

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача.

Пусть abc делится на какое-то простое, кроме 2, 3, 5. Тогда, если мы и подходим под ограничения. Тогда если мы ~~изменим~~ добавим a делится на это простое, b на это простое, c на это простое, то abc строго увеличится.

Поэтому будем считать, что a, b, c представляем в виде $2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5}$.

$$\begin{cases} a = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \\ b = 2^{\beta_2} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\beta_5} \\ c = 2^{\gamma_2} \cdot 3^{\gamma_3} \cdot 5^{\gamma_5} \end{cases}$$

Тогда если:

$$\begin{cases} 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} | ab \\ 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} | bc \\ 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} | ac \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 9 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 19 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 14 \end{cases}, \begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 \geq 10 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 18 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 \end{cases}, \begin{cases} \alpha_5 + \beta_5 \geq 10 \\ \alpha_5 + \gamma_5 \geq 30 \\ \beta_5 + \gamma_5 \geq 13 \end{cases}$$

откуда $\begin{cases} 2\alpha_2 + 2\beta_2 + 2\gamma_2 \geq 9 + 19 + 14 \\ 2\alpha_3 + 2\beta_3 + 2\gamma_3 \geq 10 + 18 + 13 \\ 2\alpha_5 + 2\beta_5 + 2\gamma_5 \geq 10 + 30 + 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 42 \\ 2(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3) \geq 41 \\ 2(\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5) \geq 43 \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 21 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 20,5 \\ \alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5 \geq 21,5 \end{cases} \quad \text{т.к. } \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{N} \cap \{0\}, \text{ то}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 21 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 21 \\ \alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5 \geq 22 \end{cases} \quad \text{но т.к. } \alpha_5 + \gamma_5 \geq 30, \text{ то } \boxed{\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5 \geq 30}$$

$abc = 2^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 3^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} \cdot 5^{\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5} \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

~~минимум~~ abc ~~для~~ минимальная abc явл. $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

Пример: $\begin{cases} \alpha_2 = 7 \\ \beta_2 = 2 \\ \gamma_2 = 12 \end{cases}, \begin{cases} \alpha_3 = 7 \\ \beta_3 = 3 \\ \gamma_3 = 11 \end{cases}, \begin{cases} \alpha_5 = 15 \\ \beta_5 = 0 \\ \gamma_5 = 15 \end{cases}$

Ответ: $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\underbrace{\arcsin(\cos x)}_{\in [-5\pi; 5\pi]} = \underbrace{x + \frac{\pi}{2}}_{\in [-5\pi; 5\pi]} \quad \left(\text{оп}; x \in \mathbb{R} \right)$$

$$\Rightarrow x \in [-5,5\pi; 4,5\pi]. \quad (1)$$

$$\underbrace{\arcsin\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)}_{\alpha \in [-\pi; \pi]} = x + \frac{\pi}{2}; \quad \alpha = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}.$$

тогда существует 2 возможности:

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{2} = \alpha + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{2} = \pi - \alpha + 2\pi k. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{2} = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{3\pi}{2} = -\frac{x}{5} - \frac{\pi}{10} + 2\pi k. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x - 5\pi = 2x + \pi + 20\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ 10x - 15\pi + 2x + \pi = 20\pi k; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x = 6\pi + 20\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ 12x = 14\pi + 20\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} 4x = 3\pi + 10\pi k \\ 6x = -3\pi + 10\pi k, \end{cases}$$

$$\text{исходя из (1): } x \in [-5,5\pi; 4,5\pi] \Rightarrow \begin{cases} 4x \in [-22\pi; 18\pi] \\ 6x \in [-33\pi; 27\pi] \end{cases}$$

из этого ограничения следует, что

$$\begin{aligned} 4x &\in \{-17\pi; -7\pi; 3\pi; 13\pi\} & \text{Больше решений нет.} \\ 6x &\in \{-33\pi; -23\pi; -13\pi; -3\pi; 7\pi; 17\pi\} \end{aligned}$$

$$x \in \left\{ -\frac{33}{6}\pi; -\frac{17}{4}\pi; -\frac{23}{6}\pi; -\frac{13}{6}\pi; -\frac{7}{4}\pi; -\frac{3}{6}\pi; \frac{3}{4}\pi; \frac{7}{6}\pi; \frac{13}{6}\pi; \frac{17}{4}\pi \right\}$$

