

$$c=$$

$$a+b+c \geq 38$$

$$a+b \geq 14$$

$$b+c \geq 18$$

$$a+c \geq 43$$

$$c=$$

$$c=11 \quad b=4$$

$$a=4$$



$$\begin{array}{r} 14 \\ +18 \\ \hline 32 \\ +43 \\ \hline 75 \\ \hline 1612 \\ 38 \end{array}$$

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



$$\begin{array}{l} a+b=7 \\ b+c=13 \\ a+c=14 \end{array} \quad \begin{array}{l} 20 \\ 3 \end{array} \quad 2^{17}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ +14 \\ \hline 34 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ +15 \\ +13 \\ \hline 39 \end{array}$$

$$a+b+c \geq 22$$

$$\begin{array}{l} a+b \geq 11 \\ b+c \geq 15 \\ a+c \geq 14 \end{array}$$

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

$$c=10$$

$$a=4$$

$$b=3$$

$$+13$$

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

$$\begin{array}{r} 14 \\ +18 \\ +43 \\ \hline 75 \end{array}$$

$$75 \frac{12}{38}$$

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

$$\begin{array}{r} 14 \\ +14 \\ \hline 28 \\ \hline 15 \\ \hline 43 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ \times 4 \\ \hline 56 \end{array}$$

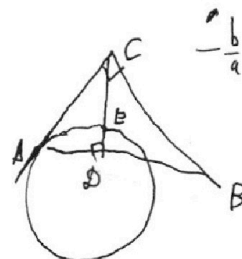
5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

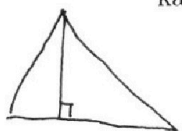
$$-\frac{b}{a} \leq \frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{9} 11}$$



7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.



$$\begin{array}{r} 5814 \\ -4 \\ \hline 117 \end{array}$$

$$3 \cdot 0,13 =$$

$$0,3 \cdot 13$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

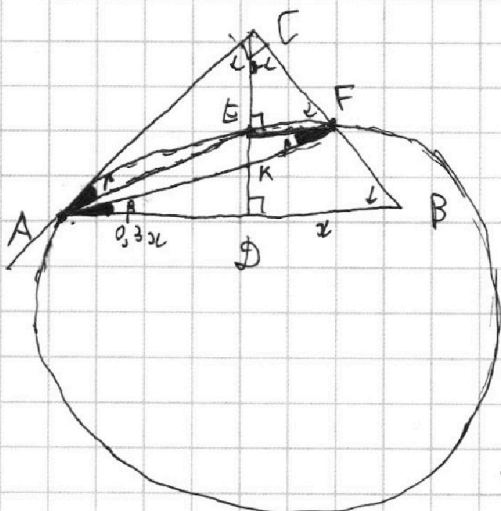
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

мисль і уз і по ній



Wegen $BD=x$, wegen $AB=1, 3x \Rightarrow AD=$

$$1,3x - x = 0,3x$$

$$EF \parallel AB \Rightarrow \angle F + \angle D = 180^\circ \quad (\text{nr } AB \perp CD)$$

Второе AC - касательные, $\angle CAE = \angle EFA$.

Ans. $K = A \cap E \cap D$

← E $\angle EFA = \angle FAB$ (m.m. $EF \parallel AB$ -

напрям. летящие)

Also, $\angle CAE = \beta = \angle FAB = \angle AFE$

Hydrogen, $\angle ACD = 2$

$\angle BCB = 90^\circ - 2^\circ$. Из $\triangle CDB$ $\angle CBD = 90^\circ - (90^\circ - 2^\circ) = 2^\circ$. Так как ACB равнос. $\triangle C$ равнос.:

$$CD^2 = AD \cdot BD = 0,3x^2$$

$$cD = x \sqrt{0,3}$$

It is important to see $\triangle ABC$:

$$AC = \sqrt{0,09u^2 + 0,32u^2} = \sqrt{0,39u^2}$$

$$\therefore AC = x \sqrt{0.39}$$

1/3 m. Jumpera ge x CDB: $CB = \sqrt{0,3x^2 + x^2} = \sqrt{1,3x^2}$

$$CB = \sqrt{0,3x^2 + x^2} = \sqrt{1,3x^2}$$

$$BC = x\sqrt{13}$$

$\triangle ACE \sim \triangle ABF$ (no 2-2 given: $\angle ACE = \angle ABF = \alpha$; $\angle CAE = \angle BAF = \beta$) $\Rightarrow$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BF} \quad ; \quad \frac{CE}{BF} = \frac{x\sqrt{939}}{1,3x}$$

$$\frac{CE}{RF} = \frac{\sqrt{0,33}}{1,3} \quad (-\star)$$

$$\triangle CEF \sim \triangle CDB \text{ (так } EF \parallel BD) \Rightarrow$$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{BC} ; \quad \frac{CE}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13} - BF}{2\sqrt{13}}$$

$$\frac{CE}{\sqrt{g_3}} = \frac{x\sqrt{g_3} - BF}{\sqrt{g_3}}$$

$$CE \cdot \sqrt{1,3} = x \cdot \sqrt{1,3} \cdot \sqrt{0,3} - BF \cdot \sqrt{0,3}$$

$$u_3(\star): BF = \frac{CE - 13}{\sqrt{0.3}}$$

$$CE \cdot \sqrt{13} = x \sqrt{13} \cdot \sqrt{0,3} - \frac{CE \cdot 1,3 \cdot \sqrt{0,3}}{\sqrt{0,35}}$$

$$CE \cdot \sqrt{939} \cdot \sqrt{13} = x \sqrt{13} \cdot \sqrt{13} - CE \cdot \sqrt{13}$$

$$CE \cdot \sqrt{0,39} = x \sqrt{0,3} - CE \cdot \sqrt{1,3} \cdot \sqrt{0,3}$$

$$\therefore CE \cdot \sqrt{13} = x - CE \cdot \sqrt{13}$$

$$CE = \sqrt{0,3} \cdot \sqrt{1,3}$$

$$CE = \frac{x}{2\sqrt{13}}$$

$$2 \cdot CE \cdot \sqrt{13} = x$$

 ΔCFE
$$\triangle ACD \cong \triangle CFE \text{ (m 2.2 given: } \angle ACD = \angle CFE \text{)}$$

$$\angle ADC = \angle CEF = 90^\circ \Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = k^2 =$$

$$\frac{Q_{ACD}}{Q_{EP}} = \left(\frac{0,32 \cdot 2\sqrt{13}}{\alpha} \right)^2 = (0,3 \cdot 2\sqrt{13})^2 =$$

$$\left(\frac{AD}{CE}\right)^2 = 0,09 : 4 - 1,3 = 0,36 - 1,3 = 0,468$$

Arben: 0.468.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Минимум 1 из 1 по ней

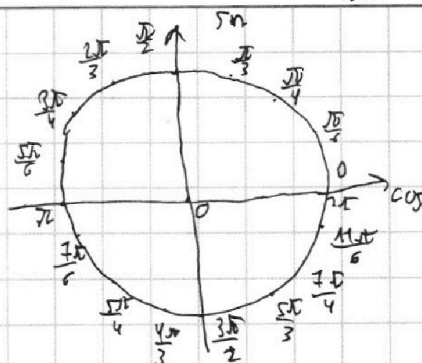


$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{5}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{5}\right) = \sin x$$



$$\sin(3x) = 3 \sin(x) \cos^2(x) - \sin^3(x) \quad \cos(3x) = \cos^3(x) - 3 \sin^2(x) \cos(x)$$

$$\sin(5x) = \sin(3x + 2x) = \sin(3x) \cos(2x) + \cos(3x) \sin(2x) =$$

$$(3 \sin(x) \cos^2(x) - \sin^3(x)) (\cos^2(x) - \sin^2(x)) + (\cos^3(x) - 3 \sin^2(x) \cos(x)) \cdot 2 \sin(x) \cos(x) =$$

