c= a+b+c≥38 a+b≥14 b+c≥18 a+c≥43 c=11 b=4 a=7

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

a+b=7 b+c=13 a+c=14 2^{17} a+b+c≥22 a+b≥11 b+c≥15 a+c≥17

a+b+c=17

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

c=10 a=4 b=3

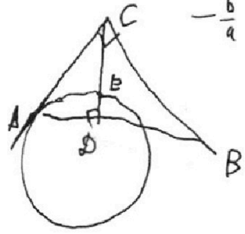
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.



5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4.$$

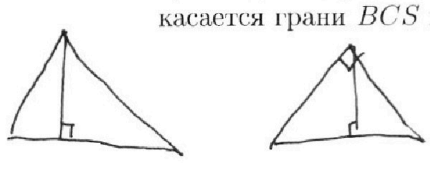
Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.



3·0,13=

0,3·13

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

лист 1 из 1 по ней

$ab \vdots 2^{7}3^{11}5^{14}$

$bc \vdots 2^{13}3^{15}5^{18} \Rightarrow ab\cdot bc\cdot ac \vdots 2^{7}\cdot3^{11}\cdot5^{14}\cdot2^{13}\cdot3^{15}\cdot5^{18}\cdot2^{14}\cdot3^{17}\cdot5^{43} \Rightarrow$

$ac \vdots 2^{14}3^{17}5^{43}$

$(abc)^2 \vdots 2^{34}\cdot3^{43}\cdot5^{75} \Rightarrow$ (т.к. $16\cdot2<34$; $21\cdot2<43$; $37\cdot2<75$)

$abc \vdots 2^{17}\cdot3^{22}\cdot5^{38}$ (★) $\cancel{\Rightarrow abc \geq 2^{17}\cdot3^{22}\cdot5^{38}}$

Теперь приведём пример, когда $abc = 2^{17}\cdot3^{22}\cdot5^{43}$

$a = 2^{4}\cdot3^{7}\cdot5^{22}$

$b = 2^{3}\cdot3^{4}$

$c = 2^{10}\cdot3^{11}\cdot5^{21}$

$ab \vdots 2^{7}\cdot3^{11}5^{22} \vdots 2^{7}\cdot3^{11}\cdot5^{14}$

$bc \vdots 2^{13}\cdot3^{15}\cdot5^{21} \vdots 2^{13}\cdot3^{15}\cdot5^{18}$

$ac \vdots 2^{14}\cdot3^{18}\cdot5^{43} \vdots 2^{14}\cdot3^{17}\cdot5^{43}$.

С другой стороны стороны, $abc \geq 2^{17}\cdot3^{22}\cdot5^{43}$.

Почему? Потому что из (★) следует, что степень вхождения в abc 2 двойки ≥ 17, степень вхождения тройки ≥ 22.

А степень вхождения пятерки ≥ 43, т.к. по условию $ac \vdots 5^{43}$.

Поэтому $abc \vdots 2^{17}\cdot3^{22}\cdot5^{43} \Rightarrow abc \geq 2^{17}\cdot3^{22}\cdot5^{43}$.

Ответ: $2^{17}\cdot3^{22}\cdot5^{43}$

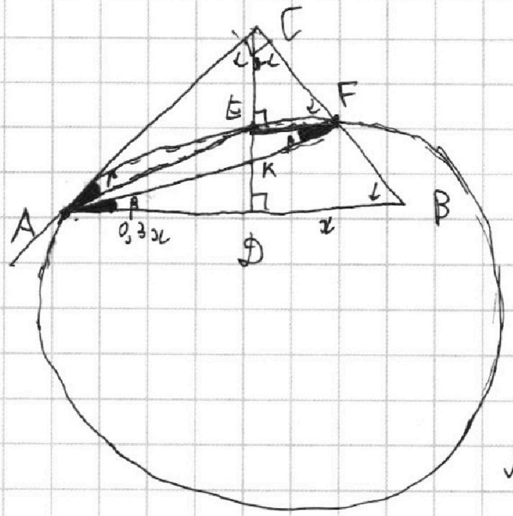
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Лист 1 из 1 по пей



Пусть, $BD=x$, тогда, $AB=1{,}3x \Rightarrow AD=1{,}3x-x=0{,}3x$

$EF \parallel AB \Rightarrow EF \perp CD$ (т.к $AB \perp CD$)

Т.к AC – касательная, $\angle CAE=\angle EFA$.