ответ:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

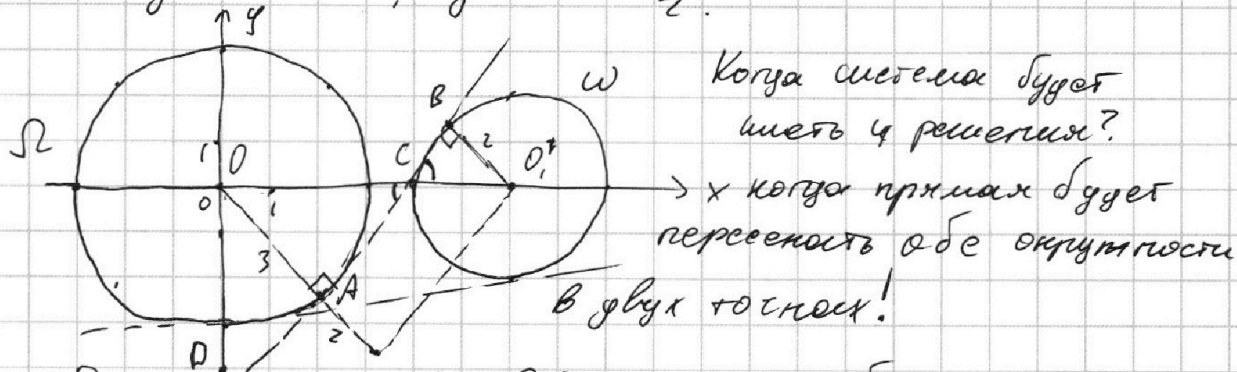
Задача 4.

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{ОРЗ: } x, y \in \mathbb{R}$$

$$(2): \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - 12x + y^2 = -32 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 = 36 - 32 = 4 \end{cases}$$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ - окр. Ω с центром в $(0;0)$ радиуса 3
- окр. ω с центром в $(6;0)$ радиуса 2

(1): $2y = 3b - ax$; $y = 1,5b - \frac{ax}{2}$ - линейная функция.



Предельный случай: эта прямая - общая касательная.

Заметим, что если прямая - внешняя касательная, то ее всегда можно сместить так, чтобы появились 4 точки пересечения, ибо в одной из поперечностей, ~~пересекаемых~~ ~~этой~~ образованных этой прямой всегда есть 2 окружности и если сдвинуть касательную в сторону центров окружностей на не "слишком большое" ненулевое расстояние, очевидно, что коэффициенты не изменятся, т.к. выполняется параллельный перенос, а точек пересечения станет 4, что и требуется.

Значит, предельный случай - внутренняя общая касательная.

Стр 1432.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4, продолжение.

Т.к. картинка симметрична отн. OX , будем рассматривать лишь ω касательную AB рисунка.

A - точка касания Ω прямой AB .

B - точка касания ω прямой AB .

$O; O_1 \in OX$; $OO_1 = 6$.

радиусе $\Omega, R = 3$; радиусе $\omega, r = 2$.

$C = AB \cap OO_1 \Rightarrow \triangle OAC \sim \triangle O_1BC$ т.к. $\angle OCA = \angle O_1CB$
(вертикальные)

$$\angle OAC = \angle O_1BC = 90^\circ \Rightarrow \frac{OC}{O_1C} = \frac{OA}{O_1B} = \frac{R}{r} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{OC}{O_1C} = \frac{3}{2} \\ OC + O_1C = OO_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OC = 3,6 \\ O_1C = 2,4 \end{cases}$$