$$= 3 \sin(x) \cos^4(x) - \sin^5(x) - \sin^3(x) \cos^2(x) - 3 \sin^3(x) \cos^2(x) + \sin^5(x)$$

$$+ 2 \sin(x) \cos^4(x) - 6 \sin^3(x) \cos^2(x) = 5 \sin(x) \cos^4(x) + \sin^5(x) - 10 \sin^3(x) \cos^2(x) =$$

$$5 \sin(x) (1 - \sin^2(x))^2 + \sin^5(x) - 10 \sin^3(x) (1 - \sin^2(x)) =$$

$$5 \sin(x) (1 + \sin^4(x) - 2 \sin^2(x)) + \sin^5(x) - 10 \sin^3(x) + 10 \sin^5(x) =$$

$$5 \sin(x) + 5 \sin^5(x) - 10 \sin^3(x) + 11 \sin^5(x) - 10 \sin^3(x) =$$

$$16 \sin^5(x) - 20 \sin^3(x) + 5 \sin(x)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

мен 1/3 по ней

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 & (1) \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 & (2) \end{cases}$$

1-е уравнение однозначно задает x через y : $x=7b-3ay \Rightarrow$ чтобы система имела 4 решения, 2-е уравнение должно иметь 4 решения, а это равносильно:

$$\begin{cases} x^2+14x+y^2+45=0 & (I) \\ x^2+y^2-9=0 & (II) \end{cases} \Rightarrow (I) \text{ и } (II) \text{ должны иметь по 2 корня, и все эти 4 корня должны быть различными.}$$

$$(I): x^2+14x+y^2+45=0$$

$$D=196-4y^2-180=16-4y^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-14 \pm 2\sqrt{4-y^2}}{2}$$

$$16-4y^2 > 0$$

$$4-y^2 > 0$$

$$y^2 < 4;$$

$$-2 < y < 2$$

$$x_{1,2} = -7 \pm \sqrt{4-y^2}$$

$$(II): x^2+y^2-9=0$$

$$x^2=9-y^2$$

$$x = \pm \sqrt{9-y^2}$$

$$9-y^2 > 0$$

$$y^2 < 9$$

$$-3 < y < 3$$

Совпадения корней:

$$-7 + \sqrt{4-y^2} \neq \sqrt{9-y^2}$$

$$\sqrt{4-y^2} \neq \sqrt{9-y^2} + 7$$

$$4-y^2 \neq 9-y^2+49+14\sqrt{9-y^2}$$

$$54+14\sqrt{9-y^2} \neq 0 \text{ - верно всегда}$$

$$-7 - \sqrt{4-y^2} \neq \sqrt{9-y^2}$$

$$-7 + \sqrt{4-y^2} + \sqrt{9-y^2} \neq 0 \text{ - верно всегда.}$$

$$-7 + \sqrt{4-y^2} \neq -\sqrt{9-y^2}$$

$$\sqrt{4-y^2} + \sqrt{9-y^2} \neq 7$$

$$4-y^2+9-y^2 \neq 49$$

$$\sqrt{4-y^2} \neq 7 - \sqrt{9-y^2}$$

$$4-y^2 \neq 49+9-y^2-14\sqrt{9-y^2}$$

$$14\sqrt{9-y^2} \neq 62$$

$$\sqrt{9-y^2} \neq \frac{31}{7}$$

$$9-y^2 \neq \frac{961}{49}$$

$$y^2 \neq 9 - \frac{961}{49} < 0 \Rightarrow \text{верно всегда}$$

$$-7 - \sqrt{4-y^2} \neq -\sqrt{9-y^2}$$

$$\sqrt{9-y^2} \neq 7 + \sqrt{4-y^2}$$

$$9-y^2 \neq 49+4-y^2+14\sqrt{4-y^2}$$

$$44+14\sqrt{4-y^2} \neq 0$$

$$44+14\sqrt{4-y^2} \neq 0 \text{ - верно}$$

верно

Значит, если y не принимает ни одного из значений $\pm \frac{31}{7}$, то эти действительные и различные корни.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