Пусть, $K=AF\cap ED$

$\angle EFA=\angle FAB$ (т.к $EF\parallel AB$ – накрест лежащие)

Пусть, $\angle CAE=\beta=\angle FAB=\angle AFE$

Пусть, $\angle ACD=\alpha$

$\angle BCD=90-\alpha$. Из $\triangle CDB$ $\angle CBD=90-(90-\alpha)=\alpha$. Т.к ACB прямоуг. $\triangle$ с высотой:

$CD^2=AD\cdot BD=0{,}3x^2$; $\boxed{CD=x\sqrt{0{,}3}}$. По т. Пифагора для $\triangle ADC$:

$AC=\sqrt{0{,}09x^2+0{,}3x^2}=\sqrt{0{,}39x^2}$; $\boxed{AC=x\sqrt{0{,}39}}$

Из т. Пифагора для $\triangle CDB$: $CB=\sqrt{0{,}3x^2+x^2}=\sqrt{1{,}3x^2}$; $\boxed{BC=x\sqrt{1{,}3}}$

$\triangle ACE \sim \triangle ABF$ (по 2-м углам: $\angle ACE=\angle ABC=\alpha$; $\angle CAE=\angle BAF=\beta$) $\Rightarrow$

$\frac{AC}{AB}=\frac{CE}{BF}$; $\frac{CE}{BF}=\frac{x\sqrt{0{,}39}}{1{,}3x}$; $\boxed{\frac{CE}{BF}=\frac{\sqrt{0{,}39}}{1{,}3}}$ $(\bigstar)$

$\triangle CEF \sim \triangle CDB$ (т.к $EF\parallel BD$) $\Rightarrow$

$\frac{CE}{CD}=\frac{CF}{BC}$; $\frac{CE}{x\sqrt{0{,}3}}=\frac{x\sqrt{1{,}3}-BF}{x\sqrt{1{,}3}}$; $\frac{CE}{\sqrt{0{,}3}}=\frac{x\sqrt{1{,}3}-BF}{\sqrt{1{,}3}}$

$CE\cdot\sqrt{1{,}3}=x\sqrt{1{,}3}\cdot\sqrt{0{,}3}-BF\cdot\sqrt{0{,}3}$. Из $(\bigstar)$: $BF=\frac{CE\cdot 1{,}3}{\sqrt{0{,}39}}$

$CE\cdot\sqrt{1{,}3}=x\sqrt{1{,}3}\cdot\sqrt{0{,}3}-\frac{CE\cdot 1{,}3\cdot\sqrt{0{,}3}}{\sqrt{0{,}39}}$; $CE\cdot\sqrt{0{,}39}\cdot\sqrt{1{,}3}=x\sqrt{1{,}3}\cdot\sqrt{0{,}3}-CE\cdot 1{,}3\cdot\sqrt{0{,}3}$

$\underset{CE\cdot\sqrt{0{,}3}\cdot\sqrt{1{,}3}}{\underset{\parallel}{CE\cdot\sqrt{0{,}39}}}=x\sqrt{0{,}3}-CE\cdot\sqrt{1{,}3}\cdot\sqrt{0{,}3}$; $CE\cdot\sqrt{1{,}3}=x-CE\cdot\sqrt{1{,}3}$

$2CE\cdot\sqrt{1{,}3}=x$; $\boxed{CE=\frac{x}{2\sqrt{1{,}3}}}$

$\triangle ACD \sim \triangle CFE$ (по 2-м углам: $\angle ACD=\angle CFE$; $\angle ADC=\angle CEF=90°$) $\Rightarrow$ $\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}=k^2=\left(\frac{AD}{CE}\right)^2$.

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}=\left(\frac{0{,}3x\cdot 2\sqrt{1{,}3}}{x}\right)^2=(0{,}3\cdot 2\sqrt{1{,}3})^2=0{,}09\cdot 4\cdot 1{,}3=0{,}36\cdot 1{,}3=0{,}468$.

Ответ: 0,468.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

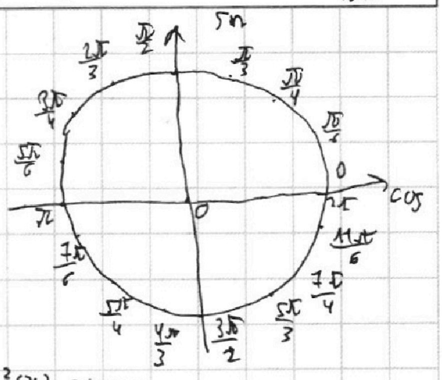
Лист № 1 из 1 по ней

$$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{5}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{5}\right) = \sin x$$



$\sin(3x) = 3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x)$ $\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cdot\cos(x)$

$\cancel{\sin(3x}$ $\sin(5x) = \sin(3x+2x) = \sin(3x)\cdot\cos(2x) + \cos(3x)\cdot\sin(2x) =$

