



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-16; 80)$ ,  $Q(2; 80)$  и  $R(18; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \text{ } ab: 2^8 3^{14} 5^{12}$$

$$bc: 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$ac: 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$\Rightarrow abc: 2^{14} 3^{21} 5^{39} \text{ (взяли старшие степени)}$$

Рассмотрим содержание степеней 2, 3, 5 в числах  $a, b, c$

1) Содержание степеней двоек (содержанием их кол-во симв. буквой)

$$\begin{cases} a+b \geq 8 \\ b+c \geq 12 \\ a+c \geq 14 \end{cases} \Rightarrow a+b+c \geq \frac{12+14+8}{2} = 17. \text{ Значит } abc: 2^{17}$$

2) Содержание степеней троек

$$\begin{cases} a+b \geq 14 \\ b+c \geq 20 \\ a+c \geq 21 \end{cases} \Rightarrow a+b+c \geq \frac{14+20+21}{2} = 27,5. \text{ Степень тройки}$$

обязана быть целой т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$   
Значит  $a+b+c \geq 28$  т.е.  $abc: 3^{28}$

3) Содержание пятёрок

$$\begin{cases} a+b \geq 12 \\ b+c \geq 17 \\ a+c \geq 39 \end{cases} \Rightarrow a+b+c \geq \frac{12+17+39}{2} = 34. \text{ т.е. } abc: 5^{34}$$

Итого  $abc: 2^{14} 3^{21} 5^{39}$

$$abc: 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$abc: 2^{17}$$

$$abc: 3^{28}$$

$$abc: 5^{34}$$

$$\Rightarrow abc: 2^{17} 3^{28} 5^{39}, a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$abc \geq 2^{17} 3^{28} 5^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$abc \geq 2^{17} 3^{28} 5^{39}$$

$\& abc = 2^{17} 3^{28} 5^{39}$  достигается

при

$$a = 2^5 3^7 5^{12}$$
$$b = 2^3 3^7$$
$$c = 2^9 3^{14} 5^{27}$$

$$ab = 2^8 3^{14} 5^{12} ; 2^8 3^{14} 5^{12}$$

$$bc = 2^{12} 3^{21} 5^{27} ; 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39} ; 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$abc \geq 2^{17} 3^{28} 5^{39} \text{ и равенство для } 2^{17} 3^{28} 5^{39}$$

достигается  $\Rightarrow$  ~~abc~~ наименьшее

произведение  $abc = 2^{17} 3^{28} 5^{39}$

Ответ:  $2^{17} 3^{28} 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано

$\triangle ABC$  - прямоуголь.

$\angle C = 90^\circ$

CA - высота

AD : AB = 5 : 2

$\omega$ , кас BC в B

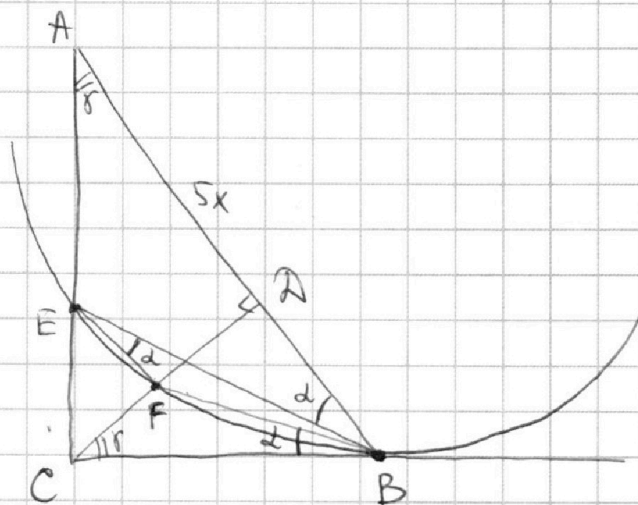
$\omega \cap CA = F$

$\omega \cap AB = E$

EF || AB

Найти:

$S_{\triangle ABC} ; S_{\triangle CEF}$



1)  $CB$  кас к  $\omega \Rightarrow \angle FBC = \angle FEB$  (внеш. угол  
опр. на дугу, отсекаемую хордой в точку  
касания) значит по св-ву кас  $\angle FBC = \angle FEB$   
пусть  $\angle FBC = \angle FEB = \alpha$

2)  $EF \parallel AB \Rightarrow \angle FEB = \angle EBA$  (как внутр. н/ч углы)  
итого  $\angle EBA = \alpha$

