



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$N=1$

$$ab : 2^6 3^{13} 5^{11}$$

$$bc : 2^{14} 3^{21} 5^{13}$$

$$ac : 2^{16} 3^{25} 5^{28}$$

$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = abc : 2^{36} 3^{59} 5^{52}$$

$$\text{Пусть } ab = 2^6 3^{13} 5^{11} k$$

$$bc = 2^{14} 3^{21} 5^{13} l$$

$$ac = 2^{16} 3^{25} 5^{28} m$$

$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = 2^{36} 3^{59} 5^{52} \cdot klm$$

$$abc = 2^{18} 3^{29} 5^{26} \sqrt{klm}$$

мысли
 $\sqrt{abc} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sqrt{klm} \cdot 3 \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$

Очевидно, что $klm : 3 \Rightarrow$ одно из k, l или m делится

на 3 и klm минимально при 2 значениях равных 1 и

одно 3 $\Rightarrow \sqrt{klm} = 3 \Rightarrow abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$ (минимально)

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

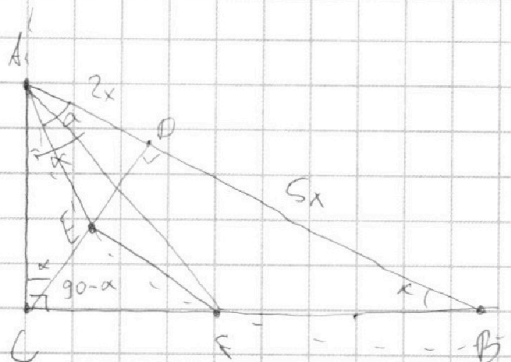
1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2



$$\textcircled{1} \frac{AB}{BD} = 1,4 = \frac{7}{5}$$

Пусть $BD = 5x \Rightarrow AB = 7x$
 $\Rightarrow AD = 2x$

Пусть $\angle EAB = x$

т.к. $EABF$ — вписанная трапеция, то она равнобедренная. $\Rightarrow \angle EAB = \angle ABF = x$
 т.к. AC — касательная к окружности,

то $\angle CAF = \angle ABF = x$ (углы между касательной и секущей)

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \left(\frac{AD}{AB} \cdot S_{ABC} \right) : \left(\frac{CE}{CD} \cdot \frac{CF}{CB} \cdot \frac{DB}{AB} \cdot S_{ABC} \right) = \frac{AD \cdot CD \cdot BC \cdot AB}{AB \cdot EC \cdot CF \cdot DB} \cdot \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} =$$

$$= \frac{AD}{DB} \cdot \left(\frac{BC}{CF} \right)^2 \quad \text{т.к. } EF \parallel AB, \text{ то } \frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{AC \cdot \lg \alpha}{CB} = \frac{CD \cdot \lg \alpha}{BD} \quad \text{т.к. } \frac{AC}{CD} = \frac{CB}{BD} = \cos \alpha \quad \begin{matrix} \angle \text{в } \triangle ABC \\ \Rightarrow \angle ACD = 90^\circ - \angle ACD = \\ = 90^\circ - \alpha, \text{ т.к. } \\ \angle DCB = 90^\circ - \angle DBC = 90^\circ - \alpha \end{matrix}$$

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD} \quad \text{в углу } \alpha \text{ в } \triangle ACD \text{ и } \triangle CBD \text{ по}$$

теореме (свойство высоты прямого угла)

$$\Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow CD = \sqrt{2x \cdot 5x} = x\sqrt{10} \Rightarrow \lg \alpha = \frac{AD}{CD} = \frac{2x}{x\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{AD}{BD} \cdot \left(\frac{BC}{CF} \right)^2 = \frac{AD}{BD} \cdot \left(\frac{BD}{CD \cdot \lg \alpha} \right)^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2x}{5x} \cdot \left(\frac{5x}{\sqrt{10}x \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}} \right)^2 =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^2 = \frac{5}{2} = 2,5$$

Ответ: $\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{5}{2} = 2,5$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N° 3

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$\cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{4\pi}{10}\right)$$

$$\sin x - \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) = 0$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$2 \sin \left(\frac{x - \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5}}{2} \right) \cos \left(\frac{x + \frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}}{2} \right) = 0$$

$$\textcircled{1} \sin\left(\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5}\right) = 0$$

$$\textcircled{2} \cos\left(\frac{3x}{5} - \frac{\pi}{5}\right) = 0$$

$$\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3x}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi n - \pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ \frac{5\pi n - \pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}, \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{Ответ: } \frac{5\pi n - \pi}{2}, n \in \mathbb{Z}, \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\Rightarrow$ при $\lg x \in \left[-\frac{\sqrt{32}}{7}; \frac{\sqrt{32}}{7}\right]$ решений нет (очевидно)
В остальных случаях, используя лемму 3 можно
получить 4 решения.