лист 2/3 по ней



Иногда, у нас

$$\begin{cases} -2 < y < 2 \\ -3 < y < 3 \end{cases} \Rightarrow$$

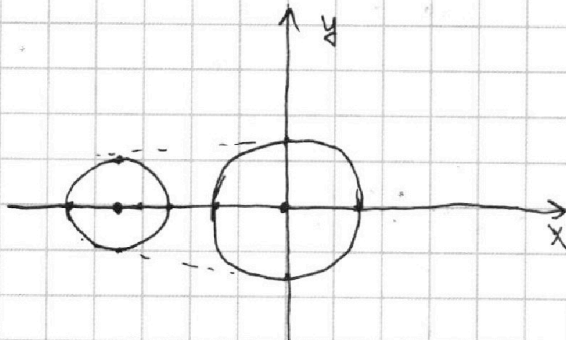
$$-2 < y < 2$$

1-е уравнение переносим в вид:

Перенесем 2-е уравнение в вид:

$$\begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 & - \text{окружность с центром } (-7; 0) \text{ радиус } 2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 & - \text{окружность с центром } (0; 0) \text{ радиус } 3. \end{cases}$$



$$1-е: x + 3ay - 7b = 0$$

$$x + 3ay = 7b$$

$$y = \frac{7b - x}{3a} \quad - \text{прямая при } a \neq 0$$

при $a = 0$: $x = 7b$ - пересекать
окружности в 4 точках при x или при
одном значении $x \neq$ $a = 0$ не подходит

Записываем a . Тогда данные уравнения это прямая с фикс. уровнем коэффициентов.

Она должна иметь 4 точки пересечения с окружностями, т.е. 2 с первой и 2 со второй.

Следует, чтобы прямая с фикс. уровнем коэф. имела 2 точки пересечения с окружностями, ограниченные своими касательными касательными с этими ур. коэф. с данными окружностями.

$$\begin{aligned} x + 3ay - 7b &= 0 \\ -7 + 14y + 3ay - 7b &= 0 \end{aligned}$$

Тогда, прямая ~~указываем~~ касательна

$$y = kx + t \quad \text{касательна окружности } x^2 + y^2 - 9 = 0$$

тогда, ур. системы $\begin{cases} y = kx + t \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$ имеет 1 решение $\Rightarrow$ у квадратной функции

$$x^2 + (kx + t)^2 - 9 = 0 \quad ; \quad D = 0: \quad x^2 + k^2x^2 + 2ktx + t^2 - 9 = 0 ;$$

$$x^2(k^2 + 1) + x \cdot 2kt + t^2 - 9 = 0 ; \quad 4k^2t^2 - 4(t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0$$

$$k^2t^2 + (9 - t^2)(k^2 + 1) = 0. \quad k^2t^2 + 9k^2 - k^2t^2 + 9 - t^2 = 0$$

$$9k^2 + 9 - t^2 = 0. \quad t^2 = 9(k^2 + 1); \quad t = \pm 3\sqrt{k^2 + 1}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Лист 3 из 3 по листу



Итак, правая часть условия кр. $K = -\frac{1}{3a}$ будет касаться 2-й окружности при следующих значениях:

$$\begin{cases} 3\sqrt{\frac{1}{9a^2} + 1} \\ -3\sqrt{\frac{1}{9a^2} + 1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -3\sqrt{\frac{1}{9a^2} + 1} \leq \frac{4b}{3a} \leq 3\sqrt{\frac{1}{9a^2} + 1} \\ -\frac{9}{7}\sqrt{\frac{1}{9a^2} + 1} \leq \frac{b}{a} \leq \frac{9}{7}\sqrt{\frac{1}{9a^2} + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{a} \geq 0 \\ b^2 \leq \left(\frac{1}{9} + a^2\right) \frac{81}{49} \\ \frac{b}{a} \leq 0 \\ b^2 \leq \frac{81}{49} \left(\frac{1}{9} + a^2\right) \end{cases}$$