3) Пусть  $\angle CAB = \beta$ , тогда  $\angle ACF = 90^\circ - \beta$ ,  $\angle DCB = 90^\circ - \angle ACF =$   
 $= 90^\circ - (90^\circ - \beta) = \beta$

4)  $\triangle CBF$  и  $\triangle ABE$  подобны по 2м углам ( $\angle CAB = \angle FBC$ ,  $\angle ACB = \angle AEB$ )  
значит  $\frac{AE}{CF} = \frac{AB}{CB}$

5) Пусть  $AD = 5x$ , тогда  $AB = 2x$ , CA - выс. к гип.  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow CA = \sqrt{AB \cdot AD} = \sqrt{5x \cdot 2x} = x\sqrt{10}$

6) по т. Пифагора  $CB = \sqrt{CA^2 + AB^2} = \sqrt{x^2 \cdot 10 + x^2 \cdot 4} = x\sqrt{14}$   
по т. Пифагора  $AC = \sqrt{AB^2 - CB^2} = \sqrt{x^2 \cdot 4 - x^2 \cdot 14} = x\sqrt{35}$

7) значит  $\frac{AE}{CF} = \frac{AB}{CB} = \frac{2x}{x\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$

8)  $\angle EBC = \angle EBF + \alpha$   
 $\angle FBA = \angle EBF + \alpha \Rightarrow \angle FBC = \angle FBA$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



9)  $\triangle CBE$  и  $\triangle DBF$  подобны по двум углам ( $\angle CBE = \angle DBF$ ,  $\angle BCE = \angle BDF$ )

$$\text{Значит } \frac{FB}{EC} = \frac{DB}{CB} = \frac{2x}{\sqrt{14}x} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

10)  $\triangle EFC$  и  $\triangle AFA$ ,  $CD \perp AB$ ,  $EF \parallel AB \Rightarrow CA \perp EF$

11)  $\triangle EFC$  и  $\triangle AFA$ :  $\angle C$  - общий,  $\angle EFC = \angle AFA = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle EFC \sim \triangle AFA$  по двум углам

$$\text{Значит } \frac{CE}{AC} = \frac{CF}{AF} \text{ пусть } \frac{CE}{AC} = k, \text{ тогда}$$

$$CE = k \cdot AC$$

$$AE = AC - CE = AC(1-k)$$

$$\text{Ан-то } FD = AF - CF = AF(1-k)$$

$$12) \frac{FB}{EC} = \frac{2x}{\sqrt{14}x}, \frac{AE}{CF} = \frac{7}{\sqrt{14}}; \frac{CF}{AE} \cdot \frac{EC}{FB} = \frac{\sqrt{14}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{CF} \cdot \frac{EC \cdot FD}{ED \cdot EC} = \frac{7}{\sqrt{14}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} = \frac{7}{2} \cdot 1$$

$$\frac{AC(1-k)}{ED \cdot k} = \frac{AD(1-k)}{AC \cdot k} = 1$$

$$\left( \frac{(1-k)}{k} \right)^2 = 1$$

$$1-k=k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$13) S_{\triangle CFA} = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot AB \cdot \frac{5}{7} = S_{\triangle ABC} \cdot \frac{5}{7}$$

$$\text{Взяв } S_{\triangle CFA} = k^2 \cdot S_{\triangle CFA} = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = ?$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CFA}} = \frac{S_{\triangle ABC}}{\frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot S_{\triangle ABC}} = \frac{28}{5} = \frac{56}{10} = 5,6 \text{ Ответ: } 5,6$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