3) $y = \frac{b}{6a} - \frac{5}{6a}x \quad (a \neq 0)$

$\Rightarrow -\frac{5}{6a} \notin \left[-\frac{\sqrt{32}}{7}; \frac{\sqrt{32}}{7}\right] \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{7} \\ -\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < \frac{35}{6\sqrt{32}} \end{cases}$

$a \in \left(-\frac{35}{6\sqrt{32}}; \frac{35}{6\sqrt{32}}\right)$

$\Rightarrow$ и.к. 0 подходит

$\begin{cases} a < 0 \\ a > \frac{35}{6\sqrt{32}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < -\frac{35}{6\sqrt{32}} \end{cases}$

Ответ: при $a \in \left(-\frac{35}{6\sqrt{32}}; \frac{35}{6\sqrt{32}}\right)$

стр 2 из 2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

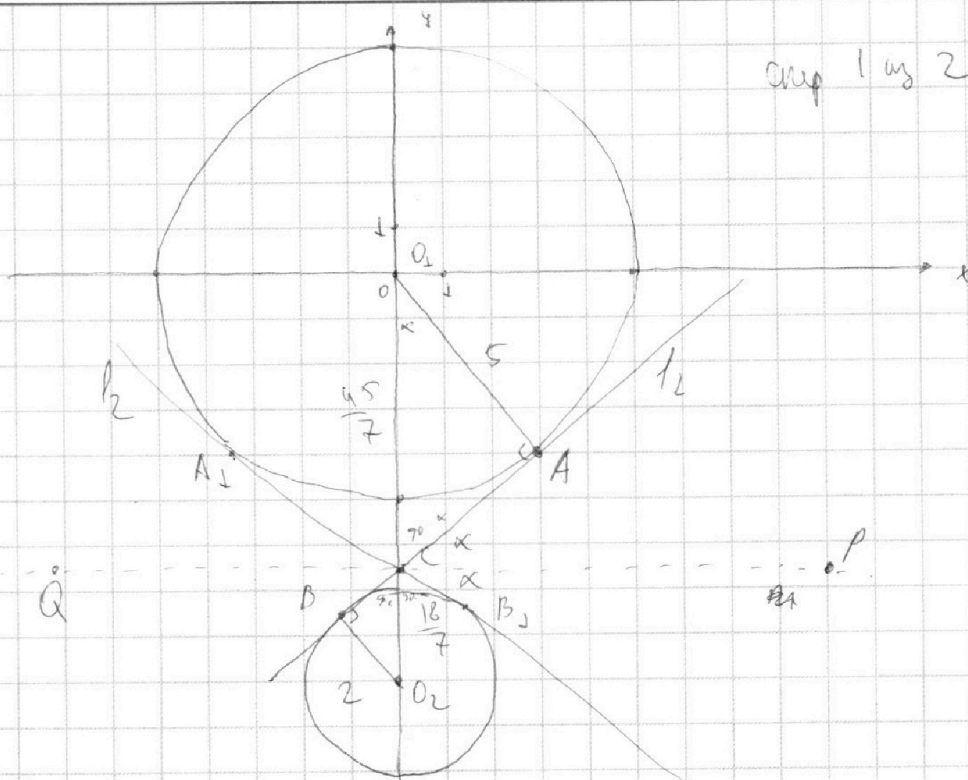
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N=4

см. 1 и 2



$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6ay = b - 5x \quad (3) \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 \quad (1) \\ x^2 + (y+9)^2 - 4 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Графики функций (1) и (2) представляют собой окружности с центрами в $O_1(0;0)$ и радиусом 5 и окружности с центром в $O_2(0;-9)$ радиуса 2. График (3) — прямая.

Прямые l_1 и l_2 — общие внутренние касательные к 2 окружностям (см. рисунок). Пусть точки касания: A и B и $C = (O_1O_2) \cap (AB)$

$\Rightarrow O_1A \perp AB$ и $O_2B \perp AB$ т.к. O_1 и O_2 — центры окр-тей $\Rightarrow \angle O_1AC$ равен $\angle O_2BC$ по 3 углам.

$$\Rightarrow \frac{O_1C}{CO_2} = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{5}{2} \Rightarrow \text{и } O_1O_2 = 9 \Rightarrow \begin{aligned} O_1C &= \frac{45}{7} \\ O_2C &= \frac{16}{7} \end{aligned}$$

(1) $a=0$ и $b=0 \Rightarrow 5x=0 \Rightarrow a=0$ порокорит, в остальных случаях x считаем, что $a \neq 0$. Пусть $\angle CAO_1 = \alpha$. Пусть $PQ \parallel O_1O_2$. Пусть $PQ \parallel O_1O_2$ и $C \in PQ$. $\angle ACP = 90^\circ - \angle O_1CA = \alpha \Rightarrow \angle BCP = \alpha$ в силу симметрии (очевидно из углов).

$$\begin{aligned} l_1 &= \tan \alpha x - O_1C \\ \Rightarrow l_2 &= -\tan \alpha x - O_2C \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{По теореме Пифагора } b = CAO_1: AC^2 &= (O_1C)^2 - O_1A^2 \\ \Rightarrow AC &= \frac{5\sqrt{32}}{7} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{AC}{O_1A} = \frac{\sqrt{32}}{7} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$n=5$$

$$\log_{11}^4 x + 6(\log_x 11) = \log_x \frac{1}{121} - 5 \Rightarrow \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{(0,5y)} 11 = \log_{0,125y3} (11^{-5})$$

