}{2} = 6$$

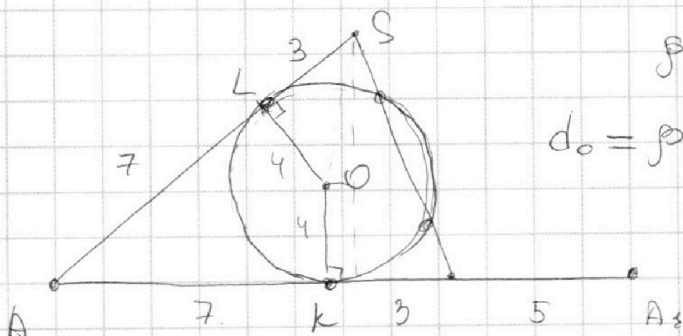
$$\text{или } BC_2 = \frac{BH}{2} = 7, \quad CC_2 = BC - BC_2 = 3.$$

$$\text{по т. Пифагора } CC_1 = \sqrt{CC_2^2 + C_2C_1^2}$$

$$CC_1 = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$$

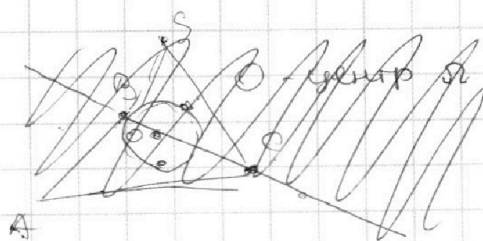
$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 6\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 15^2 \cdot 6 = 1350$$

$$b) \quad SN = 3 \Rightarrow SL = 3$$



$$\rho(A; BC) = AH = 12$$

$$d_0 = \rho(K; BC) = \frac{KA_1}{AA_1} \cdot \rho(A; BC) = \frac{8 \cdot 12}{7}.$$



по т. Пифагора:
 $\rho(O; BC)^2 = d_0^2 + R^2$
 в левом в радиусе
 угол при вершине BC, значит



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3 стр. из 3

OBC - биссекторная точка. для равнобедренного
угла при ребре BC , значит угол между ABC и
и OBC - половина искомого.

$$\cos(\angle(OBC; ABC)) = \frac{OK}{r(K; BC)} = \frac{OK}{r(K; BC)} = \frac{4 \cdot 7}{8 \cdot 12} = \frac{7}{24}$$

$$\cos(\angle(OBC; ABC)) = \frac{OK}{r(K; BC)} = \frac{4 \cdot 7}{8 \cdot 12} = \frac{7}{24}$$

$$\cos(2\angle(OBC; ABC)) = \frac{\left(\frac{7}{24}\right)}{1 - 2\left(\frac{7}{24}\right)^2} = \frac{7}{24} \cdot \frac{1}{1 - \frac{49}{288}} =$$

$$= \frac{7}{24} \cdot \frac{288}{239} = \frac{7 \cdot 12}{239} = \frac{84}{239}$$

Ответ: $\arccos\left(\frac{84}{239}\right)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

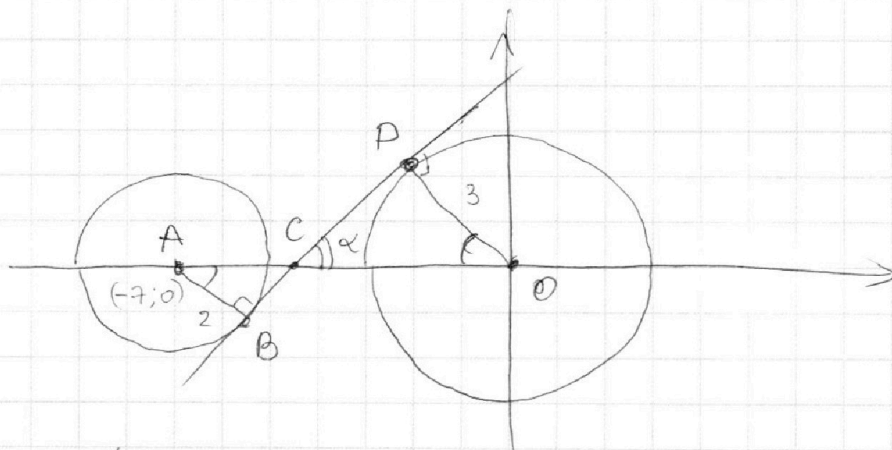
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2 стр. из 3]