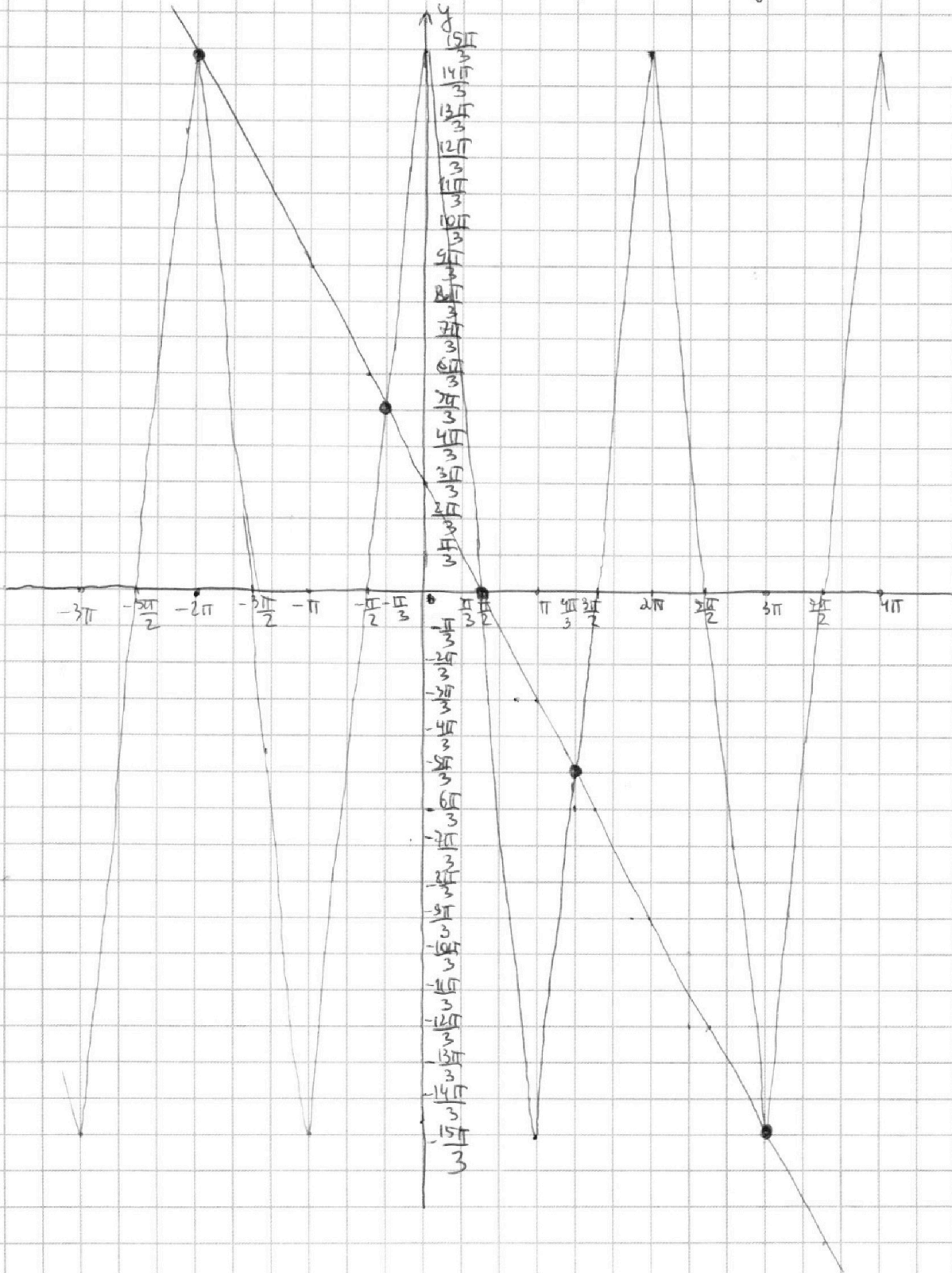
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$  Построим графики  $y = 10 \arcsin(\cos x)$   
и  $y = \pi - 2x$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что  $10 \arcsin(\cos x) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$   
 $10 \arcsin(\cos x) \in [-5\pi; 5\pi]$

При  $x < -2\pi$   $\pi - 2x > \pi + 4\pi = 5\pi$

Значит у лев. и правой части не будет пересечения т.к. прав. част.  $\leq 5\pi$

При  $x > 3\pi$   $\pi - 2x < \pi - 6\pi = -5\pi$

Значит у левой и правой части не будет пересечения т.к. прав. част.  $\geq -5\pi$

При  $x \in [-2\pi; 3\pi]$  у левой и правой части 5 точек пересечения, значит при  $x \in [-2\pi; 3\pi]$  - 5 корней у нашего уравн.

Итого  $x \in (-\infty; -2\pi)$  - 0 реш.  
 $x \in [-2\pi; 3\pi]$  - 5 реш.  
 $x \in (3\pi; +\infty)$  - 0 реш. Значит всего 5 реш.

Заметим, что  $x = -2\pi$   
 $x = -\frac{\pi}{3}$   
 $x = \frac{\pi}{2}$   
 $x = \frac{4\pi}{3}$   
 $x = 3\pi$

