



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

Дано, что т.к. есть пунктирные ненапечатанные
противоположные, то среди делителей a, b, c
не должны быть других чисел, кроме 2, 3, 5.
Нужно представить ~~a, b, c~~ a, b, c след. образом:

$$a_1 = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$$

$$b_1 = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$$

$$c_1 = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$$

Возьмем из условий наименее сложное

$$a_1 + b_1 \geq 9$$

$$a_1 + c_1 \geq 19 \quad \Rightarrow \quad 2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 42$$

$$b_1 + c_1 \geq 14$$

$$\downarrow \quad a_1 + b_1 + c_1 \geq 21$$

$$a_2 + b_2 \geq 10$$

$$b_2 + c_2 \geq 13 \quad \Rightarrow \quad 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 41$$

$$a_2 + c_2 \geq 18$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 20,5$$

$$a_3 + b_3 \geq 10$$

$$b_3 + c_3 \geq 13 \quad \Rightarrow \quad 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 53$$

$$a_3 + c_3 \geq 30$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 26,5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Зададим, что т.к. $a, b \in \mathbb{N}$ то
значения, то степень у них может
быть тоже натуральными, а значит

$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 21$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21 \Rightarrow \text{Найденное значение } a_1 = 21$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 24 \quad \text{знач } abc = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$a_1 + b_1 + c_1 = 21$ и выполнение всех условий
достигается при $a_1 = 1$

$$b_1 = 2$$

$$c_1 = 12$$

$a_2 + b_2 + c_2 = 21$ и выполнение всех условий
достигается при $a_2 = 8$ $b_2 = 2$ $c_2 = 11$

Последний раз надо, что ac делится на $2 \cdot 3 \cdot 5$,

$a_3 + c_3 \geq 30 \Rightarrow \text{Найденное } a_3 + c_3 = 30 \text{ и выполнение всех условий достигается при } a_3 = c_3 = 15 ; b_3 = 0 \Rightarrow$

\Rightarrow наименьшее значение $abc = 2 \cdot 3 \cdot 5 =$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \text{ om } -\pi \text{ go } 0:$$

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} + x \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow 5(\frac{\pi}{2} + x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = -2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$4) \text{ om } 0 \text{ go } \pi:$$

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$5(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi = 6x$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$5) \text{ om } \pi \text{ go } 2\pi:$$

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x - \frac{3\pi}{2}$$

$$5(x - \frac{3\pi}{2}) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = 8\pi$$

$$x = 2\pi$$

$$\text{Омствим: } x_1 = -3\pi$$

$$x_2 = -\frac{4\pi}{3}$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{2}$$

$$x_4 = \frac{\pi}{3}$$

$$x_5 = 2\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

решите уравнение $\arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$
используя принцип заменяем в промежутке $[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow -3\pi \leq x \leq 2\pi$$

рассмотрим как расщепляется $\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$ в зависимости от x :

1) от -3π до -2π :

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{5\pi}{2} + x \Rightarrow$$
 решим уравнение:
 $5(\frac{5\pi}{2} + x) = x + \frac{\pi}{2}$

$$4x = -12\pi$$

$$x = -3\pi$$

2) от -2π до $-\pi$:

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = -x - \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5(-x - \frac{3\pi}{2}) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = -8\pi$$

$$x = -\frac{4\pi}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если изогнуть касир. можно ли сделать
будет боковину, то как это можно не выиграть
этот прыжок, так как не пересечет обе окн.

Из подобия $\triangle O_1BA$ и $\triangle O_2CA$ можно найти
координаты A :

$$m(A) : \frac{O_1A}{O_2A} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow A\left(\frac{18}{5}, 0\right)$$

$$\cos \angle BO_1A = \frac{O_1B}{O_1A} = \frac{5}{6} \Rightarrow B_x = \frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{5}{2}$$

$$B_y = \sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow \text{косар. касир. можно}$$

$$\frac{B_y - A_y}{B_x - A_x} = \frac{\frac{\sqrt{11}}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{-20}{\sqrt{11}} = -\frac{a}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{40}{\sqrt{11}}$$

• в второй задаче касир. можно сидеть,
также можно другое значение $\Rightarrow \frac{20}{\sqrt{11}} = -\frac{a}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{-40}{\sqrt{11}}$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \left(-\frac{40}{\sqrt{11}}, \frac{40}{\sqrt{11}}\right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