$(3\sin(x)\cdot\cos^2(x) - \sin^3(x))(\cos^2(x) - \sin^2(x)) + (\cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cdot\cos(x))\cdot 2\sin(x)\cdot\cos(x)$

$= \boxed{3\sin(x)\cdot\cos^4(x)} - \sin^3(x)\cdot\cos^2(x) - 3\sin^3(x)\cdot\cos^2(x) + \sin^5(x)$

$\boxed{+2\sin(x)\cdot\cos^4(x)} - 6\sin^3(x)\cos^2(x) = 5\sin(x)\cdot\cos^4(x) + \sin^5(x) - 10\sin^3(x)\cdot\cos^2(x) =$

$5\sin(x)\,(1-\sin^2(x))^2 + \sin^5(x) - 10\sin^3(x)\,(1-\sin^2(x)) =$

$5\sin(x)(1 + \sin^4(x) - 2\sin^2(x)) + \sin^5(x) - 10\sin^3(x) + 10\sin^5(x) =$

$5\sin(x) + 5\sin^5(x) - 10\sin^3(x) + 11\sin^5(x) - 10\sin^3(x) =$

$16\sin^5(x) - 20\sin^3(x) + 5\sin(x)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

лист $1/3$ по ней

~~$\{ x+3ay$~~

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 & (1)\\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 & (2)\end{cases}$$

1-е уравнение однозначно задаёт x через y: $x=7b-3ay$ $\Rightarrow$ чтобы система имела 4 решения, 2-е уравнение системы должно иметь 4 решения, а оно равносильно:

$$\left[\begin{array}{ll} x^2+14x+y^2+45=0 & (\mathrm{I})\\ x^2+y^2-9=0 & (\mathrm{II})\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ (I) и (II) должны иметь по 2 корня, и все эти 4 корня должны быть различными.

(I): $x^2+14x+y^2+45=0$

$D=196-4y^2-180=16-4y^2$

$x_{1,2}=\dfrac{-14\pm2\sqrt{4-y^2}}{2}$

$\boxed{x_{1,2}=-7\pm\sqrt{4-y^2}}$

$16-4y^2>0$

$4-y^2>0$

$y^2<4$; $\boxed{-2<y<2}$

(II): $x^2+y^2-9=0$

$x^2=9-y^2$

$\boxed{x=\pm\sqrt{9-y^2}}$

$9-y^2>0$

$y^2<9$

$\boxed{-3<y<3}$

Совпадение корней:

$-7+\sqrt{4-y^2}\neq\sqrt{9-y^2}$

$\sqrt{4-y^2}\neq\sqrt{9-y^2}+7$

$4-y^2\neq9-y^2+49+14\sqrt{9-y^2}$

$54+14\sqrt{9-y^2}\neq0$ — а это верно всегда

$-7-\sqrt{4-y^2}\neq\sqrt{9-y^2}$

$7+\sqrt{4-y^2}+\sqrt{9-y^2}\neq0$ — верно всегда.

$-7+\sqrt{4-y^2}\neq-\sqrt{9-y^2}$

$\sqrt{4-y^2}+\sqrt{9-y^2}\neq7$

~~$4-y^2+9-y^2+2$~~

$\sqrt{4-y^2}\neq7-\sqrt{9-y^2}$

$4-y^2\neq49+9-y^2-14\sqrt{9-y^2}$

$14\sqrt{9-y^2}\neq62$

$\sqrt{9-y^2}\neq\dfrac{31}{7}$

$9-y^2\neq\dfrac{961}{49}$; $y^2\neq9-\dfrac{961}{49}<0\Rightarrow$ верно всегда

$-7-\sqrt{4-y^2}\neq-\sqrt{9-y^2}$

$\sqrt{9-y^2}\neq7+\sqrt{4-y^2}$

$9-y^2\neq49+4-y^2+14\sqrt{4-y^2}$

~~$44+14\sqrt{4}$~~

$44+14\sqrt{4-y^2}\neq0$ — всегда верно

Значит, что если у нас получится 4 корня, то это действительно 4 различных корня.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

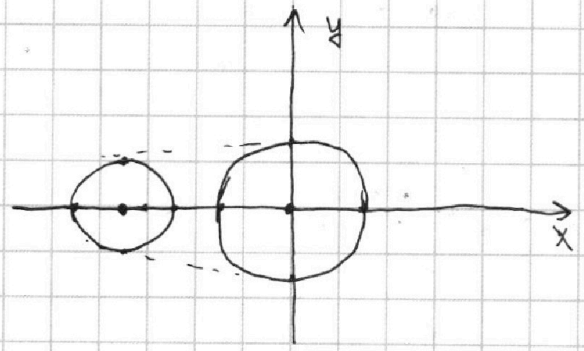
лист 2/3 по ней

~~Итак, у нас $\begin{cases}-2<y<2\\-3<y<3\end{cases} \Rightarrow \boxed{-2<y<2}$~~

1-е уравнение переписываем в виде:

Перепишем 2-е уравнение в виде $\left[\begin{array}{l}x^2+14x+y^2+45=0\\ x^2+y^2-9=0\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}(x+7)^2+y^2=2^2\\ x^2+y^2=3^2\end{array}\right.$ — окружность с центром $(-7;0)$ радиуса 2; — окружность с центром $(0;0)$ радиуса 3.