пусть $a = \log_{11}^4 x$ $b = \log_{11}^4 0,5y$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0 \\ b^4 + \frac{16}{3b} + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b^2 + a^2)(b-a)(a+b) + \frac{16(b-a)}{3ab} = 0 \\ a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (b^2 + a^2)(\frac{b-a}{a}) + \frac{16}{3ab} = 0 \\ a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\log_x 11 = \log_{0,5y} 11$$

$$x = 0,5y$$

$$xy = 2$$

$$f(a) = a^4 - \frac{16}{3a} + 5$$

если $a \uparrow$, то $a^4 \uparrow$ $-\frac{16}{3a} \rightarrow -\frac{16}{3a}$

$$f'(a) = 4a^3 - \frac{16}{3a^2} = 0 \Rightarrow f(a) \uparrow \text{ на } (0, +\infty) \text{ на } (-\infty, 0)$$

$$12a^5 = -16 \text{ имеет не более 1 решения}$$

$\Rightarrow$ по теореме Коши в промежутке таком узком $f(a)$ имеет не более 2 решений

при $a \rightarrow 0 \Rightarrow f(a) \rightarrow \infty$

при $a < 0 \Rightarrow f(a) \rightarrow \infty$

при $a \rightarrow -\infty \Rightarrow f(a) \rightarrow \infty$

$\Rightarrow$ система имеет не более 2 решений

Заметим, что если x, y - решение, то $(\frac{1}{0,5y}, \frac{1}{x})$ -

- тоже решение

$$\Rightarrow \frac{1}{0,5y} \cdot \frac{1}{x} = 2$$

при $a \rightarrow \infty \Rightarrow f(a) \rightarrow \infty$

$\Rightarrow$ на $(-\infty, 0)$ нет решений

с $0,5y = x$

$\Rightarrow$ решений только два $x, 0,5y$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

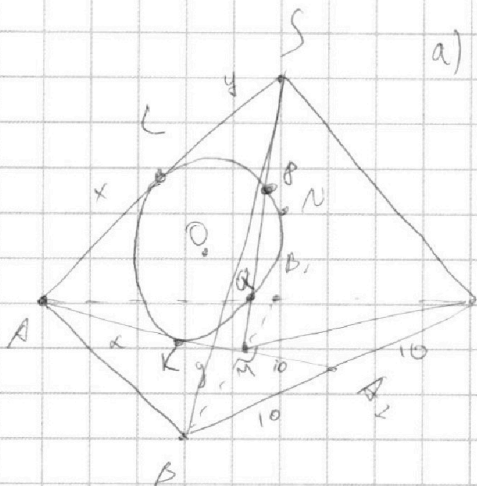
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N°7



а) Пусть $AL = x$, $SL = y$, $SP = MQ = z$
Тогда площадь точки S = (один-о сфера)
 $= z(SM - z) = y^2$
А точка M = $z(SM - z) = MK^2 \Rightarrow MK = y$

M - центр $\triangle ABC$. По свойству
медианы $\frac{AM}{MA_1} = \frac{2}{1} \Rightarrow MA_1 = \frac{AM}{2}$

$$AM = x + y = AS = 20$$

$$\Rightarrow MA_1 = 10 = A_1C = BA_1 = \frac{1}{2} BC$$

$\Rightarrow \triangle BMC$ - прямоугольный (медиана равна половине стороны)

$$S_{BMC} = \frac{MA_1}{AA_1} \cdot S_{ABC} = \frac{MC \cdot BC}{2}$$

$$\Rightarrow AA_1 \cdot MC \cdot BC = 2 \cdot MA_1 \cdot S_{BMC}$$

$$AA_1 \cdot \frac{2}{3} BB_1 \cdot \frac{2}{3} CC_1 = 2MA_1 \cdot S_{BMC}$$

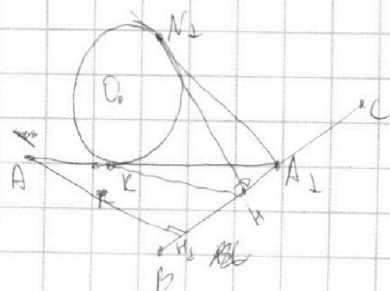
$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot MA_1 \cdot S_{BMC}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 180}{2} = 8100$$

Ответ: произведение длин медиан = 8100

б) $SN = 6 \Rightarrow SL = 6 = y$ (касательные из одной точки)
 $\Rightarrow x = 14$

Пусть A_1K и A_1N - касательные, причем $N \in KA_1O$, где O - центр $\triangle ABC$