решения и их 5  
значит других решений нет

проверка корней  $x = -2\pi$   $10 \arcsin(\cos(-2\pi)) = 10 \arcsin(1)$

Ответ:  $-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

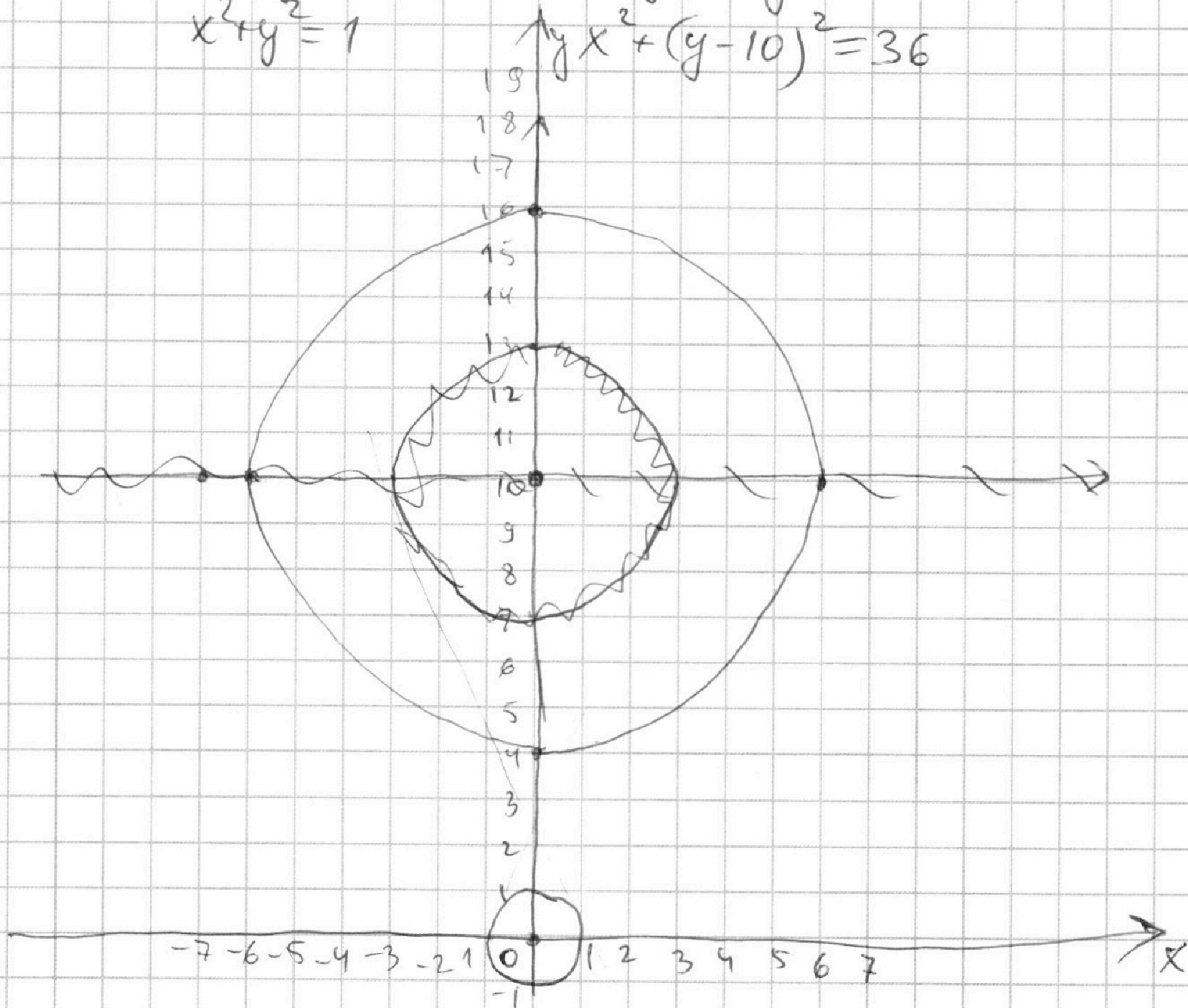


$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & ; & y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3} \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 & (*) \end{cases}$$

$$(*) \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 - 20y + 100 = 36$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + (y - 10)^2 = 36$$



Решение (\*) - координаты точек касания.

Эти две окружности

$y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$  - уравнение прямой. Значит решением

системы будет является каждая координата

пересечения прямой и уравнения  $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$  и двух окр.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