1-е: $x+3ay-7b=0$

$x+3ay=7b$

$y=\frac{7b-x}{3a}$ — прямая при $a\neq 0$

При $a=0$: $x=7b$ — пересекает окружности в 4 точках ~~при~~ ни при одном значении $x \neq$ $\boxed{a=0 \text{ не подходит}}$

Зафиксируем a. Тогда данное $y=\frac{-x}{3a}+\frac{7b}{3a}$ уравнение это прямые с фикс. угловым коэффициентом. Она должна иметь 4 точки пересечения с окружностями, т.е. 2 с перв. и 2 со второй.

Случаи, когда прямая с фикс. угловым коэф. имеет 2 точки пересечения с окружностью, ограничены случаями касания прямой с таким угл. коэф. с данной окружностью.

$x+3ay-7b=0$ Пусть, прямая ~~$y=kx+b$~~ касается

$-7\pm\sqrt{4-y^2}+3ay-7b=0$ ~~$y=k$~~ $y=kx+t$ касается окружности $x^2+y^2-9=0$,

тогда, ~~урав~~ система $\begin{cases}y=kx+t\\x^2+y^2-9=0\end{cases}$ имеет 1 решение $\Rightarrow$ у квадратного трехчлена

$x^2+(kx+t)^2-9=0$; $D=0$; $\quad x^2+k^2x^2+2ktx+t^2-9=0$;

$x^2(k^2+1)+x\cdot 2kt+t^2-9=0$; $\quad 4k^2t^2-4(t^2-9)(k^2+1)=0$

$k^2t^2+(9-t^2)(k^2+1)=0$. $\quad k^2t^2+9k^2-k^2t^2+9-t^2=0$

$9k^2+9-t^2=0$. $\quad t^2=9(k^2+1)$; $\quad t=\pm 3\sqrt{k^2+1}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Итак, прямая с угловым коэф. $k = -\frac{1}{3a}$ будет касаться 2-й окружности при свободном члене:

$$\left[\begin{array}{l} 3\sqrt{\frac{1}{9a^2}+1} \\ -3\sqrt{\frac{1}{9a^2}+1} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$-3\sqrt{\frac{1}{9a^2}+1} \le \frac{7b}{3a} \le 3\sqrt{\frac{1}{9a^2}+1}$$

$$-\frac{9}{7}\sqrt{\frac{1}{9a^2}+1} \le \frac{b}{a} \le \frac{9}{7}\sqrt{\frac{1}{9a^2}+1}.$$

$$\begin{cases} -\frac{9}{7}\sqrt{\frac{1}{9a^2}+1} \le \frac{b}{a} \\ \frac{b}{a} \le \frac{9}{7}\sqrt{\frac{1}{9a^2}+1} \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \frac{b}{a} \ge 0 \\ \frac{b^2}{a^2} \le \left(\frac{1}{9a^2}+1\right)\cdot\frac{81}{49} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \frac{b}{a} \le 0 \\ \frac{b^2}{a^2} \le \frac{81}{49}\cdot\left(\frac{1}{9a^2}+1\right) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \frac{b}{a} \ge 0 \\ b^2 \le \left(\frac{1}{9}+a^2\right)\frac{81}{49} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \frac{b}{a} \le 0 \\ b^2 \le \frac{81}{49}\left(\frac{1}{9}+a^2\right) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Такую же систему можно составить для второй окружности, и у системы из этих двух систем должны быть решения.