$\triangle O_1BC$: $\angle B = 90^\circ$; $O_1B = r = 2$; $O_1C = 2,4$. по Т. Пифагора:

$$CO_1^2 = O_1B^2 + CB^2; \quad \frac{4 \cdot 144}{100} = \frac{400}{100} = CB^2 = \frac{176}{100}; \quad CB = \sqrt{\frac{16 \cdot 11}{100}}$$

$$CB = 0,4 \sqrt{11}$$

вычисляем угловой коэф. α для AB в системе Ox, y .

$$\alpha = \arg(Ox; AB) = \arg \angle O_1CB = \frac{O_1B}{BC} = \frac{2}{0,4 \sqrt{11}} = \frac{20}{4 \sqrt{11}} = \frac{5 \sqrt{11}}{11}$$

т.к. $O_1C \in OX$; $CB \perp AB$.

Значит, при $\alpha \geq \frac{5 \sqrt{11}}{11}$ при любом b может быть не более двух решений.

Т.к. картинка симметрична отн. OX , то все верно и для $\alpha \leq -\frac{5 \sqrt{11}}{11}$.

Значит, лишь при $\alpha \in (-\frac{5 \sqrt{11}}{11}, \frac{5 \sqrt{11}}{11})$

можно найти такое b , что иск. сист. имеет 4 решения.

$$\text{Ответ: } \alpha \in \left(-\frac{5 \sqrt{11}}{11}, \frac{5 \sqrt{11}}{11}\right)$$

стр 2 из 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2 243} - 8 \\ \log_3^4 sy + 2 \log_{sy} 3 = \log_{25y^2} (3^4) - 8 \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } sy > 0; x > 0. \\ sy \neq 1 \quad x \neq 1$$

Замена: $sy = a$; $\log_3 x = \alpha$; $\log_3 a = \beta$.

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \cdot \frac{1}{\log_3 x} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} = 8 \\ \log_3^4 a + 2 \cdot \frac{1}{\log_3 a} - \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 a} = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha^4 + 6 \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} = 8 \\ \beta^4 + 2 \cdot \frac{1}{\beta} - \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\beta} = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^5 + 6 - \frac{5}{2} = 8\alpha \\ \beta^5 + 2 - \frac{11}{2} = 8\beta \end{cases} \quad \begin{aligned} 8(\alpha + \beta) &= \alpha^5 + \beta^5 + 8 - \frac{16}{2} = \alpha^5 + \beta^5 \\ \alpha^5 + \beta^5 - 8(\alpha + \beta) &= 0 \end{aligned}$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha^4 - \beta\alpha^3 + \beta^2\alpha^2 - \beta^3\alpha + \beta^4) - 8(\alpha + \beta) = 0.$$

$$\begin{cases} (\alpha + \beta) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = \log_3 x + \log_3 a = \log_3(ax) = \log_3(sxy) = 0 \\ \alpha^4 - \beta\alpha^3 + \beta^2\alpha^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sxy = 1; \\ xy = 0,7. \end{cases}$$

Ответ: 0,7.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

Заведём ~~$b(x, y) = 3x + y$~~ $b(x, y) = 3x + y$.

Заметим, что условие: $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$
можно записать в виде:

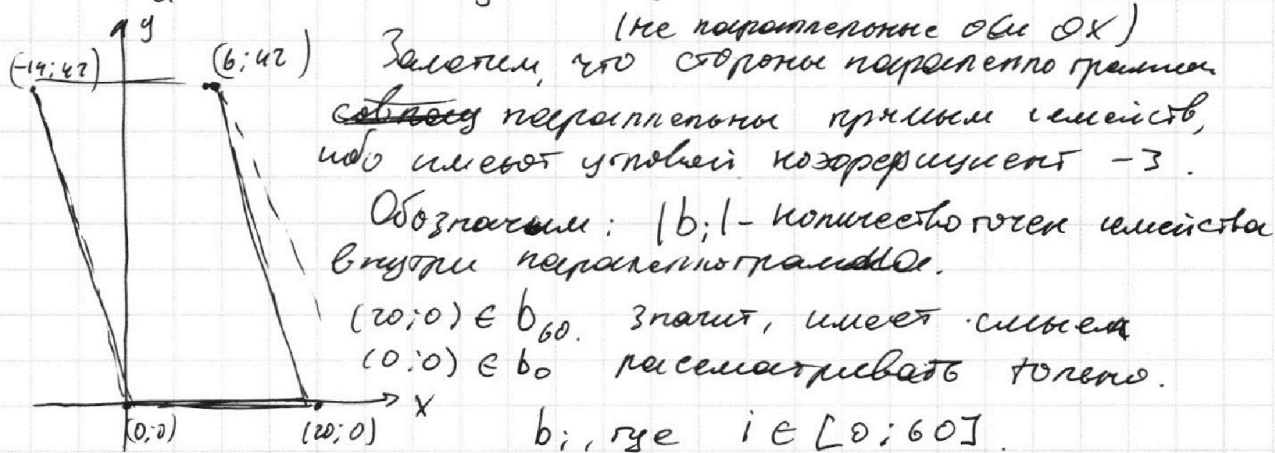
$$3x_2 + y_2 = 33 + 3x_1 + y_1 \quad \text{т.е.} \quad b(x_2, y_2) = 33 + b(x_1, y_1)$$

Объединим точки в семейства, где в семействе b_1
где b_1 это всех точек одного семейства совпадают.

Заметим, что все точки семейства лежат на одной
прямой: $b(x, y) = 3x + y$ и $y = -3x + b(x, y)$.

и т.к. $b(x, y)$ совпадают, то все они лежат на одной
прямой: $y = -3x + c$; $c = \text{const}$.

Семейство будем обозначать по $b(x, y)$. Например,
 b_1 - семейство, где $b(x, y) = 1$.



Заметим, что при $i \in [0; 57]$: $|b_i| = |b_{i+3}|$, т.к. ~~то~~
точки семейств отличаются лишь суммой x координат
на i . ~~(тогда)~~

~~В итоге~~ ^{в итоге}: Задача свелась к тому, чтобы
посчитать: $\sum_{i=0}^{27} |b_i| \cdot |b_{i+33}|$ (потому что для каждой
пары точек из разных семейств,
~~каждая пара~~ $b(x_2, y_2) - b(x_1, y_1) = i + 33 - i = 33$.) ~~каждая пара~~ i и $i+33$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6 (продолжение)

$|b_0|$ - количество точек на отрезке $(-14; 42) \cap (0; 0)$.

$|b_0| = 15$, т.к. $\forall x \in \mathbb{Z}, x \in [-14; 0]$ можно сопоставить $y = -3x$, которое, ибо $y \in [0; 42]$.

$|b_1| = 14$, т.к. если ~~тогда~~ рассмотреть $f(x) = -3x + 1$,
~~то на отрезке~~, то $\begin{cases} f(x) \geq 0 & x \geq -\frac{1}{3} \\ f(x) \leq 42 & -3x \leq 41 \end{cases} \Rightarrow x \in [-\frac{1}{3}; 13\frac{2}{3}]$.

$|b_2| = 14$, $f(x) = -3x + 2$; $\begin{cases} -3x + 2 \geq 0 & x \geq -\frac{2}{3} \\ -3x + 2 \leq 42 & x \leq \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3} \end{cases}$

т.к. $|b_i| = |b_{i+3}|$, то $|b_i| = |b_r|$, где $r \equiv i \pmod{3}$; ~~$i \in \{0, 1, 2\}$~~ .

Учтем:

$$\sum_{i=0}^{27} |b_i| \cdot |b_{i+33}| = \sum_{i=0}^{27} |b_i|^2, \text{ т.к. } 33 \equiv i \pmod{3}$$

$$\sum_{i=0}^{27} |b_r|^2, \text{ где } r - \text{остаток } i \text{ от деления на } 3.$$

$$\sum_{i=0}^{27} |b_r|^2 = |b_0|^2 \cdot \left\lfloor \frac{27}{3} \right\rfloor + |b_1|^2 \cdot \left\lfloor \frac{26}{3} \right\rfloor + |b_2|^2 \cdot \left\lfloor \frac{25}{3} \right\rfloor =$$

$$= 15^2 \cdot 9 + 14^2 \cdot 8 + 14^2 \cdot 8 = 225 \cdot 9 + 196 \cdot 16 =$$

$$= 3136 + 2025 = 5161.$$

Ответ: 5161.