Для 2-й окружности:

$$\begin{cases} y = kx + t \\ x^2 + 14x + 49 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$(x^2 + 14x + 49) + (k^2x^2 + 2ktx + t^2) - 4 = 0$$

$$x^2(k^2 + 1) + x(2kt + 14) + t^2 + 45 = 0$$

$D = 0$

$$4k^2t^2 + 56kt + 196 - 4(t^2 + 45)(k^2 + 1) = 0$$

$$k^2t^2 + 14kt + 49 - k^2t^2 - 45k^2 - t^2 - 45 = 0$$

$$14kt - 45k^2 - t^2 + 4 = 0$$

$$t^2 - 14kt + 45k^2 - 4 = 0$$

$$D = 196k^2 - 4(45k^2 - 4) =$$

$$4(49k^2 - 45k^2 + 4) = 4(4k^2 + 4) =$$

$$16(k^2 + 1)$$

$$t_{1,2} = \frac{14 \pm 4\sqrt{k^2 + 1}}{2} \quad t_{1,2} = 7 \pm 2\sqrt{k^2 + 1}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

мин 100 200 пп

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_{7^4}(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_{7^4}(y) + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\log_{6x}(6x)^4}{\log_{6x}(7)^4} - 2 \log_{6x} 7 = \frac{\log_{6x}(343)}{2} - 4 \\ \frac{\log_y^4(y)}{\log_y^4(7)} + 6 \log_y(7) = \frac{\log_y(7^5)}{2} - 4 \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 6x > 0 \\ 6x \neq 1 \\ 36x^2 > 0 \\ 36x^2 \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq 1 \\ y^2 > 0 \\ y^2 \neq 1 \end{cases} \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \\ x \neq 0 \\ x \neq \pm \frac{1}{6} \\ y > 0 \\ y \neq 1 \\ y \neq 0 \\ y \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\log_{6x}^4(7)} - 2 \log_{6x} 7 = \frac{3 \log_{6x}(7)}{2} - 4 \quad (1) \\ \frac{1}{\log_y^4(7)} + 6 \log_y(7) = \frac{5}{2} \log_y(7) - 4 \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (0; \frac{1}{6}) \cup (\frac{1}{6}; +\infty) \\ y \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \end{cases}$$

(1) Замена: $\log_{6x} 7 = t$: $\frac{1}{t^4} - 2t = \frac{3t}{2} - 4$; $\frac{2}{t^4} - 4t = 3t - 8$

$$\frac{2}{t^4} = 5t - 8 ; \quad \frac{7t^5 - 8t^4 - 2}{t^4} = 0 \quad (t \neq 0 \text{ берем})$$

(2) Замена: $\log_y(7) = k$: $\frac{1}{k^4} + 6k = \frac{5}{2}k - 4$ ($k \neq 0$ берем)

$$\frac{2}{k^4} + 12k = 5k - 8 ; \quad \frac{2}{k^4} + 7k + 8 = 0 ; \quad \frac{7k^5 + 8k^4 + 2}{k^4} = 0$$

$$7k^5 + 8k^4 + 2 = 0 \quad (II) \quad \text{Сумма (I) и (II):}$$

$(6x)^t = 7 \quad 6x = \sqrt[t]{7} ; x = \frac{\sqrt[t]{7}}{6} ; y^k = 7 ; y = \sqrt[k]{7}$

$$xy = \frac{7^{\frac{1}{t} + \frac{1}{k}}}{6} = \frac{7^{\frac{k+t}{kt}}}{6}$$

Сумма (I) и (II): $7t^5 + 7k^5 - 8t^4 + 8k^4 = 0$
 $7(k+t)(t^4 - kt^3 + k^2t^2 - kt + k^4) + 8(k^2 + t^2)(k+t)(k-t) = 0$
 и (II) переносим в левую:

Пусть $\frac{1}{t} = a$; $\frac{1}{k} = b$. Тогда найдем a и b . (I)

$$\frac{7}{a^5} - \frac{8}{a^4} - 2 = 0 ; \quad 7 - 8a - 2a^5 = 0 ; \quad 2a^5 + 8a - 7 = 0$$

$$\frac{7}{b^5} + \frac{8}{b^4} + 2 = 0 ; \quad 7 + 8b + 2b^5 = 0 ; \quad 2b^5 + 8b + 7 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

 МФТИ

Мини-эссе

Сумма попарных з уривается:

$$2a^5 + 2b^5 + 8a + 8b = 0$$

$$2(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 8(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 4) = 0$$

$$\begin{cases} a+b=0 & (I) \\ a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 4 = 0 & \neq 0 \end{cases}$$

При $a+b=0$

$$xy = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{0}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{0}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Мит 2 из 3 по мит

Итак, пусть станция, что $t \geq 0$ (мин) при жмите А и В и В и А

Пусть $t \geq 0$: $\Delta y = x$; $\Delta x = 10$. $x_2 = x_1 + 10 - t$

$y_2 = y_1 + 4t$

$0 \leq y_1 \leq 68$

$68x_1 + 17y_1 \geq 0$

$-34x_1 + 544 - 17y_1 \geq 0$

$0 \leq y_1 + 4t \leq 68$

$68x_1 + 680 - 68t + 17y_1 + 68t$

$kx + b = 0$ (2; 68)

(19; 0)

$2k + b = 68$

$19k + b = 0$

$68 - 2k = -19k$

$68 = -17k$; $k = -4$

$-8 + b = 68$

$b = 76$

$y = -4x + 76$

$x_2 = x_1 + 10 - t$

$y_2 = y_1 + 4t$

$kx + b = 0$

(-17; 68)

(0; 0)

$-17k + b = 68$

$b = 0$

$b = 0$

$k = -\frac{68}{17} = -4$

$-4x + 76 = 0$

$y = -4x$

Итак, попадания точки $(x; y)$ вогнутой паре. равносильно

системе:

$0 \leq y \leq 68$

$-4x - y \leq 0$

$-4x + 76 - y \geq 0$

$0 \leq y \leq 68$

$4x + y \geq 0$

$4x + y \leq 76$

$0 \leq y_1 \leq 68$

$4x_1 + y_1 \geq 0$

$4x_1 + y_1 \leq 76$

$0 \leq y_1 + 4t \leq 68$

$4x_1 + 40 - 4t + y_1 + 4t \geq 0$

$4x_1 + 40 - 4t + y_1 + 4t \leq 76$

$0 \leq y_1 \leq 68$

$4x_1 + y_1 \geq 0$

$4x_1 + y_1 \leq 76$

$0 \leq y_1 + 4t \leq 68$

$4x_1 + y_1 \geq -40$

$4x_1 + y_1 \leq 36$

$0 \leq 4x_1 + y_1 \leq 36$

$0 \leq y_1 \leq 68$

$0 \leq y_1 + 4t \leq 68$

$0 \leq y_1 \leq 68$

$-\frac{y_1}{4} \leq x_1 \leq 9 - \frac{y_1}{4}$

$-\frac{y_1}{4} \leq t \leq 17 - \frac{y_1}{4}$

Каждая точка $(x_1; y_1; t)$ соответствует решению.

сум из пар точек.