Для 2-й окружности:

$$\begin{cases} y = kx + t \\ x^2 + 14x + 49 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 + 14x + 49 + k^2x^2 + 2ktx + t^2 - 4 = 0$$

$$x^2(k^2+1) + x(2kt+14) + t^2 + 45 = 0$$

$D = 0$

$$4k^2t^2 + 56kt + 196 - 4(t^2+45)(k^2+1) = 0$$

$$k^2t^2 + 14kt + 49 - k^2t^2 - 45k^2 - t^2 - 45 = 0$$

$$14kt - 45k^2 - t^2 + 4 = 0$$

$$t^2 - 14kt + 45k^2 - 4 = 0$$

$$D = 196k^2 - 4(45k^2 - 4) =$$

$$4(49k^2 - 45k^2 + 4) = 4(4k^2+4) =$$

$$16(k^2+1)$$

$$t_{1,2} = \frac{14 \pm 4\sqrt{k^2+1}}{2} \qquad t_{1,2} = 7 \pm 2\sqrt{k^2+1}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

лист 1 из 2 шт ней

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_7{}^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4 \\ \log_7{}^4(y) + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} 6x>0 \\ 6x\neq 1 \\ 36x^2>0 \\ 36x^2\neq 1 \\ y>0 \\ y\neq 1 \\ y^2>0 \\ y^2\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x\neq \frac{1}{6} \\ x\neq 0 \\ x\neq \pm\frac{1}{6} \\ y>0 \\ y\neq 1 \\ y\neq 0 \\ y\neq \pm 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{\log^4_{6x}(6x)}{\log^4_{6x}(7)} - 2\log_{6x}7 = \dfrac{\log_{6x}(343)}{2} - 4 \\ \dfrac{\log^4_y(y)}{\log^4_y(7)} + 6\log_y(7) = \dfrac{\log_y(7^5)}{2} - 4 \end{cases}$$

$\boxed{\begin{matrix} x\in(0;\frac{1}{6})\cup(\frac{1}{6};+\infty) \\ y\in(0;1)\cup(1;+\infty) \end{matrix}}$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\log^4_{6x}(7)} - 2\log_{6x}7 = \dfrac{3\log_{6x}(7)}{2} - 4 \quad (1) \\ \dfrac{1}{\log^4_y(7)} + 6\log_y(7) = \dfrac{5}{2}\log_y(7) - 4 \quad (2) \end{cases}$$

(1) Замена: $\log_{6x}7 = t$: $\quad \frac{1}{t^4} - 2t = \frac{3t}{2} - 4$; $\frac{2}{t^4} - 4t = 3t - 8$

$\frac{2}{t^4} = 7t - 8$; $\frac{7t^5 - 8t^4 - 2}{t^4} = 0$ $\quad (t\neq 0$ всегда$)$

$\boxed{7t^5 - 8t^4 - 2 = 0}$ (I)

(2) Замена: $\log_y(7) = k$: $\quad \frac{1}{k^4} + 6k = \frac{5}{2}k - 4$ $\quad (k\neq 0$ всегда$)$

$\frac{2}{k^4} + 12k = 5k - 8$; $\frac{2}{k^4} + 7k + 8 = 0$; $\frac{7k^5 + 8k^4 + 2}{k^4} = 0$

$\boxed{7k^5 + 8k^4 + 2 = 0}$ (II). ~~Сложим (I) и (II)~~.

$(6x)^t = 7$ $\quad 6x = \sqrt[t]{7}$; $x = \frac{\sqrt[t]{7}}{6}$; $y^k = 7$; $y = \sqrt[k]{7}$

$xy = \dfrac{7^{\frac{1}{t} + \frac{1}{k}}}{6} = \dfrac{7^{\frac{k+t}{kt}}}{6}$

~~Сложим (I) и (II): $7t^5 + 7k^5 - 8t^4 + 8k^4 = 0$~~
~~$7(k+t)(t^4 - kt^3 + k^2t^2 - k^3t + k^4)$~~
~~$+8(k^2+t^2)(k+t)(k-t) = 0$~~

Пусть, $\frac{1}{t} = a$; $\frac{1}{k} = b$. Надо найти $a+b$. (I) и (II) перепишем в виде:

$\frac{7}{a^5} - \frac{8}{a^4} - 2 = 0$; $\quad 7 - 8a - 2a^5 = 0$ $\quad$; $\boxed{2a^5 + 8a - 7 = 0}$

$\frac{7}{b^5} + \frac{8}{b^4} + 2 = 0$; $\quad 7 + 8b + 2b^5 = 0$; $\quad \boxed{2b^5 + 8b + 7 = 0}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

лист 2 из 2 по ней

Сложим последние 2 уравнения:

$$2a^5+2b^5+8a+8b=0$$

$$2(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)+8(a+b)=0$$

$$\cancel{(2+4)}\ (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^2+4)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} a+b=0 \quad (I) \\ a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+4=0 \quad \neq 0 \end{array}\right.$$

При $a+b=0$

$$xy=\frac{7^{a+b}}{6}=\frac{1}{6}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

лист 3 из 3 по ней

~~Нуг считаю, что $t \geq 0$ (т.к. при замене А на В и В на А~~

При $t = 0$: $\Delta y = x$; $\Delta x = 10$.

