МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)\,(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3} \left(11^{-13}\right) - 5.$$

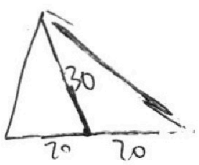
Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.



© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

① $ab : 2^6 3^{13} 5^{11}$

$bc : 2^{14} 3^{21} 5^{13}$

$ac : 2^{16} 3^{25} 5^{26}$

$\Rightarrow a^2b^2c^2 : 2^{6+14+16}\ 3^{13+21+25}\ 5^{11+13+26}$

$a^2b^2c^2 : 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$

$abc = T \Rightarrow T^2 : 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, T^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot k,\ k \in N$

$T = 2^{18} \cdot 3^{29} \cdot 5^{26} \cdot \sqrt{3k}\ ;\ \sqrt{3k} \in N \Rightarrow$

$\Rightarrow \min k = 3 \Rightarrow \min T = abc =$

$= 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

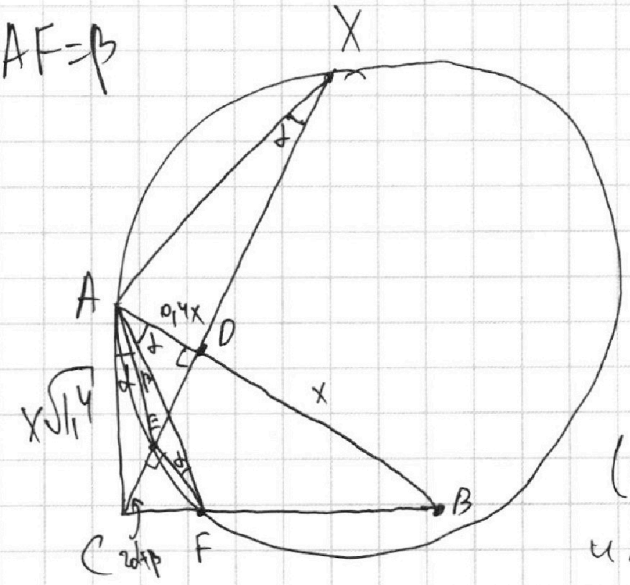
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(2) $\angle EAF = \beta$



1) $\frac{AB}{BD} = 1,4 \Rightarrow$

$\Rightarrow DB = X$

$AD = 0,4X$

2) $\angle CAE = \angle AXE = \alpha$

(угол между хордой AE и касательной: AC)

3) $\angle AXE = \angle EFA = \alpha$ (опир. на $\overset{\frown}{AE}$)

4) $\angle EFA = \angle FAB = \alpha$ (EF || AB, внутр. накр. лежащ.)

5) $\triangle ACD \sim \triangle ACB$ ($\angle ADC = \angle ACB = 90°$, $\angle CAB$ - общий)

$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC^2 = AD \cdot AB = 1,4X^2$

$AC = X\sqrt{1,4}$

6) $EF \parallel AB \Rightarrow \angle CEF = \angle CDA = 90°$

7) $\angle CAD = 90° - \angle ACD = \angle ECF = 2\alpha + \beta$

$\cos(2\alpha+\beta) = \frac{AD}{AC} = \boxed{\frac{0,4}{\sqrt{1,4}} = \frac{CE}{CF}}$ ($\triangle ACD$ и $\triangle CEF$ - п/у)

8) $\triangle ACF$: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{CF}{X\sqrt{1,4}} = \frac{CF}{AC}$

$\triangle AED$: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{ED}{AD} = \frac{ED}{0,4X}$ $\Big| \Rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow \frac{CF}{x\sqrt{1,4}} = \frac{ED}{0,4x}$ $\quad CF \cdot 0,4x = ED \cdot x\sqrt{1,4}$

$0,4\,CF = \sqrt{1,4}\,ED$

$CF = y \Rightarrow ED = \frac{0,4y}{\sqrt{1,4}}$

п.ч: $\frac{CE}{CF} = \frac{CE}{y} = \frac{0,4}{\sqrt{1,4}}$ $\quad \boxed{CE = \frac{0,4y}{\sqrt{1,4}} = ED}$

9) $\triangle CEF \sim \triangle CDB$ ($EF \parallel DB \Rightarrow \angle CFE = \angle CBD$, $\angle CEF = \angle CDB$)

$CE = ED \Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{1}{2} = k \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{CDB}} = k^2 = \frac{1}{4}$

$S_{CEF} = S$, $S_{CDB} = 4S$

10) $\frac{S_{CDB}}{S_{CAD}} = \frac{DB}{DA} = \frac{1}{0,4} = \frac{4S}{S_{CAD}} \Rightarrow S_{CAD} = 1,6S \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{1,6S}{S} = 1,6$

Ответ: 1,6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(3) $10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$\arccos(\sin x) \in [0; \pi]$

$10\arccos(\sin x) \in [0; 10\pi] \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 0 \le 9\pi - 2x \le 10\pi$

$-9\pi \le -2x \le \pi$

$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{9\pi}{2}$ | $\sin x = t \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~

$$\begin{cases} \arcsin t = x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ \arcsin t = x - \pi, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \\ \arcsin t = x - 2\pi, & x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \\ \arcsin t = x - 3\pi, & x \in \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \\ \arcsin t = x - 4\pi, & x \in \left(\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right] \end{cases}$$

но $\arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ ~~[illegible]~~

$\arcsin t = \frac{\pi}{2} - \arccos t$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arccos t = x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad (1) \\ \frac{\pi}{2} - \arccos t = x - \pi, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \quad (2) \\ \frac{\pi}{2} - \arccos t = x - 2\pi, & x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \quad (3) \\ \frac{\pi}{2} - \arccos t = x - 3\pi, & x \in \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \quad (4) \\ \frac{\pi}{2} - \arccos t = x - 4\pi, & x \in \left(\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right] \quad (5) \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(1): $\arccos t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow 10\arccos t = 9\pi - 2x$

$5\pi - 10x = 9\pi - 2x \quad 8x = -4\pi, \ x = -\frac{\pi}{2}, \ x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

~~$8x = -2\pi, \ x = -\frac{\pi}{4}, \ x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$~~ не

$\Rightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{2}}$

(2): $\arccos t = \frac{3\pi}{2} - x$

$15\pi - 10x = 9\pi - 2x$

$8x = 6\pi$

$x = \frac{3\pi}{4}, \ x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow \boxed{x = \frac{3\pi}{4}}$

(3): $\arccos t = \frac{5\pi}{2} - x$

$25\pi - 10x = 9\pi - 2x$

$8x = 16\pi$

$x = 2\pi, \ x \in (\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \Rightarrow \boxed{x = 2\pi}$

(4): $\arccos t = \frac{4\pi}{2} - x$

$35\pi - 10x = 9\pi - 2x$

$8x = 26\pi$

$x = \frac{13\pi}{4}, \ x \in (\frac{5\pi}{2}; \frac{4\pi}{2}] \Rightarrow \boxed{x = \frac{13\pi}{4}}$

Ответ: $-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; 2\pi; \frac{13\pi}{4}; \frac{9\pi}{2}$

(5): $\arccos t = \frac{9\pi}{2} - x$

$45\pi - 10x = 9\pi - 2x$

$8x = 36\pi, \ x = \frac{36\pi}{8}, \ x \in \frac{9\pi}{2}, \ x \in (\frac{4\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}]$