Для выполнения условия четырех корней,
прямая должна пересекать окружность из окр.
2 раза, это невозможно, когда "наклон" у
прямой больше чем у касательной к окружности.
касательной к этим окружностям.



$$\triangle ABC \sim \triangle ODC$$

$$\frac{AC}{CO} = \frac{AB}{OD} = \frac{2}{3}$$

$$AO = 7 \quad AC = \frac{2}{2+3} \cdot 7 \quad OC = \frac{3}{2+3} \cdot 7 = \frac{21}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{OD}{CD} = \frac{OD}{\sqrt{OC^2 - OD^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{(\frac{7}{5})^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{24}{25}}} = \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{5\sqrt{24}}{24}$$

для выполнения упр.:

$$|q| < \frac{5\sqrt{24}}{24} \quad \left| -\frac{1}{3a} \right| < \frac{5\sqrt{24}}{24}$$



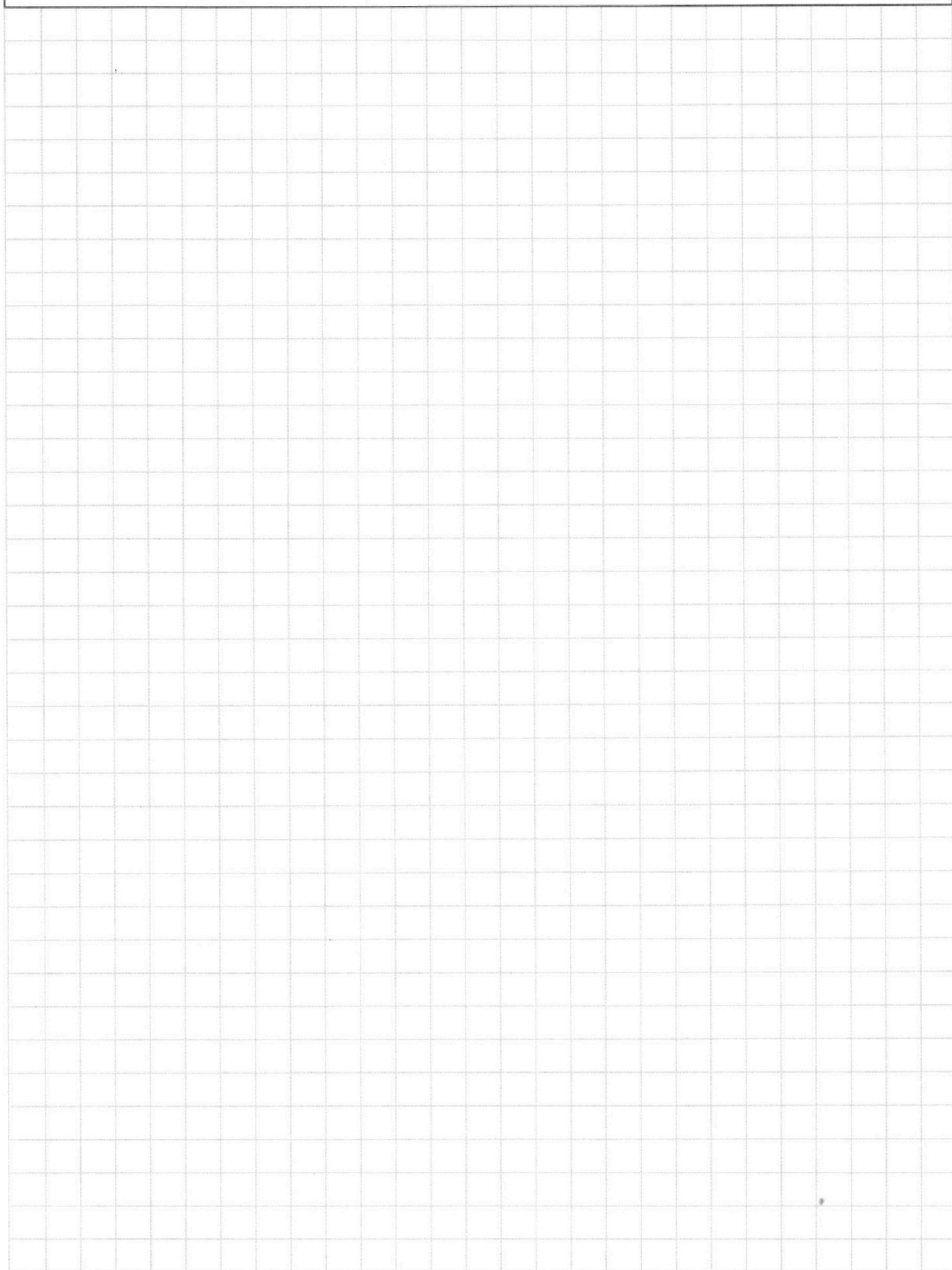
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