стр 2 из 2.

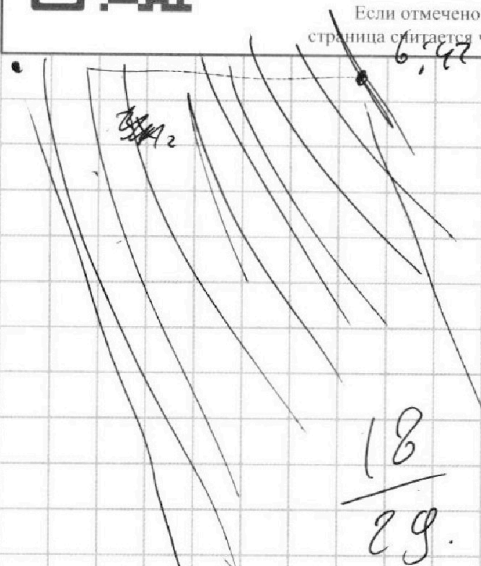
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

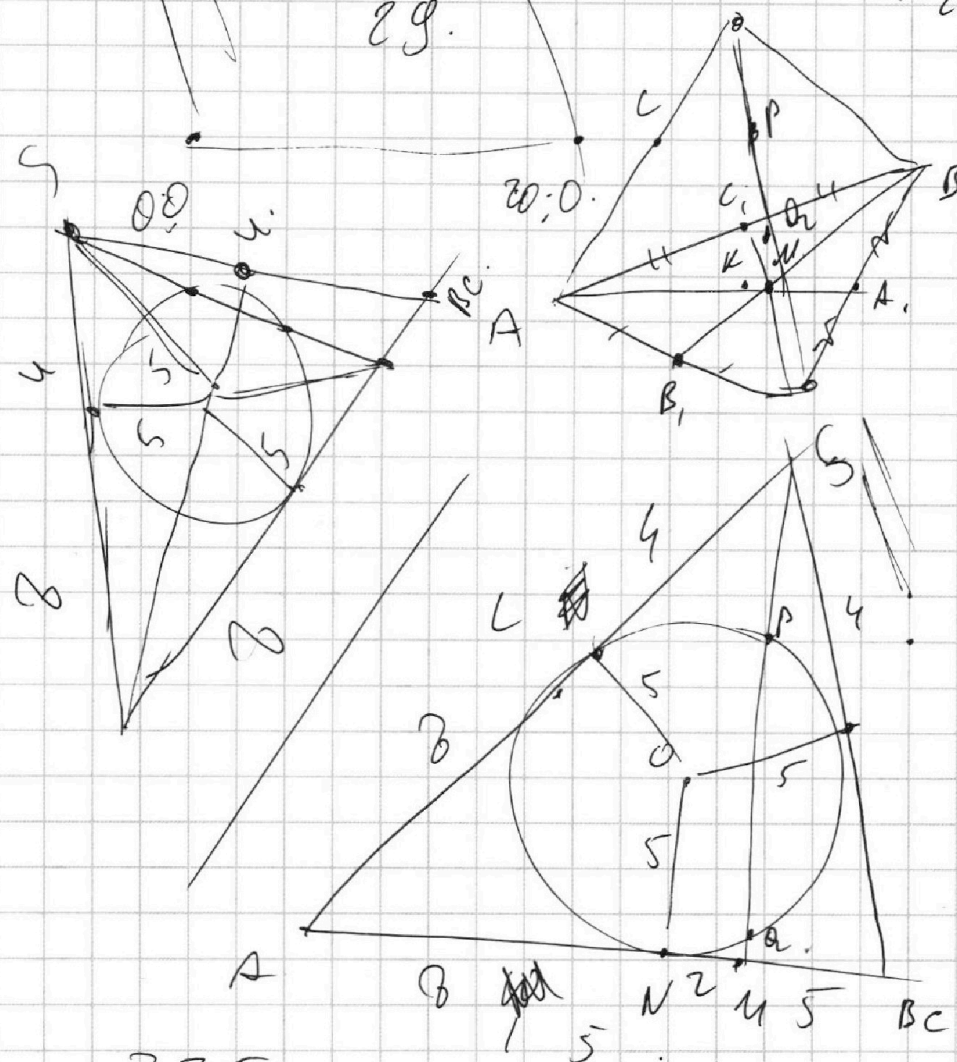


$$(x, y)$$

$$3x_2 + y_2 = C = 33 + y_1 + 3x_1$$

$$\frac{42}{18} = \frac{6y_2}{18} = \frac{C - 3x_2}{18} \quad 3x_2 + y_2 = 0$$

$$3x_2 + y_2 = 33 + y_1 + 3x_1$$



$$\begin{array}{r} 13 \\ 24 \\ 106 \\ \hline 146 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 14 \\ 60 \\ 33 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 196 \\ 16 \\ 136 \\ 254 \\ 6 \\ \hline 3136 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ 9 \\ \hline 18 \\ 18 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$AB = 15$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заменим: $5y = a$; $a > 0 \therefore a \neq 1$ $\log_3 x = \alpha$
 $x > 0 \therefore x \neq 1$ $\log_3 5y = \beta$.

$xy = ax \cdot \frac{1}{5}$.

$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 - \frac{1}{2} \log_{x^2} \frac{25}{3} = \alpha + \beta = \log_3 (a \cdot x)$

$\alpha^4 + 6 \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} = 8$.

$\beta^4 + 2 \cdot \frac{1}{\beta} - \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\beta} = 8$.

$\alpha^5 + 6 - \frac{5}{2} = 8\alpha$.