Рассмотрим $\triangle ONA_1$



$A_1M = A_1K$. Пусть $N_1M \perp A_1BC \Rightarrow KN \perp BC$ в
силу симметрии

$$\frac{KM}{AN_1} = \frac{KA_1}{AA_1} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} \Rightarrow KM = \frac{8}{15} \cdot AN_1 = \frac{8}{15} \cdot \frac{S_{ABC}}{2BC} =$$

$$= \frac{8}{15} \cdot \frac{18}{2} = \frac{48}{5}$$

стр 1 из 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$n=5$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \frac{1}{121} - 5 \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{11} 0,5y = \log_{11}^4 \left(\frac{1}{121} \right) - 5$$

$$\log_{11} 0,5y = (11^{-12}) - 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_{11}^4 x - \frac{16}{3} \log_{11} x + 5 = 0 \\ \log_{11}^4 0,5y + \frac{16}{3} \log_{11} 0,5y + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq 2 \end{cases}$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{16}{3} \log_{11} x + 5 = 0$$

$$(\log_{11}^4 0,5y - \log_{11}^4 x) + \frac{16}{3} (\log_{11} 0,5y - \log_{11} x) + 7 = 0$$

$$+ \frac{16}{3} (\log_{11} x - \log_{11} 0,5y) = 0 \quad (\text{вычитаем})$$

$$\textcircled{1} \log_{11} 0,5y + \log_{11} x = 0 \quad \textcircled{2} \log_{11} 0,5y + \log_{11} x = 0 \quad (\text{вычитаем})$$

Заметим, что если (x, y) - решение, то $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ тоже решение.

$$\log_{11}^4 x = \log_{11}^4 \frac{1}{x} \quad \log_{11}^4 0,5y = \log_{11}^4 \frac{1}{0,5y}$$

$$\text{Пусть } a = \log_{11} x \Rightarrow f(a) = a^4 - \frac{16}{3} a + 5 = 0$$

$$f'(a) = 4a^3 - \frac{16}{3} \Rightarrow f'(a) \text{ не может иметь больше}$$

2 решений (по теореме Коши о промежуточном значении $\xi \in [a, b]$ если $f(a) = 0$ и $f(b) = 0$, то $\exists \xi$ существует $f'(\xi) = 0$)

$$\log_{11} 0,5y = -\log_{11} x \Rightarrow \log_{11} \frac{1}{x} = \log_{11} 0,5y$$

$\Rightarrow$ если (x, y) - решение, то $(\frac{1}{y}, \frac{1}{x})$ - тоже решение

$$\textcircled{1} \Rightarrow \log_{11}^4 0,5y + \log_{11} 0,5y + \log_{11}^4 x + \log_{11} x + \frac{16}{3} = 0$$

$\Rightarrow$ 2 значения $\log_{11} x$ и $\log_{11} 0,5y$

$$\Rightarrow \log_{11} 0,5y = \frac{1}{x} \Rightarrow xy = 2 \quad (\text{и} \quad x \neq 0)$$

$$\frac{1}{0,5y} = \frac{1}{0,5y} \Rightarrow \text{Обмен } x \text{ и } y \Rightarrow 2$$

$$\begin{aligned} \log_{11} x &= -\log_{11} 0,5y = \\ &= \log_{11} \frac{1}{0,5y} \\ \log_{11} 0,5y &= -\log_{11} x = \\ &= \log_{11} \frac{1}{x} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