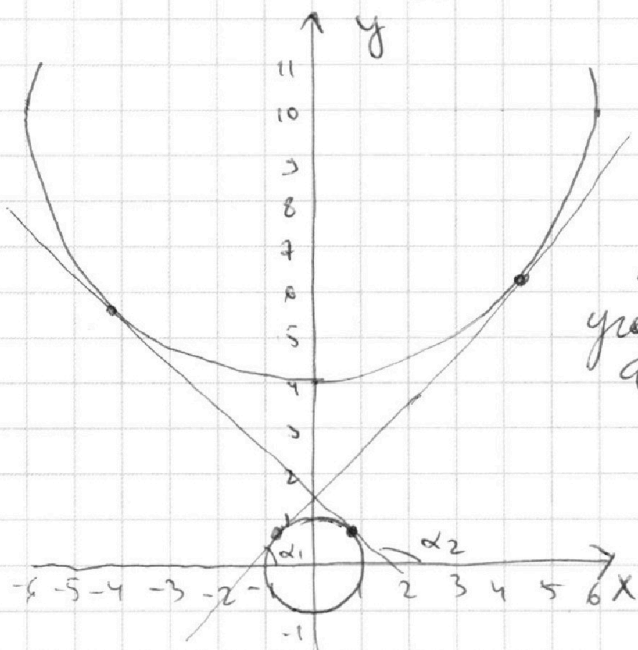
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Нужно дать ровно 4 решения при касании  
прямая пересекает окружность не более 2 раза, значит,  
чтобы решений было ровно 4 она должна  
пересекать каждую окружность 2 раза



Рассмотрим положение касания двух окр. относительно внутр. касательной

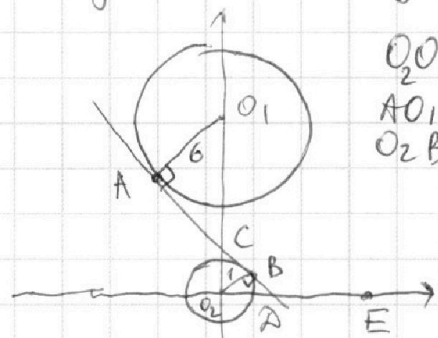
Тогда у первой будет угол с полож. напр.  $Ox$   $\alpha_1$ , а у второй  $\alpha_2$

при углах  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  наша сист. имеет не более двух ур. реш. т.к. прямая либо кас. двух окр. либо пересекает одну либо кас. одну либо не

пересекает никакую. при варианте, где  $\alpha = 90^\circ$  не подходит т.к. у нас не будет  $y = \frac{4}{3}x + \frac{46}{3}$  задаёт

все прямые кроме пар.  $Oy$ . значит нам подходит прямые которые образуют угол  $\beta$  с полож. напр.  $Ox$ , где  $\beta \in (\alpha_1; 90^\circ) \cup (90^\circ; \alpha_2)$

найдем  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$   $\text{tg} \alpha_1$  и  $\text{tg} \alpha_2$



$$\begin{aligned} O_2O_1 &= 10 \triangle O_1A \triangle O_2B \\ AO_1 &= 6 \quad \frac{O_1C}{CO_2} = \frac{AO_1}{O_2B} = \frac{6}{1} \\ O_2B &= 1 \quad O_1C = 6CO_2 \\ CO_2 + O_1C &= 7CO_2 = O_2O_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CO_2 &= \frac{10}{7} \\ CB &= \sqrt{CO_2^2 - O_2B^2} = \\ &= \frac{\sqrt{100-1}}{7} = \\ &= \frac{3\sqrt{11}}{7} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



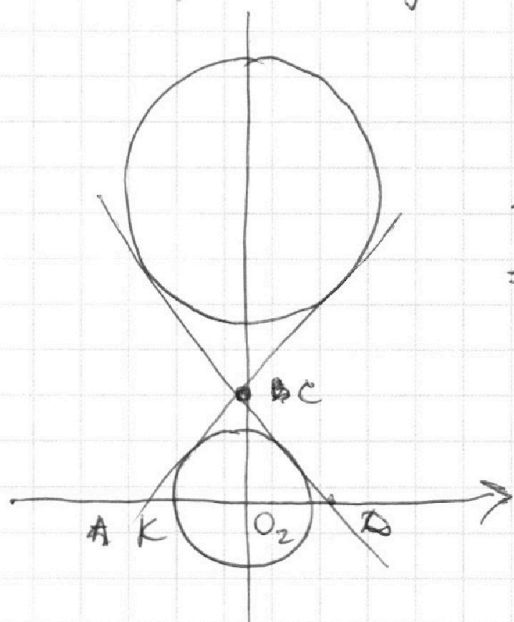
$$\text{maxim } \angle CO_2B = \angle BO_2C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \angle BO_2C = \operatorname{tg} \angle CO_2B = \frac{CB}{O_2B} = \frac{\frac{3\sqrt{11}}{7}}{1} = \frac{3\sqrt{11}}{7}$$

$$\angle BDA = \alpha_2$$

$$\alpha_2 = 180^\circ - \angle CO_2B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_2 = -\operatorname{tg} \angle CO_2B = -\frac{3\sqrt{11}}{7}$$