$\boxed{x = \frac{9\pi}{2}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

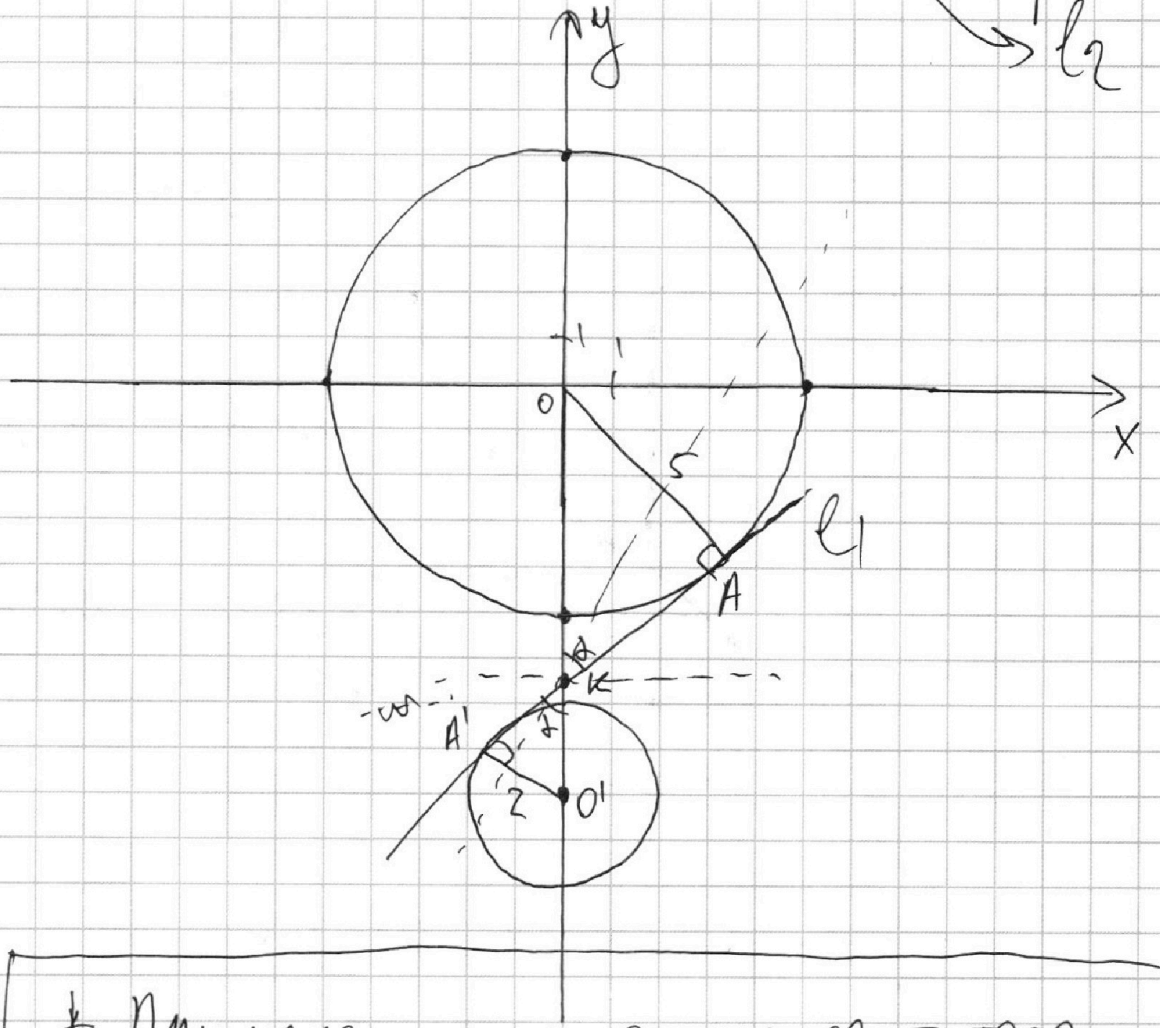
④ $\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \quad (**) \\ (x^2+y^2-25)\left(x^2+y^2+12y+27\right)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -\frac{5}{6a}x+\frac{b}{6a} \quad (3) \\ x^2+y^2=25 \quad (1) \\ x^2+(y+9)^2=4 \quad (2) \end{cases}$

(1) окр-сть, ц. $(0;0)$; $R=5$

(2) окр-сть, ц. $(0;-9)$; $R=2$

(3) лин. ф-ция, неверочн. прямая $\to l_2$



*. Примечание: $a=0$ - подходит, тогда $(**)$ имеет вид: $5x=b$ - вертик. прямая,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

очевидно, напр., при $b=0$ будет 4 решения, тогда чтобы получить (3) делим на $69 \neq 0$

---

1) Введём временно: $-\frac{5}{69}=k$, $\frac{b}{69}=C$, (3): $y=kx+b$, тогда граничное положение прямой - прямая l_1, касающ. Γy^x сир. так, как показано на чертеже, $OK=x'$, тогда

$KO'=9-x'$ (т.к. $OO_1=9$) $\Rightarrow tg\alpha=\frac{2}{9-x'}=\frac{5}{x'}$

$2x'=45-5x'$

$x'=\frac{45}{7}\Rightarrow$

$\Rightarrow tg\alpha=\frac{35}{49}=\frac{7}{9}\Rightarrow$

$\Rightarrow tg(90^\circ-\alpha)=ctg\alpha=\frac{9}{7}\Rightarrow$ l_1 имеет вид: $y=\frac{9}{7}x-\frac{45}{7}$, для

(будем рассматривать в дальнейшем только возрастающ. прямые, $k>0$, для убывающ. сигнал симметричен, $k<0$)

~~Чтобы было~~ $k>\frac{9}{7}$, очевидно, будет подбираться b, чтобы Γ_2 имела в сумме 4 точки пер. с окр-стями $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ у исходной системы было 4 реш.

Также понятно, что при $ock<\frac{9}{7}$ будет только

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

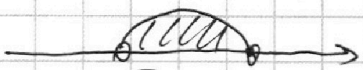
пересечение с одной из окр-стей

Тогда имеем:

$$\begin{cases} -\frac{5}{6a} > \frac{9}{7} \quad (!) \\ -\frac{5}{6a} < -\frac{9}{7} \quad (!!) \end{cases}$$

(!): $\frac{9}{7} + \frac{5}{6a} < 0$

$\frac{54a+35}{42a} < 0$



$a \in (-\frac{35}{54}; 0)$

(!!): $\frac{5}{6a} - \frac{9}{7} > 0$

$\frac{35-54a}{42a} > 0$

Но, как мы выяснили ранее, $a=0$ – подходит $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $\left(-\frac{35}{54}; \frac{35}{54}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

⑤ $\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$

$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3\log_{11} x} - 5$

$\log_{11} x = a \Rightarrow a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5$

$a^4 - \frac{6}{a} + \frac{2}{3a} + 5 = 0$

$\frac{3a^5 - 18 + 2 + 15a}{3a} = 0$

$\boxed{3a^5 + 15a - 16 = 0}$

г) $\log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}(11^{-13}) - 5$

$\begin{cases} y>0 \\ y\neq 2 \end{cases}$

$\log_{11}^4(0{,}5y) + \frac{1}{\log_{11}(0{,}5y)} = -\frac{13}{3\log_{11}(0{,}5y)} - 5$

$\log_{11}(0{,}5y) = b \Rightarrow b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5$

$3b^5 + 3 = -13 - 15b$

$\begin{cases} 3b^5 + 15b + 16 = 0 \ (2) \\ 3a^5 + 15a - 16 = 0 \ (1) \end{cases}$ (+) $\Rightarrow 3a^5 + 3b^5 + 15a + 15b = 0$

$a^5 + b^5 + 5a + 5b = 0$

$(a+b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + 5) = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) Расс-м $f(x)=3x^5+15x+16$

$f'(x)=15x^4+15>0 \Rightarrow f(x)$ - возрастает $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ имеет только одно решение

Аналогично: $g(x)=3x^5+15x-16$

$g'(x)=15x^4+15>0 \Rightarrow g(x)$ - возрастает $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ур-ие: $3b^5+15b+16=0$ - имеет 1 решение,

$3a^5+15a-16=0$ имеет одно решение.