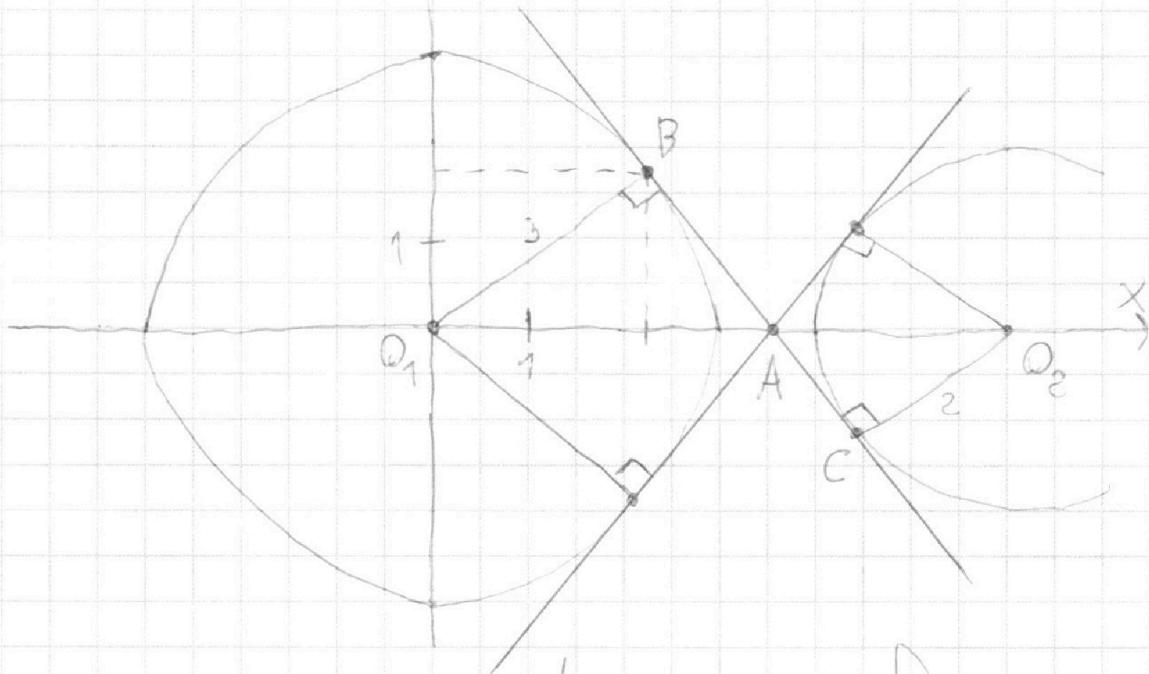
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \text{ прямая } y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} \\ ((x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \quad \Downarrow \quad \rightarrow y^2 + (x-6)^2 = 2^2 \quad \uparrow y \end{cases}$$



Пое, что параллель в момент быть
предыдущим что мы можем сделать
принципиально вверху-внизу. и решить будем
какой прямой пересекает обе окружности.
На рисунке изображена прямая линия
которая прямая касается окружностей.



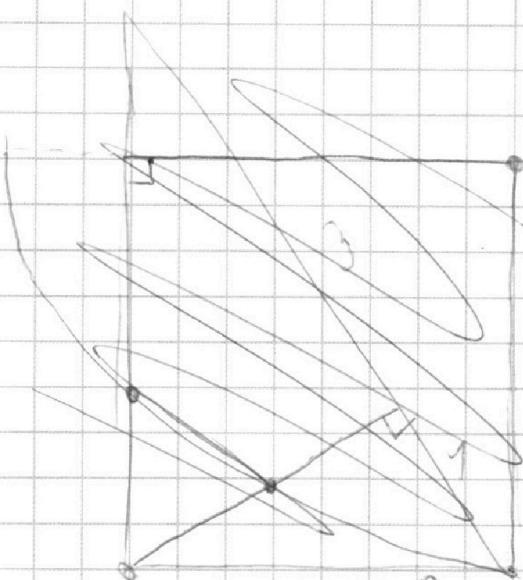
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №5

первое равенство преобразуется в

$$\log_3^4 x + \frac{4}{2} \log_3 x + 8 = 0 \Rightarrow \log_3^5 x + 8 \log_3 x + \frac{4}{2} = 0$$

второе в

$$\log_3^4 5y - \frac{4}{2} \log_3 5y + 8 = 0 \Rightarrow \log_3^5 5y + 8 \log_3 5y - \frac{4}{2} = 0$$