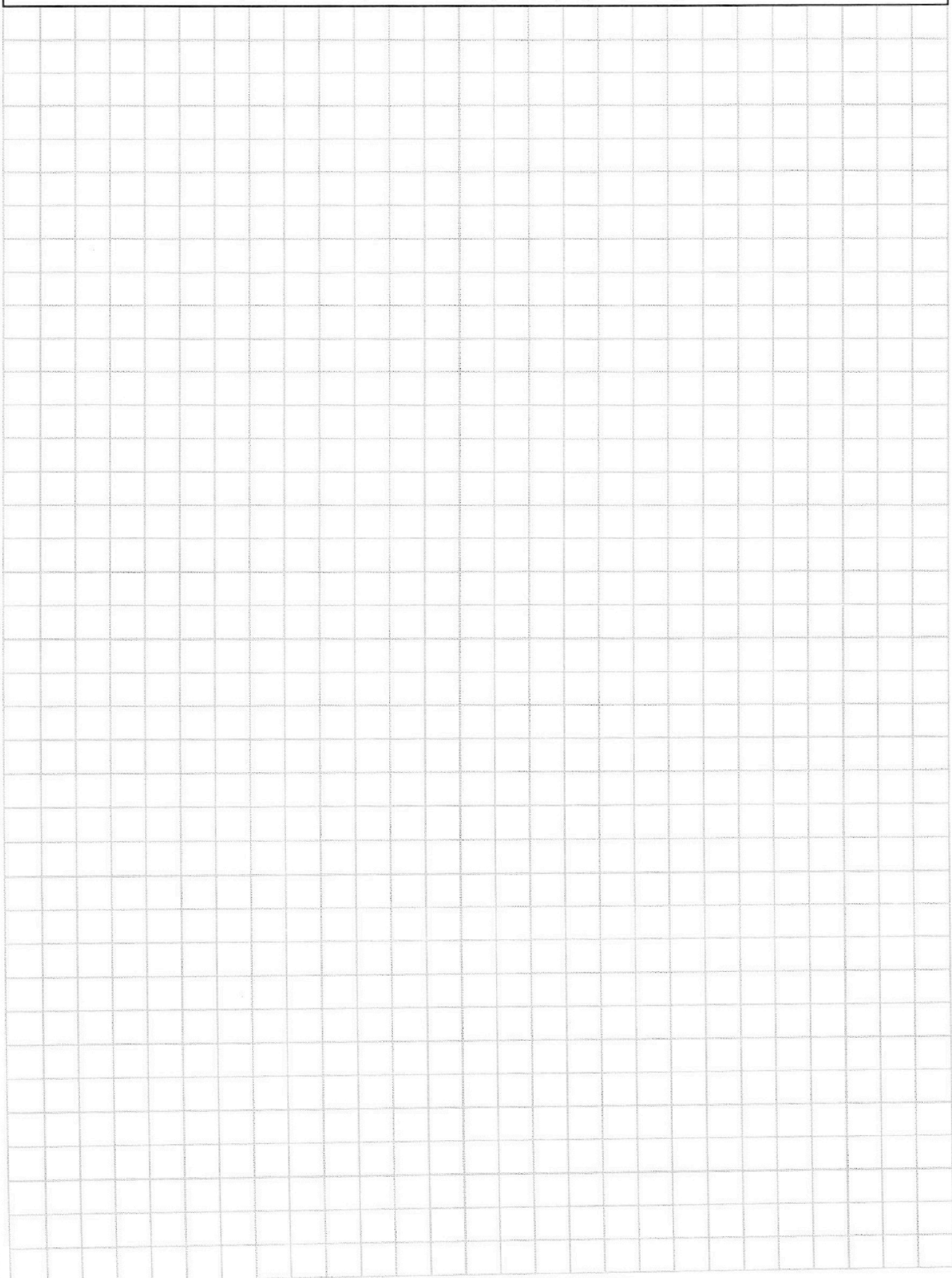
5
☐

6
☐

7
☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



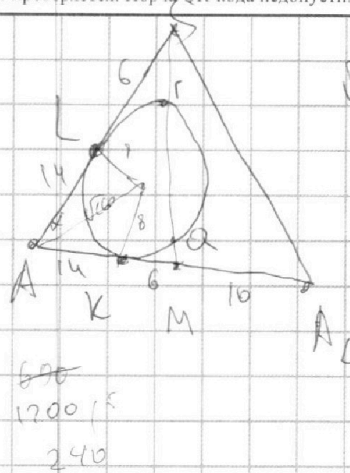
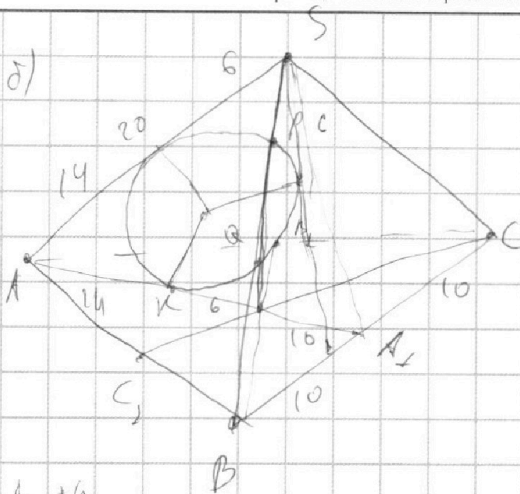
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

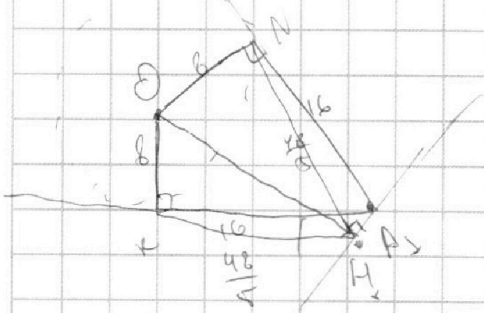


$$\sqrt{196+64} = \sqrt{260}$$

$$\cos \alpha = \frac{14}{\sqrt{260}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{49 \cdot 2}{65} - 1 = \frac{98}{65} - 1 = \frac{33}{65}$$

$$\cos \alpha = \frac{14}{\sqrt{260}} \Rightarrow SA_1^2 = 400 + 900 - \frac{2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 33}{65} = \frac{240 \cdot 33}{13}$$



Пусть AH — высота $\triangle OAK \Rightarrow AH \cdot DC = 180$

$$\Rightarrow AH = \frac{360}{20} = 18$$

$$\frac{KA_1}{AA_1} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} \Rightarrow KH_1 = \frac{8}{15} \cdot AH$$

$$= \frac{8}{15} \cdot 18 = \frac{48}{5}$$

$$2 - 51 = \frac{51}{25} \cdot 17$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{KH_1}{AH} =$$