$\beta^5 + 2 - \frac{11}{2} = 8\beta$.

$\alpha^4 + \beta^4$
 $2\alpha^5 + 2\beta^5$
 $(-11, 8)$

$$\begin{array}{r} 2025 \\ 3136 \\ \hline 5161 \end{array}$$

$\alpha^5 + \beta^5 + 8 - \frac{5+11}{2} = (\alpha + \beta) 8$.

$\alpha^5 + \beta^5 = (\alpha + \beta) 8$

$$\begin{array}{r} x^5 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\ x^5 + \alpha x^4 \\ \hline \alpha x^4 \end{array} \quad \begin{array}{r} x + \alpha \\ x^4 + \alpha x^3 \\ \hline \end{array}$$

$$(x + \alpha)(x^4 - \alpha x^3 + \alpha^2 x^2 - \alpha^3 x + \alpha^4) =$$

$$= x^5 + \alpha x^4 - \alpha x^4 - \alpha^2 x^3 + \alpha^2 x^3 - \alpha^3 x^2 + \alpha^3 x^2 - \alpha^4 x + \alpha^4 x$$

$$= x^5 + \alpha x^4 - \alpha^2 x^3 + \alpha^2 x^3 - \alpha^3 x^2 + \alpha^3 x^2 - \alpha^4 x + \alpha^4 x$$

$$\alpha^4 + 2\alpha^2 \beta^2 + \beta^4 - \beta \alpha^3 - \alpha^2 \beta^2 - \beta \alpha^3 = 8$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha \beta (\alpha^2 + \alpha \beta + \alpha \beta^2)$$

$$\alpha^4 - 2\alpha^2 \beta^2 + \beta^4 - \beta \alpha^3 + 3\alpha^2 \beta^2 - \beta \alpha^3 = 8$$

$$(\alpha^2 - \beta^2)^2 - (\alpha - \beta)^2 \alpha \beta$$

$$-\frac{11}{4} =$$

$$0 = 95 - 36 + 2x \quad 9 = 36 - 95 = 2x$$