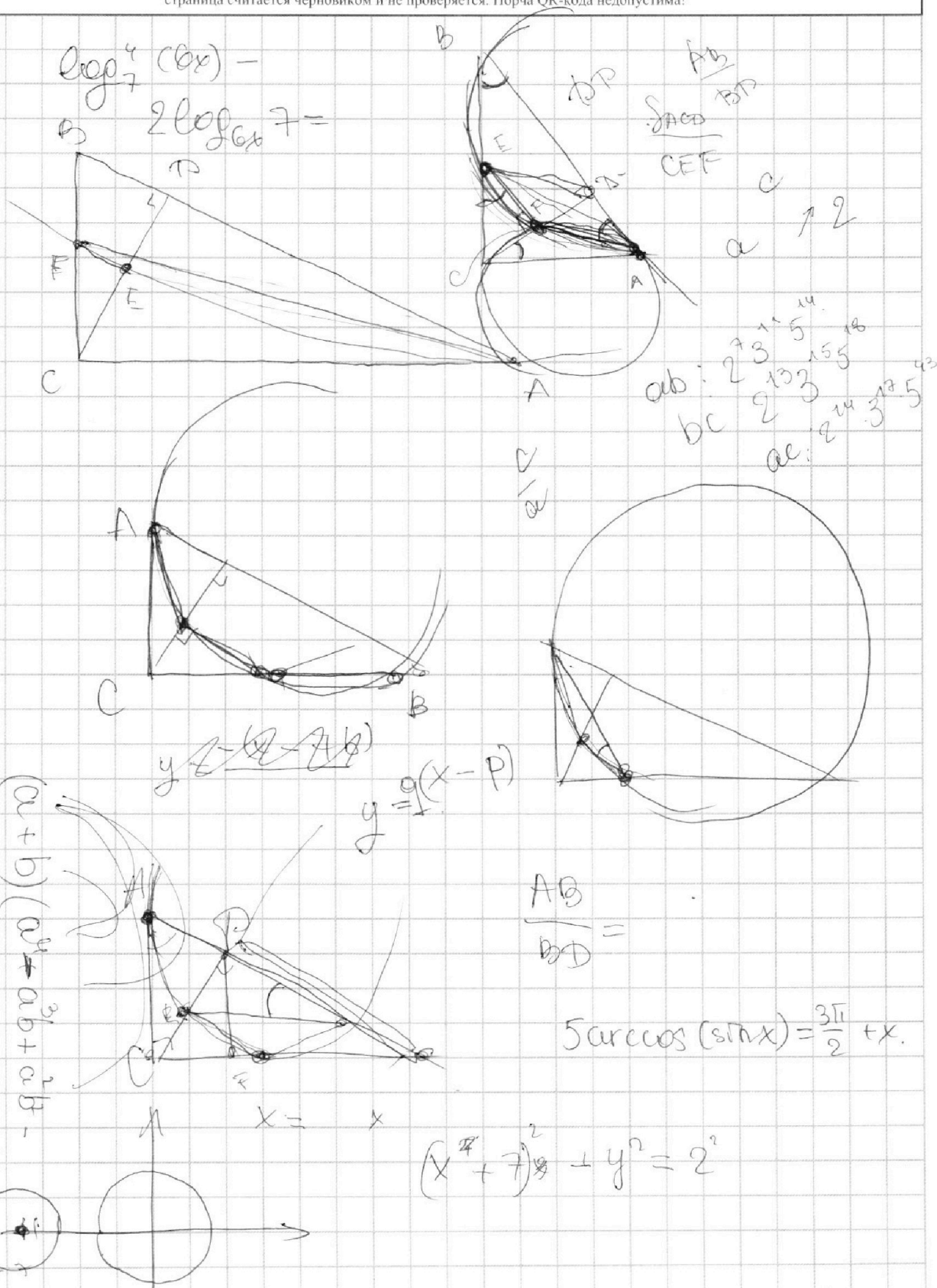
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$6x = 7$$