Рассмотрим все случаи отсчетов

① $y_1 = 0 \Rightarrow -k \leq x_1 \leq 9 - k$ - 10 значений

$y_1 = 4k$ $-k \leq t \leq 17 - k$ - 18 значений

Всего точек $18 \cdot 10 = 180$ значений



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

или 3 из 3 по ней

② $y_1 \equiv 1 \pmod{4}$ $y_1 \equiv r \pmod{4}$: $r \neq 0$ $r \neq 0$
 $y_1 = 4k + r$ $k \equiv r \pmod{4}$
 $-\frac{4k-r}{4} \leq x_1 \leq 9 - \frac{4k-r}{4}$
 $-k - \frac{r}{4} \leq x_1 \leq 9 - k - \frac{r}{4}$: x_1 целое $\Rightarrow$
 $-k \leq x_1 \leq 9 - k - 1$
 $-k \leq x_1 \leq 8 - k$ - (9 значений)

• Аналогично же t 17 значений $\Rightarrow$ всего $17 \cdot 9 = 153$ значения

Среди значений y_1 (от 0 до 68) - всего их 69

из них 18 кратны 4 и

$69 - 18 = 51$ - не кратны.

Итого всего

итого $18 \cdot 180 + 51 \cdot 153 = 3240 + 7803 = 11043$.

Ответ: 11 043.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

лист 1 из 3 по пп

$$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40 \quad ; \quad x_2 - x_1 = k$$

$$y_2 - y_1 = l$$

$$4k + l = 40 \quad ; \quad l = 4; \quad l = 4t$$

$$4k + 4t = 40$$

$$k + t = 10$$

$$l = 4t$$

$$k = 10 - t$$

К — ~~координата~~ ~~значение~~

$$|k| \leq 19 + 17 = 36 \Rightarrow$$

$$|l| \leq 68 - 0 = 68.$$

$$\begin{cases} -36 \leq 4t \leq 36 \\ -68 \leq 10 - t \leq 68 \end{cases}$$

t целое!

$$\begin{cases} -9 \leq t \leq 9 \\ -58 \leq t \leq 78 \end{cases}$$

$$-9 \leq t \leq 9$$

Тогда ~~значение~~, ~~то~~ точки $(x; y)$ ~~лежит~~ ~~внутри~~ паралл.

Во-первых это ~~значение~~, ~~то~~ ~~то~~ $0 \leq y \leq 68$.

Теперь посчитаем уравнения стороны паралл, не параллельны оси X:

$$kx + b = 0 \quad (2; 68)$$

$$(18; 0)$$

$$\begin{cases} 2k + b = 68 \\ 18k + b = 0 \end{cases}$$

$$68 - 2k = -18k$$

$$68 = -16k$$

$$34 = -8k$$

$$k = -\frac{34}{8}$$

$$b = 68 - 2k = 68 - 2 \cdot (-\frac{34}{8}) = 68 + \frac{68}{4} = 68 + 17 = 85$$

$$b = 68(1 + \frac{1}{4}) = \frac{68 \cdot 5}{4} = \frac{544}{4}$$

$$-\frac{34}{8}x + \frac{544}{4} = y$$

$$-\frac{34}{8}x + \frac{544}{4} \geq 0$$

$$-34x + 544 \geq 0$$

$$-34x + 544 - 7y \geq 0$$

паралл. ~~равноценности~~ ~~системы~~:

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 68 \\ 68x + 17y \geq 0 \\ -34x + 544 - 7y \geq 0 \end{cases}$$

$$kx + b = 0 \quad (-17; 68)$$

$$(6; 0)$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ -17k = 68 \end{cases} \quad ; \quad k = -\frac{68}{17}$$

$$-\frac{68}{17}x = y$$

$$-\frac{68}{17}x - y \leq 0$$

$$-68x$$

$$68x + 17y \geq 0$$

$$4x + y \geq 0$$

Тогда, ~~значение~~ ~~то~~ ~~то~~ $(x; y)$ ~~внутри~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper, including calculations, graphs, and equations.

Top Left: Vertical multiplication: $153 \times 51 = 7803$. Another calculation: $68 \div 4 = 17$.

Top Center: Equations (1) and (2):
 $x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0$ (1)
 $x^2 + y^2 - 9 = 0$ (2)

Top Right: Calculations: $x_{1,2} = -7 \pm \sqrt{4-y^2}$, $x_{1,2} = \frac{-14 \pm 2\sqrt{4-y^2}}{2}$, $x_{1,2} = \pm \sqrt{9-y^2}$, $K=3$, 35 , 203 .