Пусть $a=a_0$ - решение $3a^5+15a-16=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3a_0^5-15a_0+16=0 \Rightarrow b=-a_0$ - решение

$3b^5+15b+16=0 \Rightarrow \log_{11} x=a_0,\ \log_{11}(0{,}5y)=-a_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{11} x+\log_{11}(0{,}5y)=a_0-a_0=\log_{11}(0{,}5xy)=0$

$0{,}5xy=1 \Rightarrow xy=2$ (заметим, что

условия $x\neq 1$ ($x>0$) и $y\neq 2$ ($y>0$) выполняются,

т.к. $a_0\neq \log_{11} 1=0$)

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

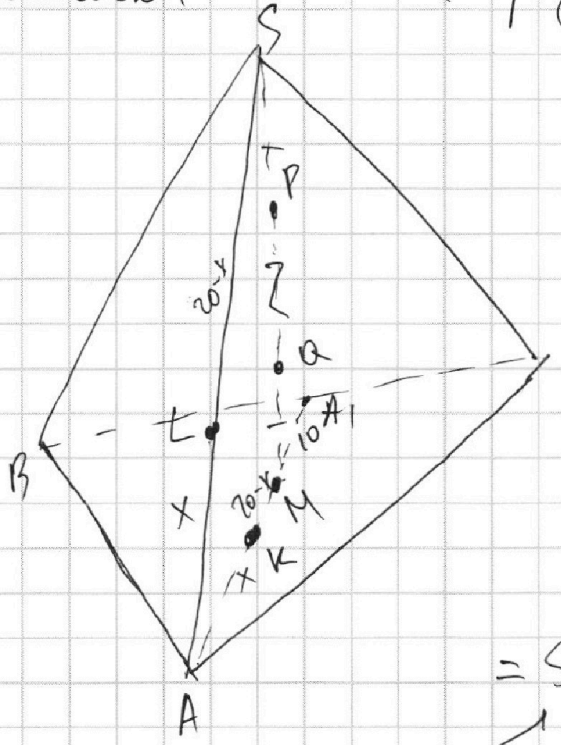
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(перестановка точек P и Q образует ~~такая~~ то же самое степень точек будут считаться также)

④



1) $AK = AL$ (отрезки касательных) $= x \Rightarrow$

$\Rightarrow SL = 20 - x$

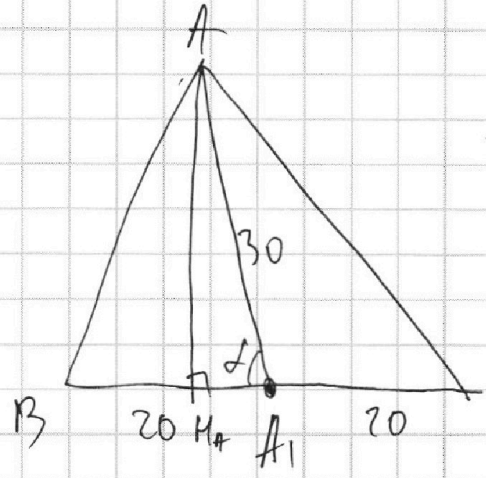
2) $SL^2 = SP \cdot SQ$ (степень точки S отн-но сферы)

3) $MK^2 = MQ \cdot MP =$ (с. точки M)

$= SP \cdot SQ$ ($MQ = SP$, $PM = SQ$)

$SL^2 = MK^2 = 20 - x \Rightarrow AM = 20 - x + x = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow MA_1 = \frac{1}{2} AM = 10$ (M делит медианы в 2:1) $\Rightarrow AA_1 = 30$



$S = 30 \cdot 20 \cdot \sin\alpha = 600 \sin\alpha =$

$= 180$

$\sin\alpha = \frac{18}{60} = \frac{3}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow H_A A = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow H_A A_1 = \sqrt{30^2 - 9^2} =$

$= \sqrt{21 \cdot 39} = 3\sqrt{7 \cdot 13} = 3\sqrt{91}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4) $BH_A = 20 - 3\sqrt{91} \Rightarrow AB = \sqrt{(20-3\sqrt{91})^2 + 9^2} =$

5) $CH_A = 20 + 3\sqrt{91} \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \sqrt{(20+3\sqrt{91})^2 + 9^2}$

$m_c^2 = \frac{2\cdot 40^2 + 2(20+3\sqrt{91})^2 + 2\cdot 9^2 - (20+3\sqrt{91})^2 - 9^2}{4}$

$m_b^2 = \frac{2\cdot 40^2 + 2(20-3\sqrt{91})^2 + 2\cdot 9^2 - (20+3\sqrt{91})^2 - 9^2}{4}$

$$m_A \cdot m_B \cdot m_C = \frac{30}{4}\sqrt{\left(2\cdot 40^2 + 2(20+3\sqrt{91})^2 + 9^2 - (20-3\sqrt{91})^2\right)\left(2\cdot 40^2 + 2(20-3\sqrt{91})^2 + 9^2 - (20+3\sqrt{91})^2\right)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\arccos(\sin x) \in [0; \pi]$

$10a... \in [0; 10\pi]$

$0 \le 9\pi - 2x \le 10\pi$

$-9\pi \le -2x \le \pi$

$-\pi \le 2x \le 9\pi$

$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{9\pi}{2}$

$\arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2}$

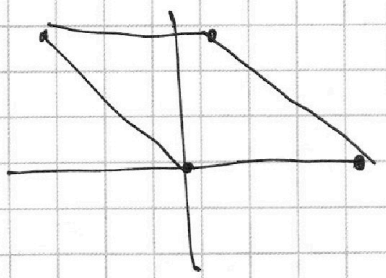
$\sin x = t$

$\cos x = \sqrt{1-t^2}$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x = 1$

$\sin x = t$

arccos



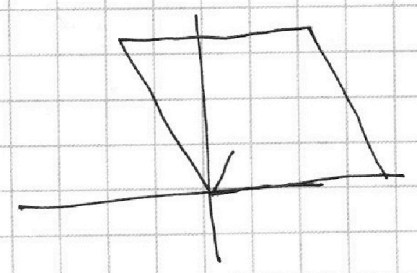
$$\begin{cases} \arcsin t = x, & x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ \arcsin t = x - \pi, & x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}] \\ \arcsin t = x - 2\pi, & x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \\ \arcsin t = x - 3\pi, & x \in [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}] \\ \arcsin t = x - 4\pi, & x \in [\frac{9\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}] \end{cases}$$