по теореме Пифагора $AH_1 = \frac{8\sqrt{51}}{5}$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{48 \cdot 5}{5 \cdot 8 \cdot 51} = \frac{6}{\sqrt{51}} \Rightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 =$$

$$= \frac{2 \cdot 36}{51} - 1 = \frac{21}{51} = \frac{7}{17}$$

$$\arccos \frac{7}{17}$$

$$\frac{-\sqrt{32}}{7} \leq \frac{-5}{6a}$$

$$\frac{\sqrt{32}}{7} \geq \frac{5}{6a}$$

$$a > 0$$

$$6a \geq \frac{5}{\sqrt{32}}$$

$$a \geq \frac{5}{6\sqrt{32}}$$

$$a \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{5}{6\sqrt{32}}, \infty\right)$$

$$a < 0$$

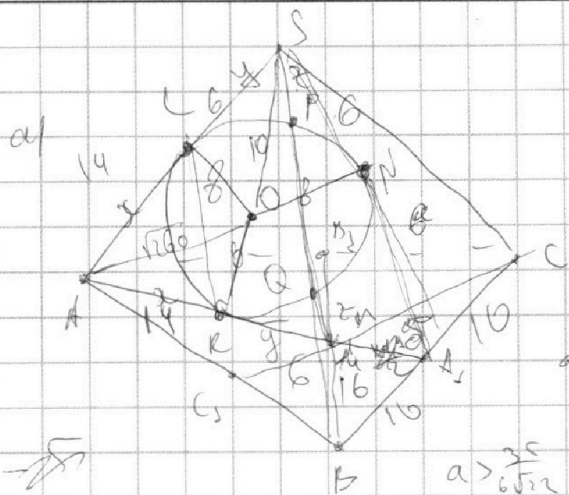
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = 180$$

$$S_A = S_C = 20$$

$$z(SM - z) = y$$

$$LK \parallel SM$$

$\angle CMB$ - искомый

$$a < -\frac{35}{6\sqrt{32}}$$

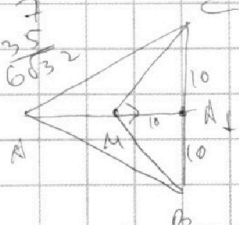
$$a > 0$$

$$a < 0$$

$$a > -\frac{35}{6\sqrt{32}}$$

$$x^2 - y = y$$

$$a < \frac{35}{6\sqrt{32}}$$



$$S_{CMB} = \frac{MA_1}{AA_1} \cdot S_{ABC} \cdot \frac{1}{2}$$

$$CM \cdot MM \cdot AA_1 = \frac{1}{2} MA_1 \cdot S_{CMB}$$

$$\frac{2}{3} \cdot CC_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot BB_1 \cdot AA_1 = \frac{1}{2} MA_1 \cdot S_{CMB}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 180 =$$

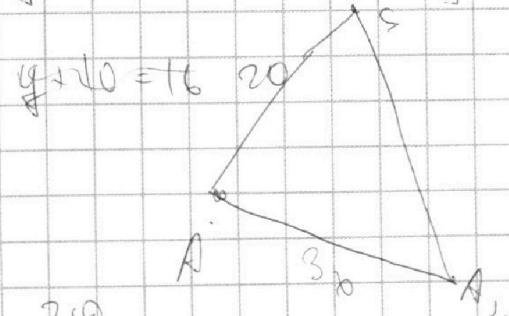
$$\begin{array}{r} 1800 \\ \cdot 14 \\ \hline 2520 \\ \cdot 6 \\ \hline 1960 \\ \cdot 4 \\ \hline 720 \\ \hline 8100 \end{array}$$

$$CM \cdot MB = 2 S_{CMB} = \frac{2 \cdot MA_1 \cdot S_{CMB}}{AA_1}$$

$$AB \cdot \frac{2}{3} \cdot CC_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot BB_1 = 2 \cdot MA_1 \cdot S_{CMB}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot S_{ABC} \cdot 10 \cdot MA_1 = \frac{180 \cdot 10 \cdot 9}{2} = 8100$$

$$SN = 6 = SL \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x = 14$$



$$a^2 = 64$$

$$14^2 = (a-6)(a+6) =$$

$$196 - 36 = 260$$

$$a = \sqrt{260}$$

$$\cos x = \frac{14}{\sqrt{260}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = \frac{2 \cdot 49}{65} - 1 = \frac{33}{65}$$

$$\frac{400 + 500 - 600 \cdot \frac{7}{65}}{65} =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$k=1$$

$$ab = 2^6 3^{15} 5^{11} k$$

$$bc = 2^{14} 3^{21} 5^{13} n$$

$$ac = 2^{16} 3^{25} 5^{28} l$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{36} 3^{59} 5^{52} k n l$$

$$abc = \sqrt{2^{36} 3^{59} 5^{52} k n l} = 2^{18} 3^{29} 5^{26} \sqrt{3 k n l}$$