делаем преобразование $\begin{cases} t = \log_3 x \\ k = \log_3 5y \end{cases}$

$$t^5 + k^5 + 8(t+k) = 0 \Rightarrow$$
 комодину знаемо t

сомножаем и мы сюда заложим k и это $t = -k$

$$8 \log_3 x + 8 \log_3 5y = 0$$

$$\log_3 x \cdot 5y = 0 \Rightarrow 5xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$A_y = 0 \Rightarrow 0 = -3A_x + 33 \Rightarrow A_x = 11$$

$$B_y = 42 \Rightarrow 42 = -3B_x + 33 \Rightarrow B_x = -3$$

$$\Rightarrow A(11; 0); B(-3; 42)$$

$y = -3x + 33$ ⇒ если целый x , то целый
 y

$$\frac{a^2 x^2}{4} - \frac{3abx}{2} + \frac{9b^2}{4} + x^2 = 9$$

$$x^2 \left(\frac{4+a^2}{4} \right) - x \cdot \frac{3ab}{2} + \frac{9b^2}{4} - 9 = 0$$

$$D = 0 = \frac{9a^2b^2}{4} - \frac{(4+a^2)(9b^2-36)}{4}$$

$$9a^2b^2 - 36b^2 - 9a^2b + 144 = 0$$

$$4 - b^2 - a^2 = 0$$

$$x^2 \left(\frac{4+a^2}{4} \right) - x \cdot \left(\frac{3ab}{2} + 12 \right) + \frac{9b^2}{4} + 32 = 0$$

$$D = 0 = \frac{9a^2b^2}{4} + 836ab + 144 - \frac{(4+a^2)(9b^2+128)}{4}$$

$$36ab + 144 - 9b^2 - 32a^2 - 128 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$$

$$\alpha_1 + b_1 \geq 9$$

$$\alpha_1 + b_1 \geq 9$$

$$\alpha_2 + b_2 \geq 10$$

$$b_1 + c_1 \geq 14$$

$$\alpha_3 + b_3 \geq 10$$

$$\alpha_1 + c_1 \geq 19$$

$$\frac{\tan \angle}{\tan \beta} = 3$$

$$2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 42$$

$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 21$$

A

D

B

E

F

G

$$\log_3^4 x + \frac{1}{2} \log_3 x + 8 = 0$$

$$\Delta y = -3\Delta x + 33$$

$$\log_3^4 5y + \frac{1}{2} \log_3 5y + 8 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \geq 5 \arcsin \sin x \geq \frac{5\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \cos t$$

~~$$5(\frac{\pi}{2} - x) =$$~~

$$x = \pm t + 2\pi n$$

~~$$5(\frac{\pi}{2} - t) = 2\pi n + t + \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$5(\frac{\pi}{2} - t) = -t + 2\pi n + \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$2\pi = 2\pi n + 6t$$~~

~~$$2\pi = 2\pi n + 4t$$~~

~~$$-6t = 2\pi(n-1)$$~~

~~$$-4t = 2\pi(n-1)$$~~

~~$$t = -\frac{\pi n}{3}$$~~

~~$$t = -\frac{\pi k}{2}$$~~

$$5(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$

~~$$-n = 0 :$$~~

~~$$2\pi = 6x$$~~

~~$$5(\frac{\pi}{2} + x) = x + \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$x = \frac{\pi}{3}$$~~

~~$$4x = -2\pi$$~~

~~$$\pi = 2\pi$$~~

~~$$x = -\frac{\pi}{2}$$~~

$$5(\frac{\pi}{2} + x - 2\pi) = x + \frac{\pi}{2}$$

~~$$-2\pi - \pi :$$~~

~~$$4x = 8\pi$$~~

~~$$5(-x + \frac{\pi}{2} - 2\pi) = x + \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$x = 2\pi$$~~

~~$$6x = -8\pi$$~~

~~$$x = -\frac{4\pi}{3}$$~~

~~$$-3\pi - 2\pi :$$~~

~~$$5(\frac{\pi}{2} + x + 2\pi) = x + \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$4x = -12\pi$$~~