да $\arccos t = \sqrt{1-x^2}$

$\arcsin 1 =$

$\sin(x-\pi) = \sin x$

$\arccos t = \frac{\pi}{2} - x$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

⑤ $\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \frac{1}{3}\log_x 11^{-2} - 5$

$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3\log_{11} x} - 5$ $\quad 3(a^5+b^5)+15(a+b)=0$

$b^4 - \frac{6}{b} = -\frac{2}{3b} - 5$

$\log_{11}^4(0{,}5y) + \frac{1}{\log_{11}(0{,}5y)} = \log_{(0{,}5y)^3}(11^{-13}) - 5$

$\log_4^4(0{,}5y) + \frac{1}{\log_{11}(0{,}5y)} = -\frac{13}{3\log_{11}(0{,}5y)} - 5$

$a^4 + \frac{1}{a} = -\frac{13}{3a} - 5$

$b^4 - \frac{6}{b} + \frac{2}{3b} + 5 = \frac{3b^5 - 18 + 2 + 15b}{3b} =$

$= \frac{3b^5+15b-16}{3b} = 0$ $\quad 3b^5+15b-16=0$

$3a^5+15a+16=0$

$a^4 + \frac{1}{a} + \frac{13}{3a} + 5 = \frac{3a^5+3+13+15a}{3a} = \frac{3a^5+15a+16}{3a} = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

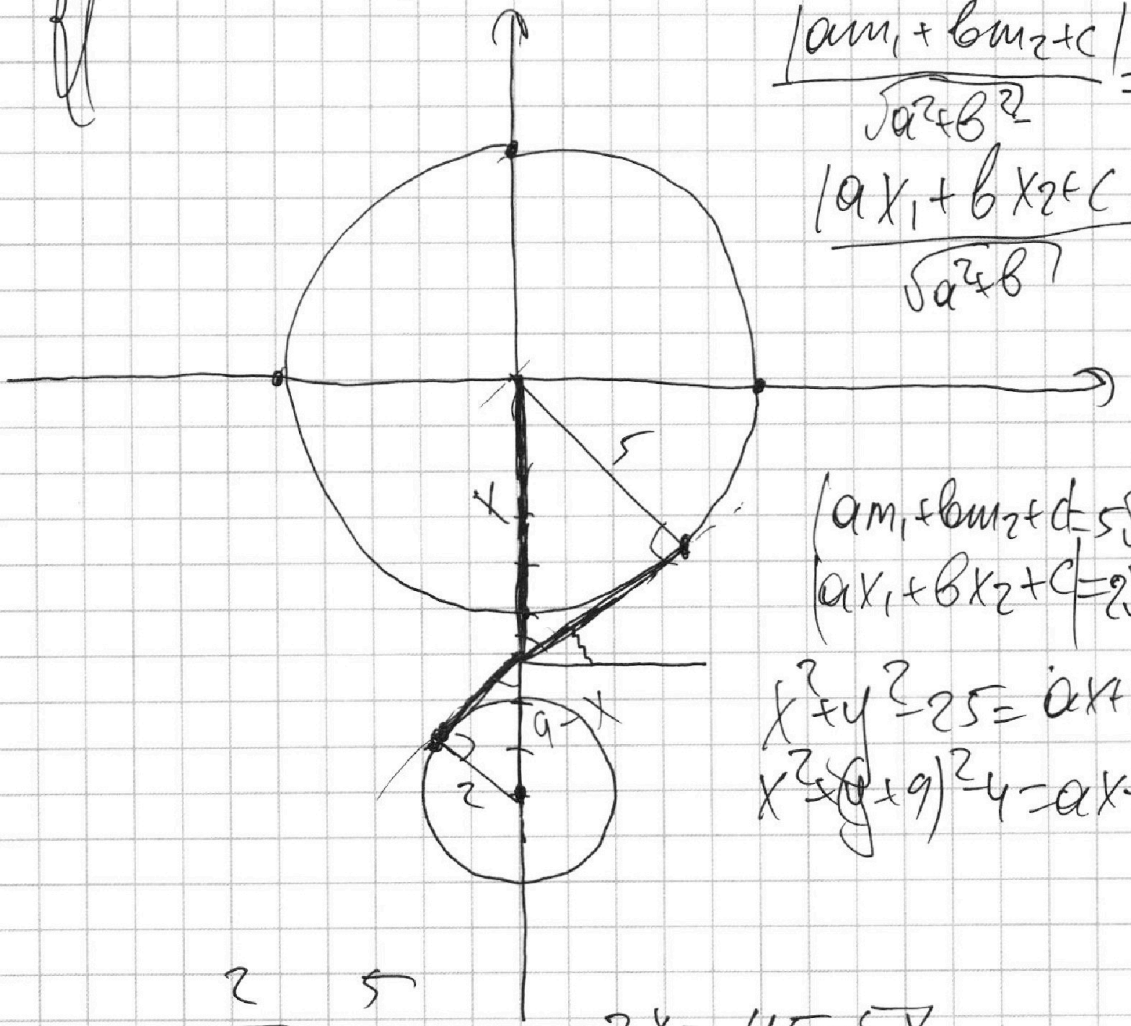
④ $\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ x^2+y^2=25 \\ x^2+y^2+18y+81-81+77=0 \end{cases}$

$6ay = -5x+b$

$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$

$x^2+(y+9)^2=4$

$y = kx+b$



$\frac{|am_1+bm_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 5$

$\frac{|ax_1+bx_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2$

$|am_1+bm_2+c| = 5\sqrt{a^2+b^2}$

$|ax_1+bx_2+c| = 2\sqrt{a^2+b^2}$

$x^2+y^2-25 = ax+by+c$

$x^2+(y+9)^2-4 = ax+by+c$

$\frac{2}{9-x} = \frac{5}{x}$

$2x = 45-5x$

$7x = 45$

$x = \frac{45}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

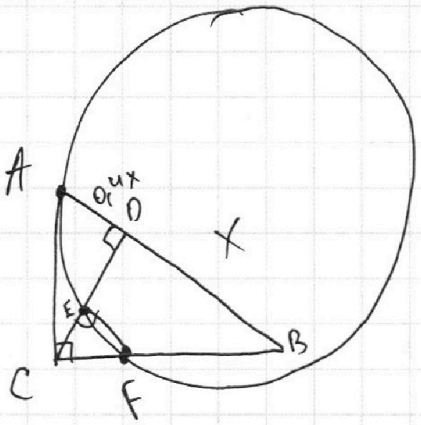
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot DC$

$S_{CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot EF$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} =$