$$= \boxed{2^{18} 3^{29} 5^{26}}$$

$$a+b=6$$

$$b+c=14$$

$$a+c=16$$

$$b+c=14$$

$$6-a+c=14$$

найдем все значения
по которому определяем
или $a+k, l=1$
 $2=1$ и $1=3$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEB}} = \frac{AD}{DB} \cdot \frac{S_{CAB}}{S_{CEB}} = \frac{CE}{CP} \cdot \frac{CF}{CB} \cdot \frac{BD}{AB} \cdot \frac{S_{CAB}}{S_{CEB}}$$

$$= \frac{AP}{AB} \cdot \frac{CP}{CE} \cdot \frac{CB}{CF} \cdot \frac{AB}{BD}$$

$$\frac{AB}{BD} = 1,4 = \frac{7}{5}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{AD}{AB} \cdot \frac{AB}{BD} = \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{AD}{BD}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{AD}{CP} = \frac{CP}{DB}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{CP}{BD}$$

$$k+l \geq 6$$

$$l+m \geq 14$$

$$n+k+m \geq 3$$

$$a_2+b_2=18$$

$$a_2=12$$

$$a_2+b_2=6$$

$$b_2=4$$

$$a_2=2$$

$$b_2+c_2=14$$

$$a_2+c_2=16$$

$$2x \cdot \cos x = 5x \cdot \sin x$$

$$\frac{2}{5} = \tan x$$

$$\tan x = \frac{BD}{CD} = \frac{AD}{AB}$$

$$CD^2 = BD \cdot AD = 10x^2 = 2x \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$50x^2 = 4x$$

$$x = \frac{2}{50}$$

$n=3$

$$10a \cos(\sin x) = 9a - 2x$$

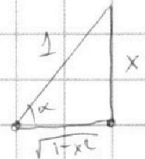
$n=4$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - 8 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

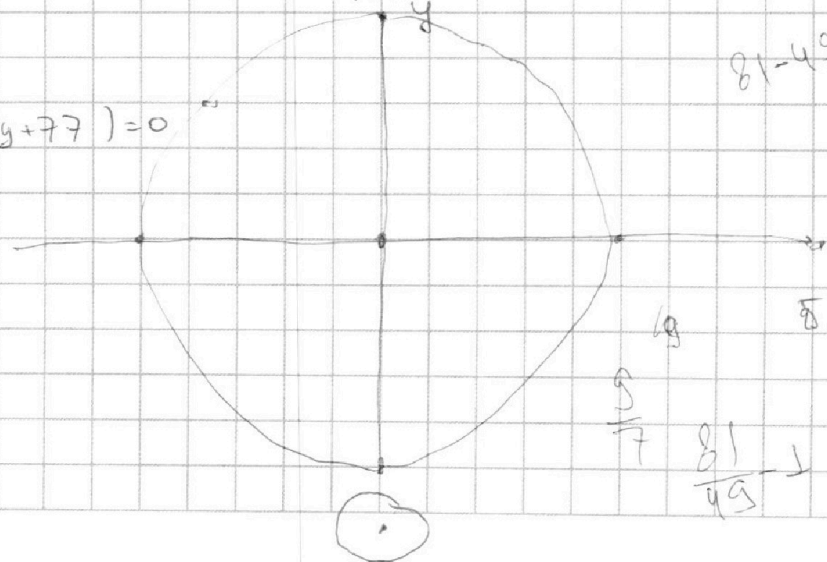
$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$

при $a = \omega \cdot t$
формулы закон механики

$$y = \frac{6 - 5x}{6a - 6a}$$



$$\sin x = \cos \frac{(10x-2x)}{10}$$



$$81 - 49$$

$$\frac{81}{49}$$

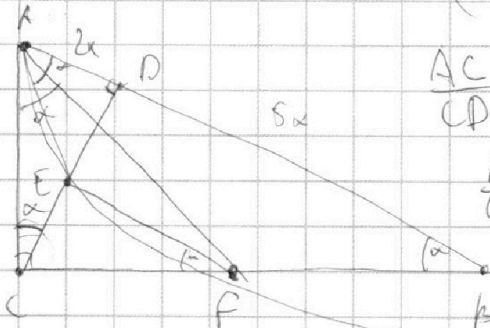
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(\log_{11} 0,5y + \log_{11} x) / (\log_{11} 0,1 + \log_{11} 1) = 0$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{CB}$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{CB}{DB}$$

$$\frac{CE}{CB} = \frac{AC \cdot \lg x}{CB}$$

$$\textcircled{1} \frac{AB}{BP} = 1,4 = \frac{7}{5}$$

по теореме о биссектрисе $BP = 5x$, $AP = 2x$

по теореме о высоте $CD^2 = AD \cdot DB = 10x^2 \Rightarrow CD = x\sqrt{10}$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{AC \cdot \lg x}{CB} \Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{CD - AD \cdot \lg x}{CB}$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{CB}{CB}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{AC \cdot \lg x}{CB}$$