Метод углов

$$\triangle KCO_2 = \triangle ACO_2 \text{ (по 2м кат.)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle CKO_2 = \angle CAO_2 = \alpha_1$$

$$\text{maxim } \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \angle CAO_2 = \frac{3\sqrt{11}}{7}$$

$$\text{у прямой ур. } y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3} \quad \& \text{ по geom.}$$

коэффициент  $\frac{a}{3} \neq$  равен тангенсу угла наклона  
прямой к полож. напр.  $Ox$ .

$$\text{мы выяснили, что } \rho \in (\alpha_1; 90^\circ) \cup (90^\circ; \alpha_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \rho \in \left( \frac{3\sqrt{11}}{7}; +\infty \right) \cup \left( -\infty; -\frac{3\sqrt{11}}{7} \right)$$

$$\text{т.е. } \frac{a}{3} \in \left( \frac{3\sqrt{11}}{7}; +\infty \right) \cup \left( -\infty; -\frac{3\sqrt{11}}{7} \right) \Rightarrow a \in \left( -\infty; -\frac{\sqrt{11}}{7} \right) \cup \left( \frac{\sqrt{11}}{7}; +\infty \right)$$

$$\text{Ответ: } \left( -\infty; -\frac{\sqrt{11}}{7} \right) \cup \left( \frac{\sqrt{11}}{7}; +\infty \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$f(a) = 0$  имеет ~~два~~ 2 рееш. Значит  
образованы  $x_1$  и  $x_2$

Значит либо  $-\log_5(2x) = x_1$  либо  $-\log_5(2x) = x_2$   
 $\log_5 y = x_2$ , либо  $\log_5 y = x_1$

либо  $-\log_5(2x) = \log_5 y = x_1$  либо  $-\log_5(2x) = \log_5 y = x_2$

Значит  $xy$  может принимать значения

$$1) -\frac{x_1^5}{2} \cdot \frac{x_2^5}{2} = -\frac{(x_1 x_2)^5}{2}$$

$$2) -\frac{x_2^5}{2} \cdot x_1^5 = -\frac{(x_1 x_2)^5}{2}$$

$$3) -\frac{x_1^5}{2} \cdot x_1^5 = -\frac{x_1^{10}}{2}$$

$$4) -\frac{x_2^5}{2} \cdot x_2^5 = -\frac{x_2^{10}}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 3625 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3} \frac{1}{\log_5(2x)} - 3$$

Заменим  $\log_5(2x) = t$ , тогда

$$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{t} - 3$$

$$t^4 - \frac{13}{3}t + 3 = 0$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y 30,2 - 3$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3} \frac{1}{\log_5 y} - 3$$

Заменим  $\log_5 y = b$

$$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{b}{3} - 3$$

$$b^4 + \frac{13}{3}b + 3 = 0$$

Заметим, что пусть  $f(a) = a^4 + \frac{13}{3}a + 3$

Тогда функция нашего условия функции

выполняется условие  $f(-t) = f(-\log_5(2x)) = t^4 - \frac{13}{3}t + 3 = 0$

$$\text{и } f(b) = f(\log_5 y) = b^4 + \frac{13}{3}b + 3 = 0$$

$$\text{т.е. } \begin{cases} f(\log_5 y) = 0 \\ f(-\log_5(2x)) = 0 \\ f(a) = a^4 + \frac{13}{3}a + 3 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

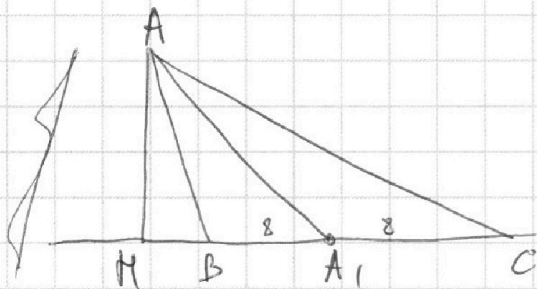
5) В  $\triangle AA_1H$  по т. Пифагора

$$A_1H = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = \sqrt{24^2 - 12,5^2} =$$
$$= \sqrt{(24-12,5)(24+12,5)} = \sqrt{11,5 \cdot 36,5} =$$
$$= \frac{1}{2} \sqrt{23 \cdot 73} = \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{2}$$

6)  $BH = BA_1 - HA_1 = \frac{1}{2} BC - HA_1 = 8 - \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{2} =$

$$= \frac{\sqrt{16^2} - \sqrt{23 \cdot 73}}{2} < 0$$

Значит, основание  $BH$  лежит вне  $BC$



Значит  $HВ =$

$$= HA_1 - BA_1 = \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{2} - 8$$