$x_2 = x_1 + 10 - t$

$y_2 = y_1 + 4t$

$$\begin{cases} 0 \le y_1 \le 68 \\ 68x_1 + 17y_1 \geq 0 \\ -34x_1 + 544 - 7y_1 \geq 0 \end{cases}$$

$0 \le y_1 + 4t \le 68$

$68x_1 + 680 - 68t + 17y_1 + 68t$

$kx + b = 0$ $(2; 68)$ $(19; 0)$

$$\begin{cases} 2k + b = 68 \\ 19k + b = 0 \end{cases}$$

$68 - 2k = -19k$

$68 = -17k$; $k = -4$

$-8 + b = 68$

$b = 76$

$\boxed{y = -4x + 76}$

$kx + b = 0$ $(-17; 68)$ $(0; 0)$

$$\begin{cases} -17k + b = 68 \\ b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 0 \\ k = -\frac{68}{17} = -4 \end{cases}$$

$\boxed{y = -4x}$

Т.е. попадание точки $(x; y)$ внутри пар. равносильно системе:

$$\begin{cases} 0 \le y \le 68 \\ -4x - y \le 0 \\ -4x + 76 - y \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le y \le 68 \\ 4x + y \geq 0 \\ 4x + y \le 76 \end{cases}$$

$x_2 = x_1 + 10 - t$

$y_2 = y_1 + 4t$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 0 \le y_1 \le 68 \\ 4x_1 + y_1 \geq 0 \\ 4x_1 + y_1 \le 76 \\ 0 \le y_1 + 4t \le 68 \\ 4x_1 + 40 - 4t + y_1 + 4t \geq 0 \\ 4x_1 + 40 - 4t + y_1 + 4t \le 76 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le y_1 \le 68 \\ 4x_1 + y_1 \geq 0 \\ 4x_1 + y_1 \le 76 \\ 0 \le y_1 + 4t \le 68 \\ 4x_1 + y_1 \geq -40 \\ 4x_1 + y_1 \le 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \le 4x_1 + y_1 \le 36 \\ 0 \le y_1 \le 68 \\ 0 \le y_1 + 4t \le 68 \end{cases}$$

Каждой тройке $(x_1; y_1; t)$ соответствует ~~решение~~ пара из пар. точек.

$$\begin{cases} 0 \le y_1 \le 68 \\ -\frac{y_1}{4} \le x_1 \le \frac{36 - y_1}{4} \\ -\frac{y_1}{4} \le t \le \frac{68 - y_1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \le y_1 \le 68 \\ -\frac{y_1}{4} \le x_1 \le 9 - \frac{y_1}{4} \end{cases}$$

$-\frac{y_1}{4} \le t \le 17 - \frac{y_1}{4}$

Рассмотрим все случаи остатков y_1 при делении на 4.

1) $y_1 \underset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow -k \le x_1 \le 9 - k$ — 10 значений

$y_1 = 4k$ $\quad -k \le t \le 17 - k$ — 18 значений —

Всего тогда $\underline{18 \cdot 10 = 180}$ значений

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

лист 3 из 3 по ней

② ~~$y_1 \equiv 1 \pmod 6$~~ $\quad y_1 \equiv r \pmod 4$; ~~$r \neq 0$~~ $\quad r \not\equiv 0 \pmod 4$

$y_1 = 4k + r$

$$-\frac{4k-r}{4} \le x_1 \le 9 - \frac{4k-r}{4}$$

$$-k - \frac{r}{4} \le x_1 \le 9 - k - \frac{r}{4}$$; x_1 целое $\Rightarrow$

$$-k \le x_1 \le 9 - k - 1$$

$$-k \le x_1 \le 8 - k$$ – 9 значений

• Аналогично для t 17 значений $\Rightarrow$ всего $17 \cdot 9 = 153$ значения

Среди значений y_1 (от 0 до 68) – всего их 69

есть 18 кратных 4 и $69 - 18 = 51$ – не кратных. Тогда всего

пар $18 \cdot 180 + 51 \cdot 153 = 3240 + 7803 = 11\,043$.

Ответ: 11 043.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

лист 1 из 3 по ней

$4(x_2-x_1)+y_2-y_1=40$; $x_2-x_1=k$

$y_2-y_1=l$

$4k+l=40$; $l \vdots 4$; $l=4t$

$4k+4t=40$

$\underline{k+t=10}$ $\boxed{\begin{matrix} l=4t \\ k=10-t \end{matrix}}$

~~k может принимать значения~~

$|k| \le 19+17=36$

$|l| \le 68-0=68.$ $\Rightarrow$ $\left[\begin{matrix} -36 \le 4t \le 36 \\ -68 \le 10-t \le 68 \end{matrix}\right.$

t целое!