$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$

$ab : 2^6 3^{13} 5^{11}$

$bc : 2^{14} 3^{21} 5^{13}$

$ac : 2^{14} 3^{25} 5^{28}$

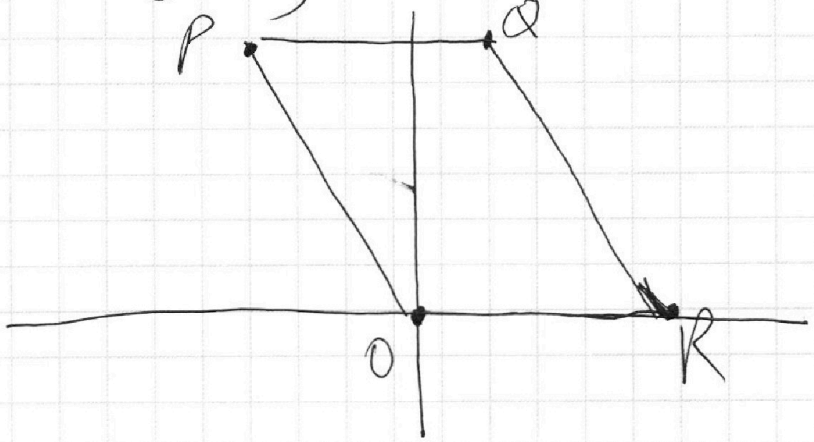
$a^2 b^2 c^2 : 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$

$abc = T$

$T^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot 1$

$T^2 = 2^{36} \cdot 5^{59} \cdot 5^{52} \cdot 1$

$T = 2^{18} \cdot 5^{26} \cdot 5^{29} \sqrt{5 \cdot 1}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4 \mid a+b$

$-a^4+a^3b \quad\quad a^3+ab^2$

$a^2b^2+ab^3$

$-a^2b^2+ab^3$

$3x^5+15x-16=0$

$a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^4+b^4$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$T^4-3a^3b-4a^2b^2-3ab^3+5=0$

$3a^3b+4a^2b^2+3ab^3$

$ab(3a^2+4ab+3b^2)$

$D=16b^2$

$(a+b)(a^3+ab^2)=a^4+a^2b^2+a^3b+ab^3$

$a(a+b)(a^2+ab^2)+b^4+5=0$

≥ 5

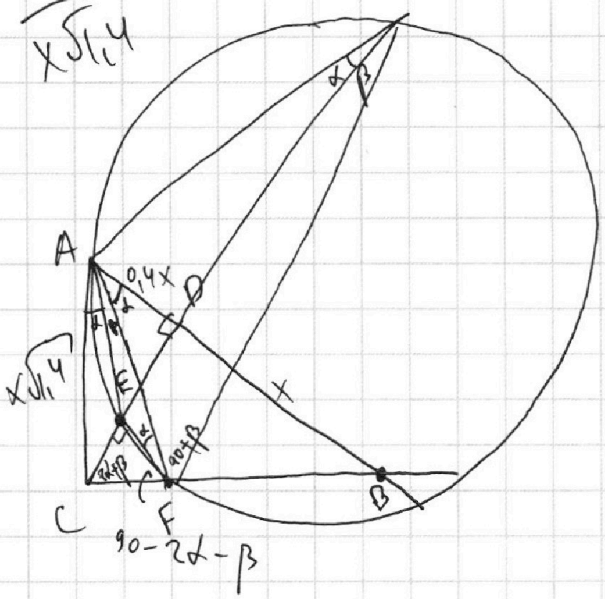
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

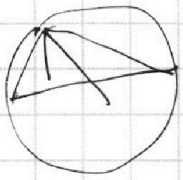
$\frac{ED}{AB}$ $\frac{ED}{0,4x} = \frac{CF}{x\sqrt{1,4}}$



$AC^2 = 1,4x^2$

$\frac{CE}{CF} = \frac{0,4}{\sqrt{1,4}}$

$\frac{ED}{CF} = \frac{0,4}{\sqrt{1,4}}$



~~$90-2\alpha-\beta = 180-\alpha-\beta$~~

$180-2\alpha-2\beta-90+2\alpha+\beta$

$\frac{CE}{CF} = \frac{1}{\sqrt{1,4}}$

$\frac{ED}{CE}$

$\frac{EF}{CE} = CB$ $\frac{CE}{CF} = \frac{1}{\sqrt{1,4}}$

$CE = CF = \frac{CF^2}{\sqrt{1,4}}$

$tg(\alpha+\beta) = \frac{CF}{x\sqrt{1,4}}$

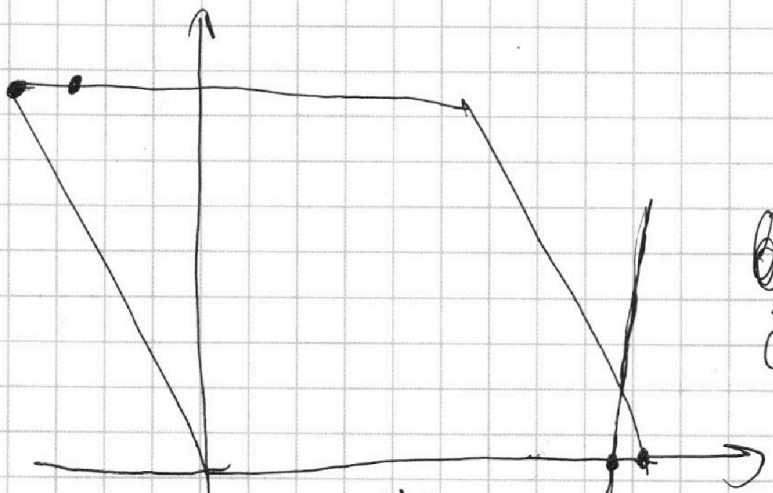
$CF = x\sqrt{1,4}\, tg(\alpha+\beta)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