Middle Left: Logarithmic calculations: $\log_{62} 5 - 35$, $\log_{62} 17$, $\log_{62} 9$, $\log_{62} 180$, $\log_{62} 144$, $\log_{62} 18$.

Middle Center: Graph of a parabola $(x+7)^2 + y^2 - 4 = 0$ and a line $x = 7b - 3ay$. A point $(-10, 68)$ is marked.

Middle Right: Calculations: $\frac{1}{2} \log$, $x = \sqrt{\frac{7}{5}}$, $y = \frac{K}{\sqrt{7}}$, $\frac{7 \cdot 2^5}{4^5} - \frac{8 \cdot 2^4}{4^4} = y$, $\frac{32}{74} - \frac{128}{74}$, $\sqrt{9-y^2} + 3ay = 7b$, $62^b = 7$, $y^K = 7$, $x + 3ay = 7b$.

Bottom Left: Graph of a triangle with vertices $(-10, 68)$, $(2, 68)$, and $(13, 0)$. The origin is marked O_1, O_2 . Calculations: $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$, $4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$, $xy = \sqrt{\frac{7}{5}} \cdot \sqrt{7}$, $\frac{1}{4} - \frac{8}{74} - 2 = \frac{2}{74} - \frac{8}{74} - 2 = -\frac{1}{7}$, $-4 \cdot 32 + 8 \cdot 16 + 2$.

Bottom Right: Logarithmic calculations: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $4 \cdot 32 - 8 \cdot 16 = 2$, $\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{12}$, $\frac{1}{4} \leq 9 - \frac{y_1}{4}$.



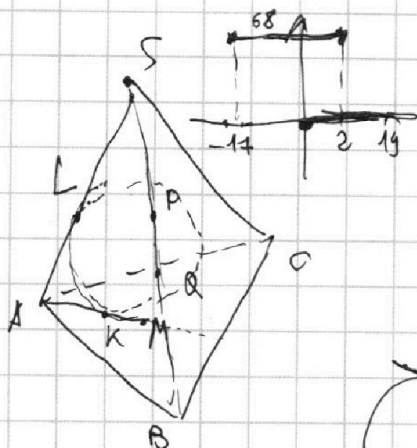
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{3\pi}{2} \cdot 5$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$\sin(3x) = \sin(2x+x) =$$

$$\sin(2x) \cdot \cos(x) + \cos(2x) \cdot \sin(x) =$$

$$2\sin(x)\cos^2(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x) =$$

$$\sin^3(x) =$$

$$\cos^2(x)$$

$$3\sin(x) \cdot \cos^2(x) - \sin^3(x)$$

$$\cos(3x) = \cos(2x+x) =$$

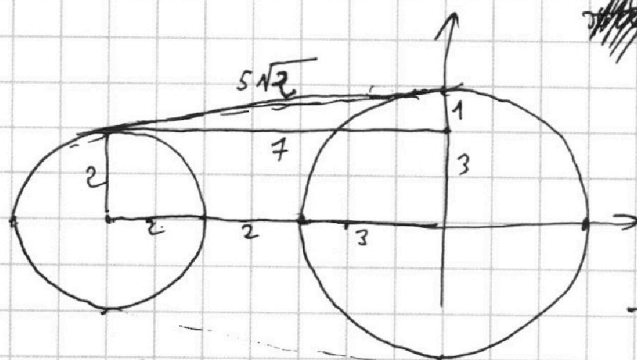
$$\cos(2x) \cdot \cos(x) - \sin(2x) \cdot \sin(x) =$$

$$\cos^3(x) - \sin^2(x) \cdot \cos(x) - 2\sin(x) \cos(x) =$$

$$10x^5 - 20x^3 + 5x = y$$

$$Kx+b =$$

$$50 \quad 5\sqrt{2}$$



$$4(a-b) + c = 40$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