$\left[\begin{matrix} -9 \le t \le 9 \\ -58 \le t \le 78 \end{matrix}\right.$ $\boxed{-9 \le t \le 9}$

Что значит, что точка $(x;y)$ лежит внутри парал.

Во-первых это значит, что $0 \le y \le 68.$

Теперь посчитаем уравнения сторон парал., не параллельных оси x:

$kx+b=0$ $(2;68)$ $(19;0)$

$\begin{cases} 2k+b=68 \\ 19k+b=0 \end{cases}$ $68-2k=-19k$

$68=-17k$

$\cancel{34=-7k}$

$k=-\frac{34}{7}$

$\cancel{b=68}$ $-\frac{68}{7}+b=68$

$b=68\left(1+\frac{1}{7}\right)=\frac{68\cdot 8}{7}=\frac{544}{7}$

$-\frac{34}{7}x+\frac{544}{7}=y$

$\boxed{\cancel{-\frac{34}{7}x+\frac{544}{7}\ge 0}}$ $-\frac{34}{7}x+\frac{544}{7}-y\ge 0$

$\cancel{-34x+544\ge 0}$ $\boxed{-34x+544-7y\ge 0}$.

$kx+b=0$; $(-17;68)$ $(0;0)$

$\begin{cases} b=0 \\ -17k=68 \end{cases}$; $k=-\frac{68}{17}$

$-\frac{68}{17}x=y$

$-\frac{68}{17}x-y\le 0$

$\cancel{-68x}$

$\boxed{68x+17y\ge 0}$

$\boxed{4x+y\ge 0}$

Итак, лежание точки $(x;y)$ внутри парал. равносильно системе:

$$\begin{cases} 0 \le y \le 68 \\ 68x+17y \ge 0 \\ -34x+544-7y \ge 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$-3{,}5$

$x^2+14x+y^2+45=0$ (1)

$x^2+y^2-9=0$ (2)

(1): $D=196-4y^2-180=16-4y^2$

$x_{1,2}=\dfrac{-14\pm2\sqrt{4-y^2}}{2}$; $\boxed{x_{1,2}=-7\pm\sqrt{4-y^2}}$

(2): $\boxed{x_{1,2}=\pm\sqrt{9-y^2}}$

$3{,}5$ $k=3$ $\boxed{203}$

$153 \cdot 51 = 7803$

$\log_{6x}$

$5 \quad -3{,}5$

$7803+3240=11043$

$x=7b-3ay$

$(x+7)^2+y^2-4=0$

$17\cdot 9=153$

$\frac{1}{2}\log$

$31\cdot31$

$18\cdot180$

$x=\sqrt[b]{\frac{7}{6}}$

$y=\sqrt[k]{7}$

$\frac{4\cdot2^5}{7^5}-\frac{8\cdot2^4}{7^4}=$

$68\cdot8=544$

$49\cdot9=441$

$t=0$:

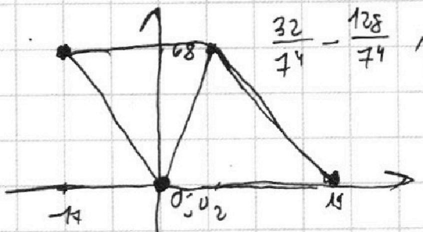
$\log_{6x}(7)=0$

$6x^0=7$

$\frac{32}{7^4}-\frac{128}{7^4}$ $\sqrt{9-y^2}+3ay=7b$

$6x^t=7$

$y^k=7$

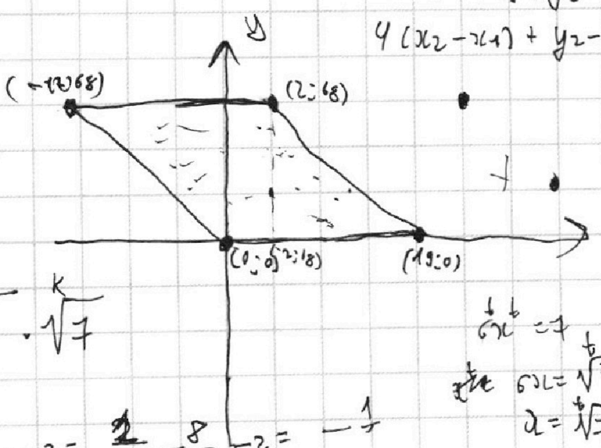


$x+3ay=7b$

$4x_2-4x_1+y_2-y_1=40$

$4(x_2-x_1)+y_2-y_1=40$

$0 \quad 9$



$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

$xy=\sqrt[t]{\frac{7}{6}}\cdot\sqrt[k]{7}$

$6x^t=7$

$6x=\sqrt[t]{7}$

$x=\sqrt[t]{7}$

$4\cdot32-8\cdot16=2$

$\frac{4}{7^5}-\frac{8}{7^4}-2=\frac{2}{7^4}-\frac{8}{7^4}-2=-\frac{1}{7}$

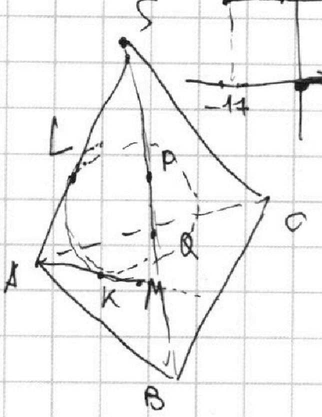
$-4\cdot32+8\cdot16+2$

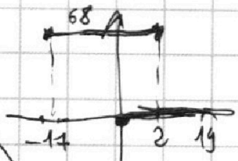
$-\frac{y_1}{4}\le 9-\frac{y_1}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





$\frac{3\pi}{2\cdot 5}$

$\cancel{\cos}\left(\frac{x}{5}\right)$

$\cancel{\cos}$

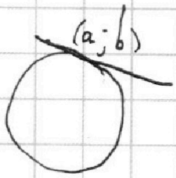
$\sin(3x) = \sin(2x+x) =$

$\sin(2x)\cdot\cos(x) + \cos(2x)\cdot\sin(x) =$

$2\sin(x)\cos^2(x) + \cos^2(x)\cdot\sin(x) -$

$\sin^3(x) =$

$\cos^2(x)$ $\quad \boxed{3\sin(x)\cdot\cos^2(x) - \sin^3(x)}$



$Kx+b =$

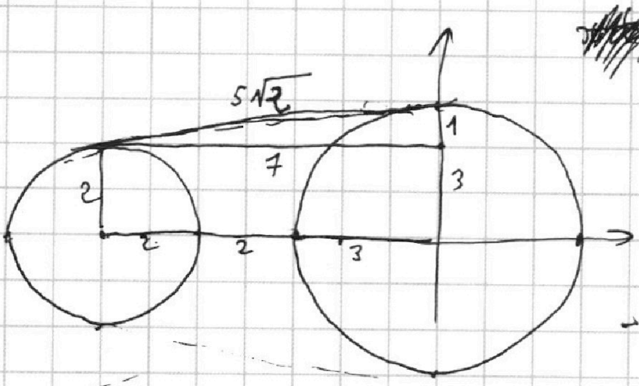
$\cos(3x) = \cos(2x+x) =$

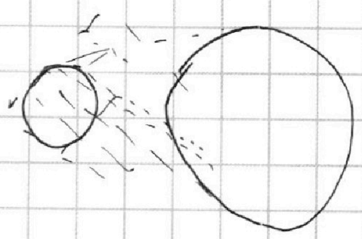
$\cos(2x)\cdot\cos(x) - \sin(2x)\cdot\sin(x) =$

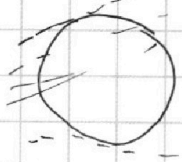
$\cos^3(x) - \sin^2(x)\cdot\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) =$

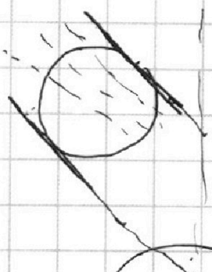
50 $\quad 5\sqrt{2}$

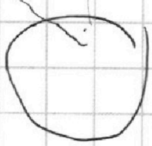
$16x^5 - 20x^3 + 5x = y$

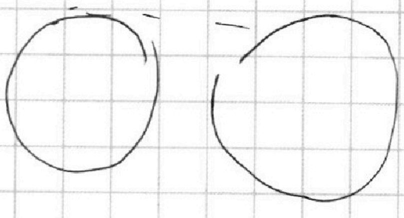


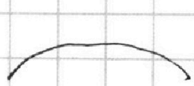


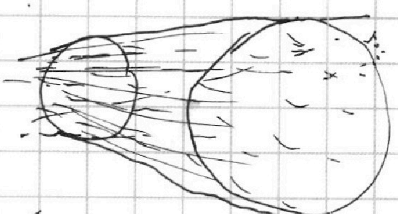


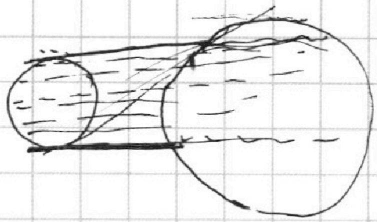












$4(a-b)+c=40$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!