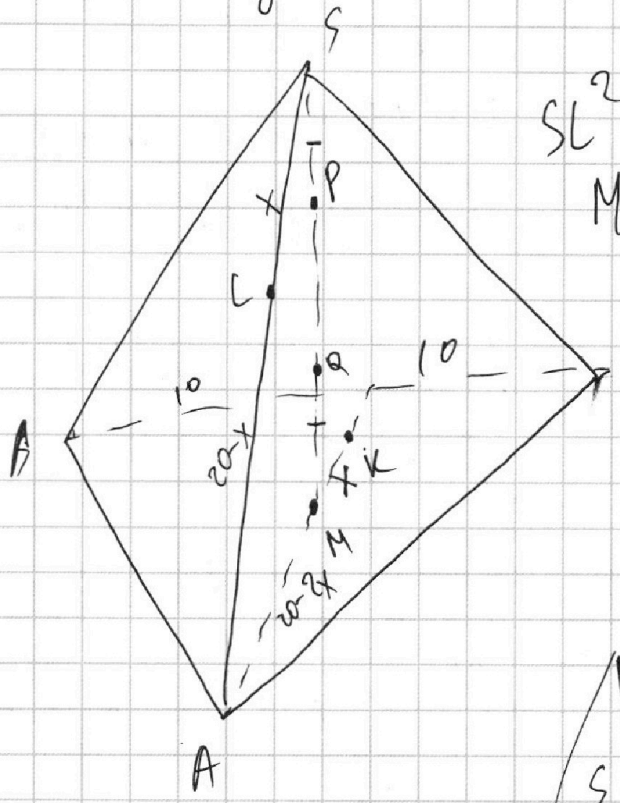
$b^2 = l^2 + a^2 - 2al\cos\alpha$

$c^2 = l^2 + a^2 + 2al\cos\alpha$

$b^2 + c^2 = 2l^2 + 2a^2$

$l^2 = \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{2}$

$l_a^2 l_b^2 l_c^2 = \frac{(b^2+c^2+200)(100+b^2/2c^2)}{8}$



$SL^2 = SP \cdot SQ$

MK^2

$SL = MK$ $10 - 2X$

l^2 $20 - 2X$

$20 - 2X = 2l$

$l = 10 - X$

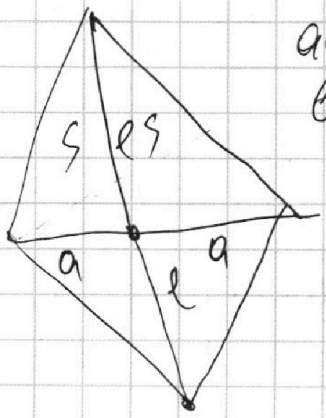
1

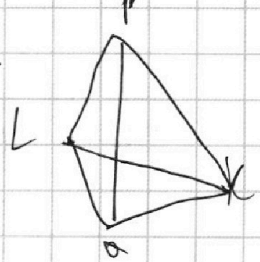
$al\sin\alpha = 180$

$bl_2\sin\beta =$

$al\sin\alpha = 180$

$l\sin\alpha = 90$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{CE}{ED} = \frac{CF}{FB}$

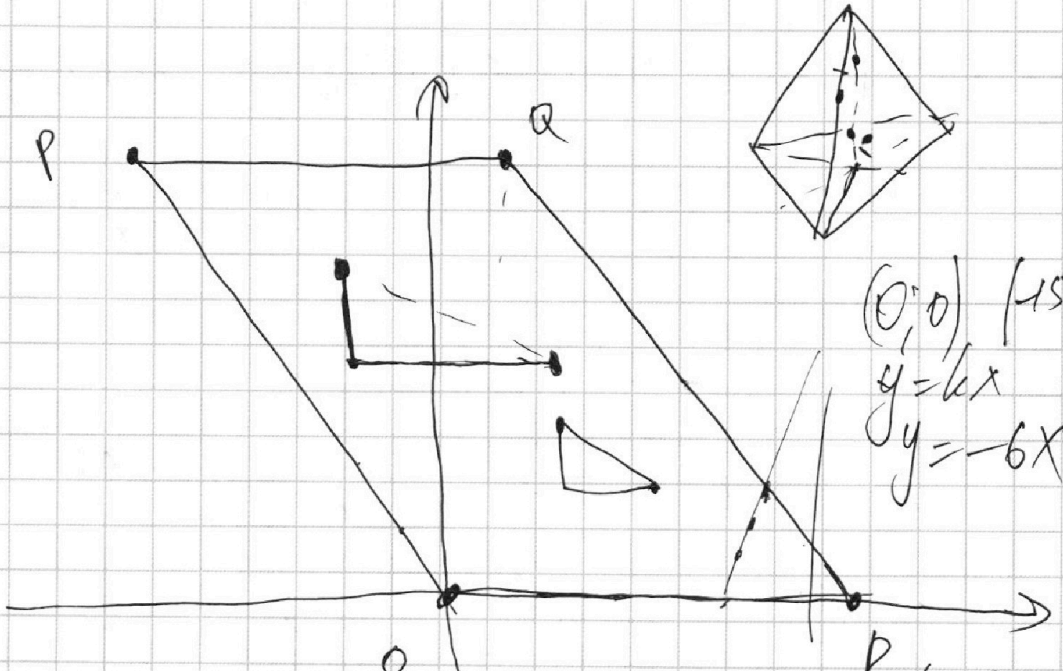
$\frac{CE}{CF} = \frac{0,4}{\sqrt{1,4}}$

$CE\sqrt{1,4} = CF\,0,4$

$CE = y$

$CF = \frac{\sqrt{1,4}\,y}{0,4}$

$CF \cdot 0,4 =$



$(0;0)\ (15;90)$

$y = kx$

$y = -6x$

$y_B = kx_1 + b$

$y_1 = kx_1 + b$

$y_2 = kx_2 + b$

$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$

$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$

$6(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_1) = 48$

$(x_2 - x_1)(6 + k) = 48$

$x_2 - x_1 = 1$

$6 + k = 48 \quad k = 42$

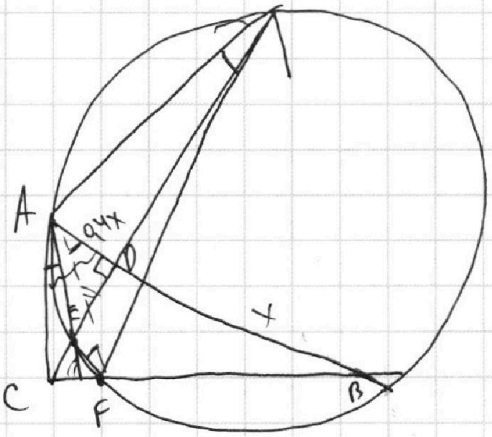
$y = 42x + b$

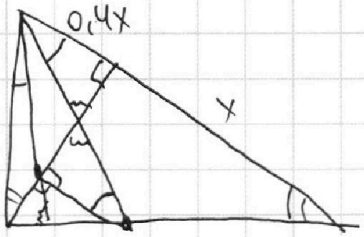
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



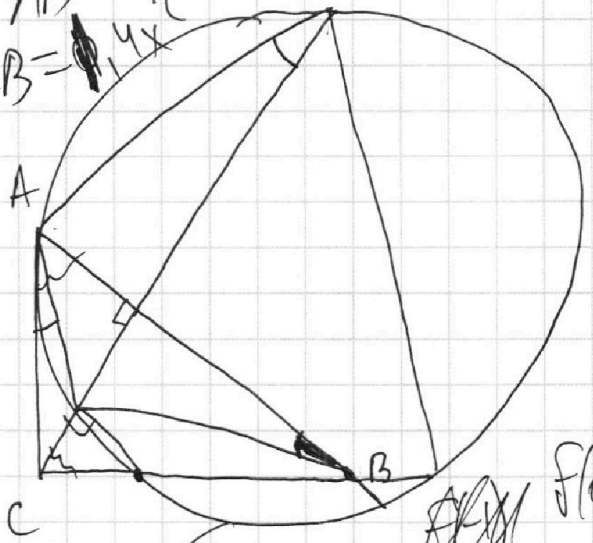


$AC^2 = CE \cdot CX$

$\cos\alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$

$AC^2 = AD \cdot AB = 0{,}4x^2$

$AC = x\sqrt{0{,}4}$



$CE \cdot CX = CF \cdot CY$

$\frac{AC \cdot AD}{CE \cdot CF} = \frac{x^2 \cdot 0{,}4 \cdot \sqrt{0{,}4}}{CE \cdot CF}$