7) По т. Пифагора в  $\triangle AHB$

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 = \left(\frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{2} - 8\right)^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{23 \cdot 73 - 32 \sqrt{23 \cdot 73} + 256 + 625}{4} =$$
$$= \frac{1679 + 256 + 625 - 32 \sqrt{23 \cdot 73}}{4} = \frac{2560 - 32 \sqrt{23 \cdot 73}}{4} =$$
$$= 640 - 8 \sqrt{23 \cdot 73}$$

8) По т. Пифагора  $HC = BC + HB = 16 + \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{2} - 8 =$

$$= 8 + \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{2}$$

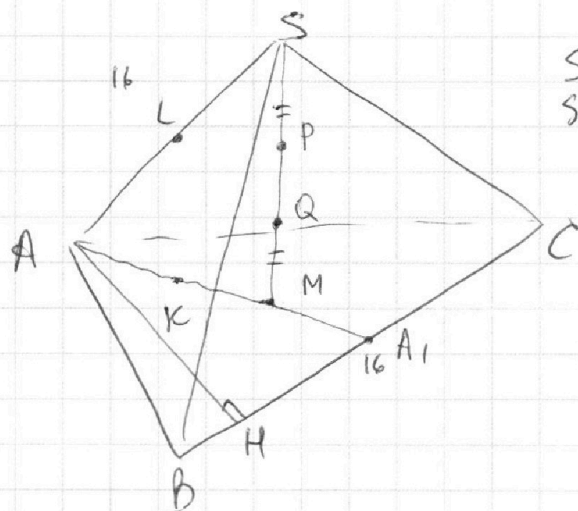
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

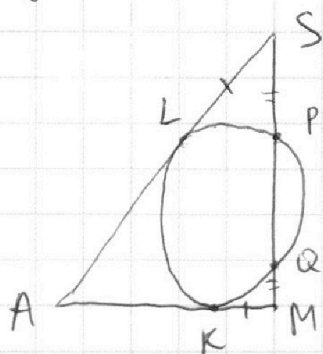


$$S_{\triangle ABC} = 100$$

$$SA = BC = 16$$

а) Найти:  $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1$

Сделаем выносковой сечение (SAM)



1) по св-ву кас. и сек.

$$\left. \begin{aligned} SL^2 &= SP \cdot SQ = SP(SP + PQ) \\ KM^2 &= MQ \cdot MP = MQ(MQ + PQ) \\ MQ &= SP \end{aligned} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SL^2 = KM^2 \Rightarrow SL = KM$$

2)  $AL = AK$  - как отр. кас.  $\Rightarrow AS = AM = 16$   
 $LS = KM$

3) по св-ву мед.  $\frac{AM}{AA_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} \cdot AM = 16 \cdot \frac{3}{2} = 24$   
 $AM$  - по ппм  $S-Q-P-M$  - левые и правые медианы сопр.

4) В  $\triangle ABC$  проведем высоту  $AM$

Тогда  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AM = 100$

$$AM = \frac{100 \cdot 2}{BC} = \frac{200}{16} = 12,5$$

5) В  $\triangle AA_1$  на т.  $H$  провести

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

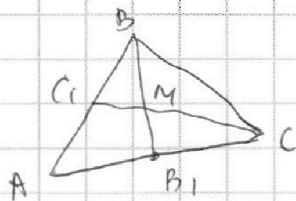
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



9) что т. Пифагора из  $\triangle ABC$

$$AC^2 = AM^2 + BC^2 = \left(\frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{2} + 8\right)^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2 = 640 + 8\sqrt{23 \cdot 73}$$

10)  $BB_1 = \frac{1}{2} AC$  по формуле медианы



треугольника

$$BB_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2(640 - 8\sqrt{23 \cdot 73} + 640 + 8\sqrt{23 \cdot 73}) - 640 - 8\sqrt{23 \cdot 73}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot (640 - 8\sqrt{23 \cdot 73} + 256) - 640 - 8\sqrt{23 \cdot 73}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{640 + 512 - 32 \cdot 8\sqrt{23 \cdot 73}} = \sqrt{160 + 128 - 6\sqrt{23 \cdot 73}} =$$
$$= \sqrt{288 - 6\sqrt{23 \cdot 73}}$$

$$CC_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2AC^2 + 2BC^2 - AB^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2(640 + 8\sqrt{23 \cdot 73}) + 256 - 640 + 8\sqrt{23 \cdot 73}} =$$
$$= \sqrt{288 + 6\sqrt{23 \cdot 73}}$$