~~$$x = -3\pi$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

324

$$\begin{array}{r} 99 \\ + 125 \\ \hline 36 \end{array}$$

y

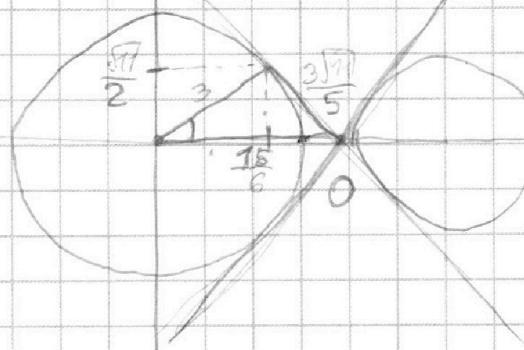
$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$$

36

36

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 5 \\ \hline 357 \end{array}$$

324-



$$\left(-\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}\right)^2 + x^2 = 9$$

$$\left(-\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}\right)^2 + x^2 - 12x + 36 = 9$$

$$\frac{a^2x^2}{4} - \frac{3abx}{2} + \frac{9b^2}{4} + x^2 = 9$$

$$\log_{10} x - 8 = -\frac{1}{2} \log_3 x$$

$$\text{dy} \quad \text{dy} = -42 - 42$$

$$\Delta x: -20 - 20$$

$$-\log_3 x + 8 \log_3 x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ - 5 \\ \hline 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 108 \\ - 45 \\ \hline 63 \end{array}$$

$$= \frac{11}{70}$$

$$\log_3 x + 8 \log_3 x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\log_3 x + 8 \log_3 x + \frac{1}{2} = 0$$

$$x^5 + y^5 + 8(x^4 + y^4) = 0$$

$$x^5 + y^5 + 8xy^4 = 0$$



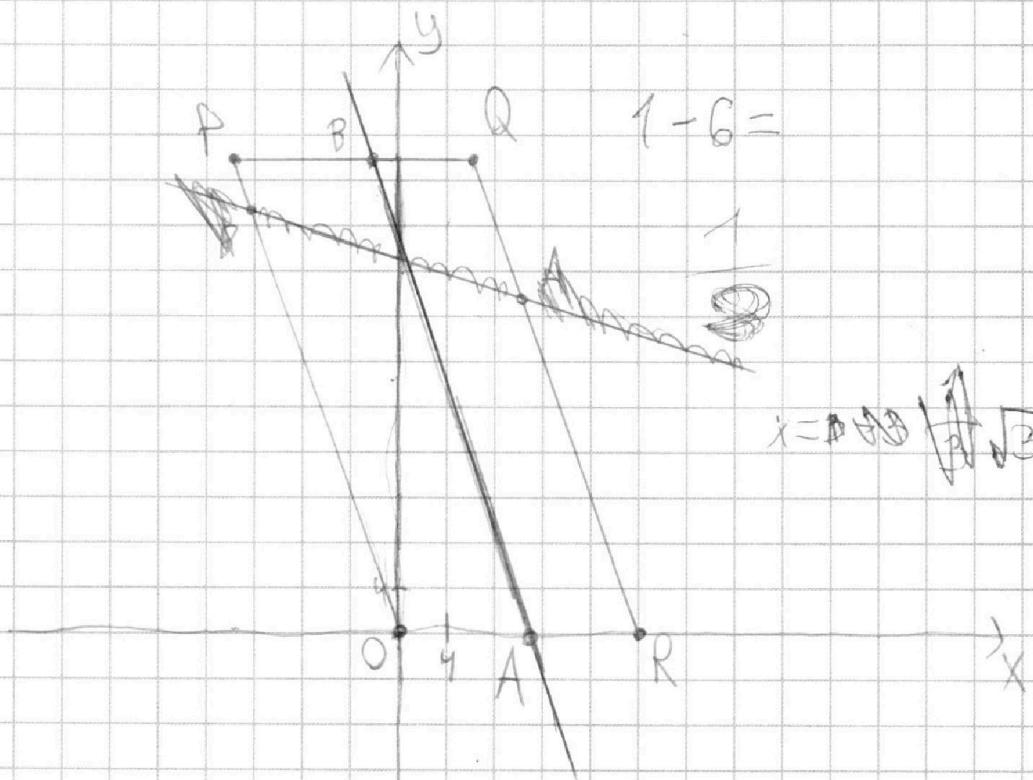
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Уравнение $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ можно представить в виде $\Delta y = -3\Delta x + 33$, а
зная что у них удовлетворяют все (помимо)
момчи, лежащие на прямой
 $y = -3x + 33$, мы видим ее на рисунке.

Найдем координаты A и B - momchies пересечения прямой с OR и PQ соответственно.