$AC^2 = CE \cdot CX = CF \cdot CY$

$x\sqrt{1{,}4}$

$f(0) = -16$
$f(1) = 2$

$3a^5 + 15a - 16$ $15a^4 + 15$

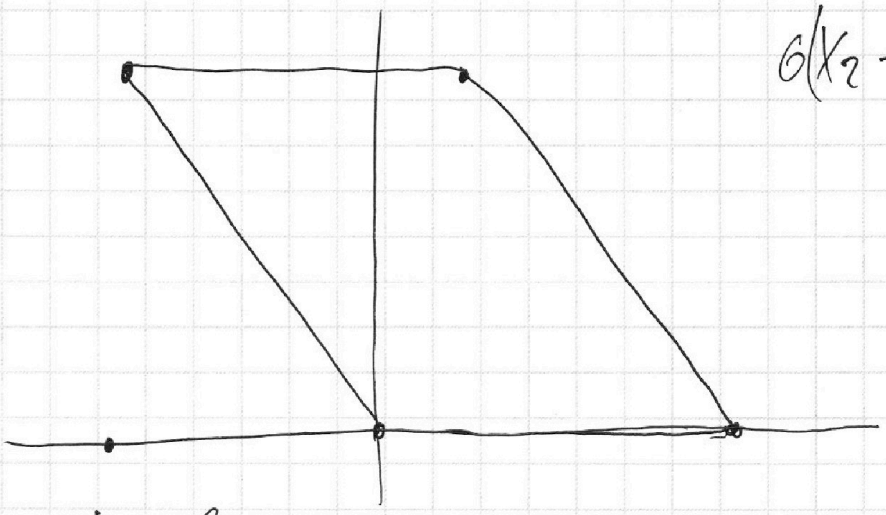
$3b^5 + 15b + 16$ $15b^4 + 15$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$6(x_2-x_1)+y_2-y_1=48$

$y=kx+b$

$y_1=kx_1+b$

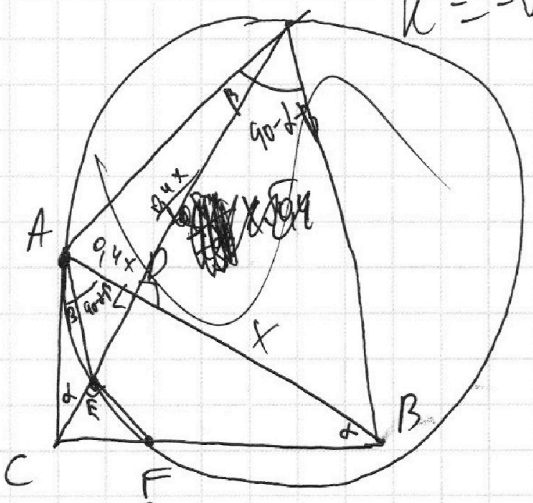
$y_2=kx_2+b$

$6x_2-6x_1+kx_1+b-kx_2-b=48$

$(x_2-x_1)(6-k)=48$

$6-k=48$

$k=-42$



$\operatorname{tg}\beta=\frac{0,4x}{?}$

$?=\frac{0,4x}{\operatorname{tg}\beta}$

$0,4x^2=0,4x\operatorname{tg}\beta$

$0,4x\cdot x$

$\frac{0,4x}{\operatorname{tg}\beta}$

$\frac{0,4x}{\operatorname{tg}\beta}=x\sqrt{0,4}$

$\operatorname{tg}\beta=\sqrt{0,4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}-\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-\frac{-a+b+c}{2}\right)=$$

$$=\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-(b-c))(a+(b-c))}{2^4}=$$

$$(b+c+a)(b+c-a)(a+(b-c))(a-(b-c))=$$

$$=(b^2+2bc+c^2-a^2)(a^2-b^2+2bc-c^2)$$

$$m=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$$

$$4m=2b^2+2c^2-a^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(x_2 - x_1)(6+k) = 48$

$k = 42 \Rightarrow y = 42x + b$

$y = 0$

$y =$

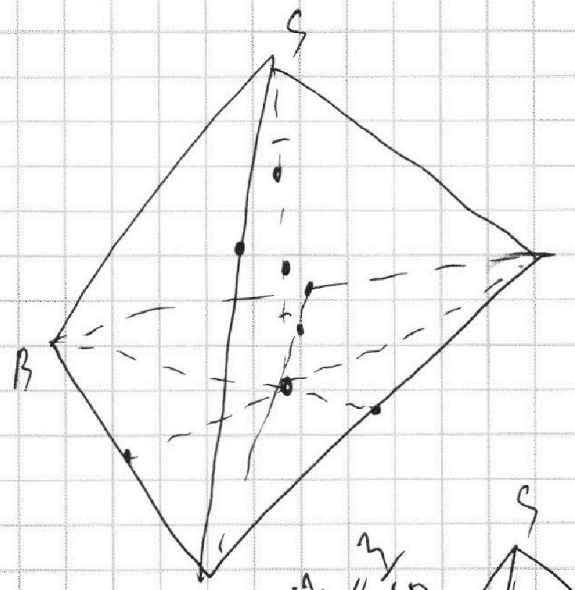
$y = kx + b$

$14k + b = 0$

$2 = 90k + b$

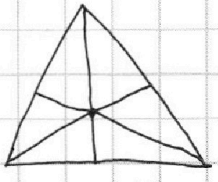
$(14; 0)$

$(2; 90)$



$SP = MQ$

S_{ABC}

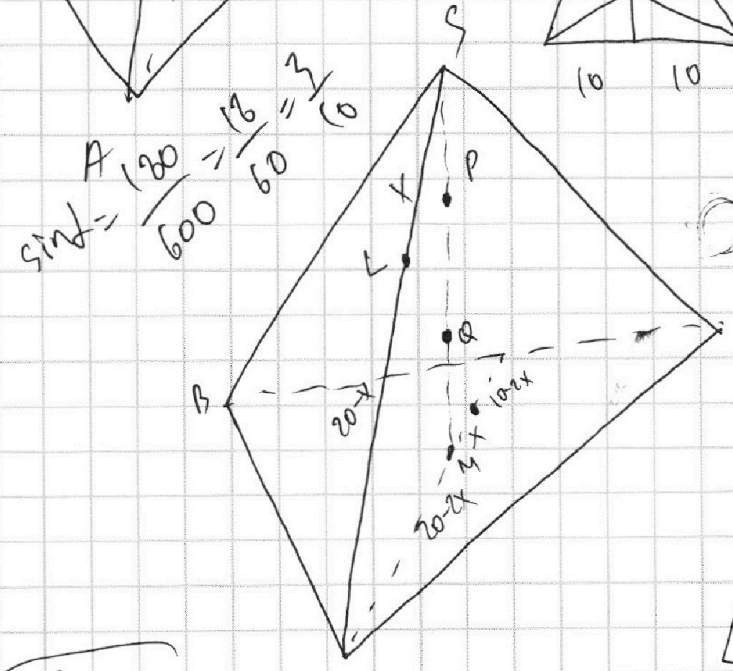


$a^1 = \frac{a}{2}$

$2a^{12} = 2 \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$

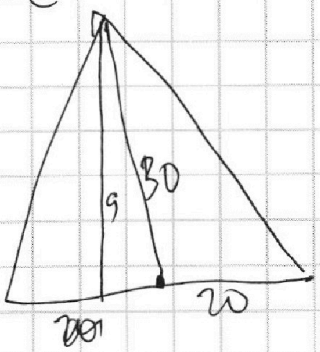
$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}}{2} =$

$= \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$



$\sin\alpha = \frac{120}{600} = \frac{16}{60} = \frac{3}{10}$

$m = 30 - 3x$



$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2}}$

$S = 30 \cdot 20 \sin\alpha = 600 \sin\alpha$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