$$\log_7^4 z - 2 \log_7 z =$$
$$= 3 \log_7 z - 4$$

$$\log_7^4 z - 2 \log_7 z =$$
$$= a_n$$

$$\frac{48}{48} \cdot (50 - 5)^2 =$$
$$= 2500$$

$$4x_2 - 6x_2 + y_2 - y_2$$

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$$
$$x +$$

$$x_2 - x_1 + y_2 - y_1$$

$$343$$

$$\log_7^4 y + 3 \log_7 y =$$

$$= 3 \log_7 y - 4$$

$$\log_7 y$$

$$x \begin{array}{r} 18 \\ + 14 \\ \hline 8 \\ 32 \\ + 43 \\ \hline 75 \\ 21 \end{array}$$

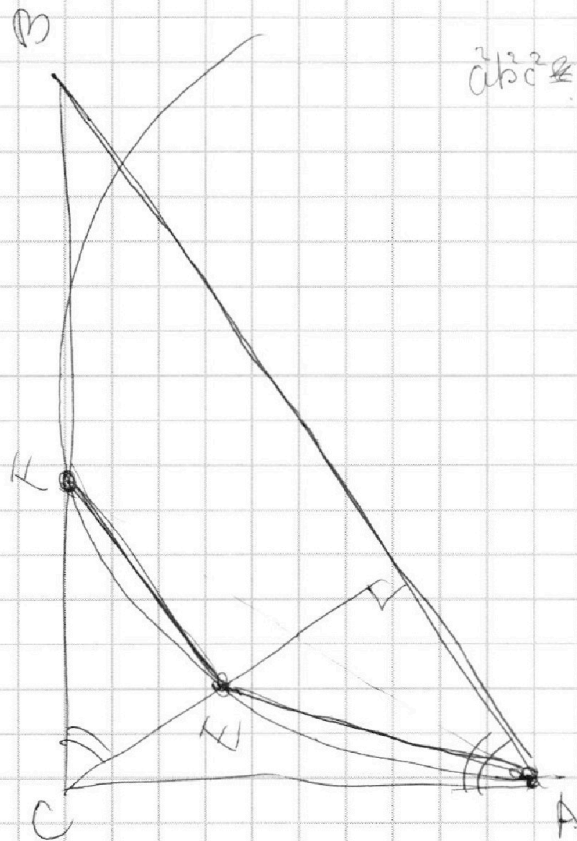
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