$$\lg x = \frac{AP}{CD} = \frac{2x}{x\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{S_{ACB}}{S_{CEB}} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{S_{ABC}}{S_{CEB}} = \left(\frac{CE}{CB} \cdot \frac{CF}{CB} \cdot \frac{BD}{AB} \right) \cdot S_{ABC} = \frac{AP \cdot CD \cdot CB \cdot AB}{AB \cdot CE \cdot CF \cdot BD}$$

$$= \frac{AP}{BD} \cdot \frac{CD}{CE} \cdot \frac{CB}{CF}$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{CB}{CB}$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{BD} = \frac{\sqrt{10}x}{5x} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{\sqrt{10}}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ACB}}{S_{CEB}} = \frac{2x}{5x} \cdot \left(\frac{CB}{CF} \right)^2 = \frac{2 \cdot 25}{5 \cdot 4} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Ответ: **2,5**

$\frac{2}{3}$

$$\frac{2}{(a-b)(a^2+b^2)} + \frac{16}{3} = 0$$

$$\frac{1}{2} \lg \frac{1}{8}$$

$$\log_{11}^4 2 - 6 \log_x 11 = \log_{11}^4 x \Rightarrow \frac{1}{121} - 5 \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,5y}^4 y \Rightarrow 11^{-14}$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 + \frac{2}{3} \log_x 11 + 5 = 0$$

$$\log_{11}^4 0,5y + \log_{0,5y} 11 + \frac{13}{3} \log_{0,5y} 11 + 5 = 0$$

$$\log_{11}^4 2 - \frac{16}{3} \log_x 11 + 5 = 0$$

$$\log_{11}^4 0,5y + \log_{0,5y} 11 \cdot \frac{16}{3} + 5 = 0$$

$$\log_{11}^4 x = \log_{11}^4 0,5y$$

$$\log_{11}^4 0,5y - \log_{11}^4 x + \log_{0,5y} \frac{16}{3} (\log_{0,5y} 11 + \log_x 11) = 0$$

$$1) (\log_{0,5y} 11 + \log_x 11 = 0)$$

$$2) (a^2 + b^2)(a+b) = 0$$

$$a(t^2 + 2ab) \neq 0$$

$$t = 0$$

$$2) t^2 = -2ab$$

$$a^{1/3} b^{2/3} = -2ab$$



Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11} 0,5y - \log_{11} x + \frac{16}{3} (\log_{0,5y} 11 + \log_x 11) = 0$$

$$4a^3 - \frac{16}{3a} = 0$$

$$(1) \text{ also } (a^2 + b^2)(a - b) = 0$$

⑤ $\& a + b = 0$

$$((a-b)^2 + 2ab)(a-b) = 0$$

$$11 \quad a - b = 0$$

~~2) $ax^2 + 2ab = 0$~~

$$a^2 + b^2 = 0$$

$$4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0$$

$$\frac{16}{3} \sqrt[3]{\frac{16}{3}} = \frac{16}{3} \sqrt[3]{\frac{16}{3}}$$

$$a^3 = \frac{4}{3}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$$

$$a^4 - \frac{16}{3}a + 8 = 0$$

$$f'(a) = 3a^2 - \frac{16}{2}$$

$$f''(a) = 12a^2$$

Если для $f(a)$ имеет 3 и более корней
то $f'(a)$ имеет не более 2 корней
и $f''(a)$ не менее.

$$\log_4 2 - 6 \log_x 11 = \log_{x^5} \frac{1}{12} - 5$$

$$\log_{11}(0.04) + \log_{0.04} 11 = \log_{0.04} (11^{-13}) - 5$$

$$\log_{11} x - \frac{16}{5} \log_x 11 + 5 = 0$$

$$\log_{11}^4 0,5y + \frac{16}{3} \log_{0,5y} 11 + 5 = 0$$

$$4a^4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0$$

$$a^4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0$$

$$a) b^4 - a^4 + \frac{16}{3}(a+b) = 0$$

$$(a+b)((a-b)(a^2+b^2) + \frac{16}{3}) = 0$$

$$\text{max } b = 0$$

$$t \cdot (t^2 + 2ab) + \frac{16}{3} = 0$$

① $a + b = 0$

$$\textcircled{2} \quad (a-b)(a^2+b^2) + \frac{16}{3} = 0$$

$$(\log_{11} x - \log_{11} 0.5y) (\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 0.5y + \frac{16}{3}) = 0$$

$$\log_x 11 = \frac{\log \frac{1}{0.15y}}{11}$$

$$(\log_x 11 - \log_{0.3} 11)$$

$$\begin{array}{l} 0.5xy = 1 \\ xy = 2 \end{array}$$

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{y} = \text{more speed} = 0,5$$

Quilera, 05, 2

$$6x_1 - 6x_2 + (y_1 - y_2) = 48$$

$$6x_2 + y_2 = 6x_1 + y_1$$

$$\begin{aligned} \log_x 11 &= 4 - \log_{0,5} 11 = \\ &= \log_{0,5} \frac{1}{0,5} 11 \end{aligned}$$

$$\log_{0.5} y = -\log x = -\log \frac{1}{x} = \log x$$