⑥ Расс-м такие A, B, где $x_2 > x_1$. Пусть они лежат на прямой $y = kx + b$

тогда $y_1 = kx_1 + b$

$y_2 = kx_2 + b$

$6(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_1) = 48$

$(6 + k)(x_2 - x_1) = 48$

1) $x_2 - x_1 = 1 \Rightarrow k = 42$

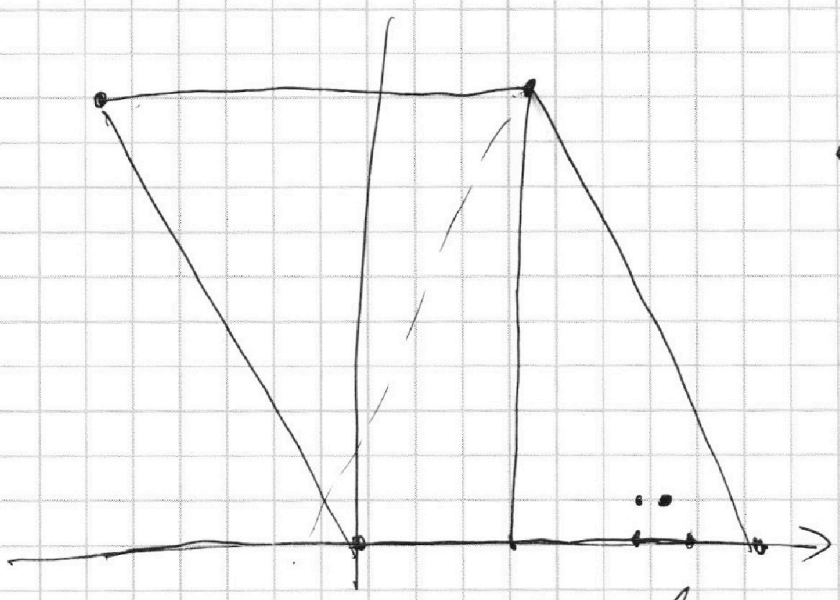
$x_1 = 0, x_2 = 1 \Rightarrow$ точки $(0; 0)$ $(1; 42)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1$

$y = 42x + b$

$Q; 90$

$90 = 84 + b$

$b = +6$

$y = 42x + 6$

$y =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

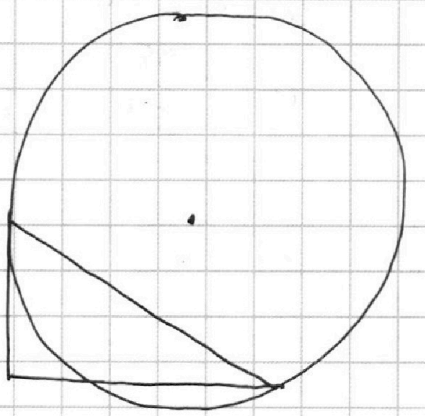
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$\sin x = t$ ~~$\arcsin t = x$~~

~~$\sin\cos x$~~ $\arccos(\sin x)$

~~$10\arccos(\sin$~~ $b^4 - b^4 + b^4$



$\frac{CE}{CO} = \frac{CF}{CB}$

$\frac{a^5+b^5}{a+b}$

$a^5+0\cdot a^4+0\cdot a^3+0\cdot a^2+0\cdot a+b^5 \;\big|\; a+b$

$-a^5-a^4b$ — $a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$

$a^4b+0\cdot a^3$

$-a^4b-a^3b^2$

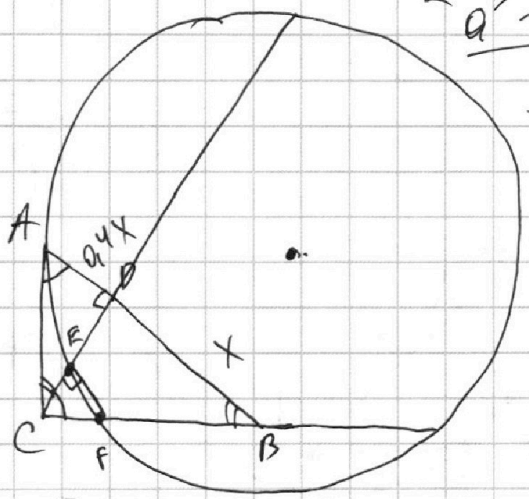
$a^3b^2+0\cdot a^2$

$-a^3b^2-a^2b^3$

$a^2b^3+0\cdot a$

$-a^2b^3-ab^4$

ab^4+b^5



$a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4+5=0$

$ab(a^2+b^2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab : 2^{6}\ 3^{13}\ 5^{-11}$

$bc : 2^{14}\ 3^{21}\ 5^{-13}$

$ac : 2^{16}\ 3^{25}\ 5^{-20}$

$a^3b^3c^2 \quad a^2b^2c^2 : 2^{36}\ 3^{59}\ 5^{52}$

$abc : 2^{18} \cdot 5^{-26} \cdot 3^{29}$

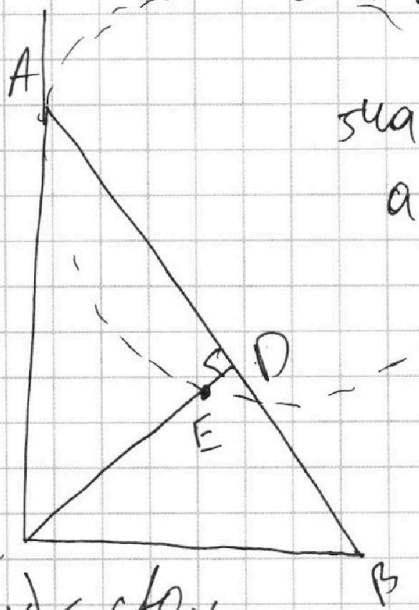
$\frac{5}{\frac{45}{7}} = \frac{35}{45} = \frac{7}{9}$

$\frac{CD}{CF} = \frac{CB}{CD}$

$\frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB}$

$54a + 35 = 0$

$a = -\frac{35}{54}$



$\frac{AB}{BD} = 1{,}4$

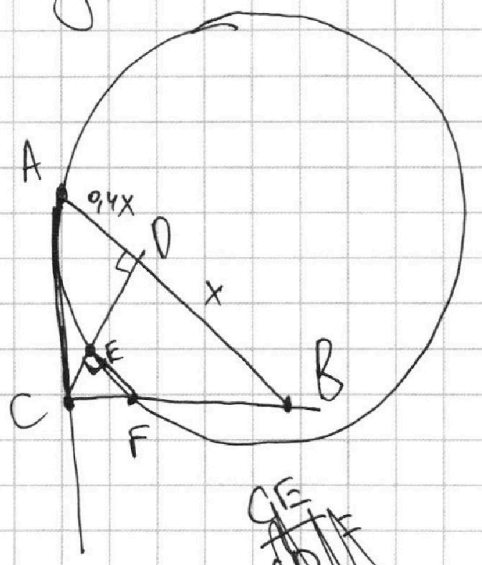
$AB = 1{,}4\,BD$

$\frac{CE}{CF} = \frac{CB}{CD}$

$tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = ctg\,x$

$CE \cdot CD = CF \cdot CB$

$\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB}$



$\frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB}$

$CB = CD$