$$\text{Значит } AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 24 \cdot \sqrt{(288)^2 - 36 \cdot 23 \cdot 73} =$$

$$= 24 \cdot \sqrt{82944 - 60544} = 24 \cdot \sqrt{22400} =$$

$$= 240 \cdot 4\sqrt{14} = 960\sqrt{14}$$

Ответ: а)  $960\sqrt{14}$

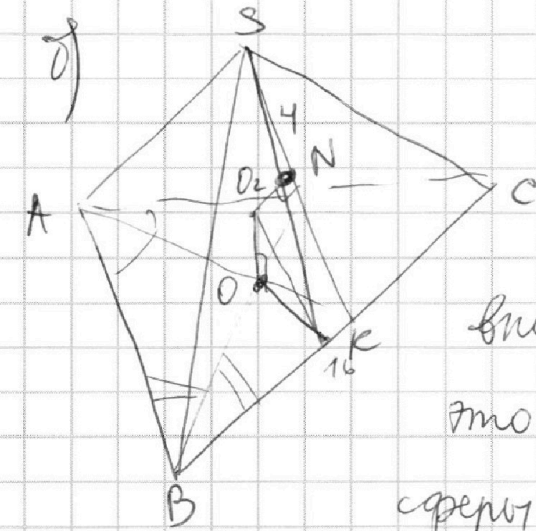
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) И.к. центр сферы вписанной, то её центр проектируется в центр вписанной окр. в осн. Пусть это будет точка  $O$ , а центр сферы  $O_2$

2) Проведем радиус  $OK$ ,  $K$  стороне  $BC$  по условию 3) по условию  $OO_2 = 5$  т.к.  $OO_2$  - рад. сферы

3)  $O_2$  - центр сферы  $\Rightarrow O_2$  - точка пересек. биссектрисы плоскости двугр. угла  $\angle SBCA$  и виск. перп. к осн. через центр впис. окр. в  $\triangle ABC$  ( $O$ )

Значит  $\angle SBCA = 2 \cdot \angle O_2KO$ ,

т.к.  $OK$  - медианой  $OK = r$ , тогда  $S_{ABC} = pr = 100$

$$r = \frac{200}{AB+BC+CA} \text{ — знаем}$$

$$5) \quad \operatorname{tg} \angle O_2KO = \frac{OO_2}{OK} = \frac{5(AB+BC+CA)}{200}$$

$$\text{Значит } \angle SBCA = 2 \cdot \arccos \operatorname{tg} \frac{5(AB+BC+CA)}{200} =$$

$$= 2 \cdot \arccos \operatorname{tg} \left( \frac{16 + \sqrt{640 - 8\sqrt{23 \cdot 73}} + \sqrt{640 + 8\sqrt{23 \cdot 73}}}{200} \right) \approx 40$$

Ответ на пункт 5)  $\textcircled{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^8 3^{14} 5^{12}$$

$$bc : 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$ac : 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{34} 3^{55} 5^{68}$$

$$(abc)^2 : (2^{17})^2 \cdot (3^{34})^2 \cdot 5^{55}$$

$abc : 3^x \Rightarrow (abc) : 3^{2x} \Rightarrow (abc) : 3^y$ , где  $y \leq 2x$ ,  
 значит, если  $(abc)^2 : 3^{55}$ , то  $(abc) : 3^{56}$  т.к. только  
 кратно тройке в зачеркнутой степени

$$ac : 2^{14} 3^{21} 5^{39} \Rightarrow abc : 2^{14} 3^{21} 5^{39} \quad a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$ab : 2^8 3^{14}$$

$$bc : 2^{12} 3^{20}$$

$$ac : 2^{14} 3^{21}$$

$$\begin{cases} a+b \geq 8 \\ b+c \geq 12 \\ a+c \geq 14 \end{cases}$$

$$a+b+c \geq \frac{8+12+14}{2}$$

$$a+b+c \geq 17$$

$$\begin{cases} a+b \geq 14 \\ b+c \geq 20 \\ a+c \geq 21 \end{cases}$$

$$a+b+c \geq \frac{55}{2}$$

$$a+b+c \geq 27,5$$

$$\begin{cases} a+b \geq 12 \\ b+c \geq 17 \\ a+c \geq 39 \end{cases}$$

$$a+b+c \geq 17$$

$$a+c \geq 39$$

$$a+b+c \geq$$

$$\frac{12+17+39}{2} =$$

$$= \frac{12+16+40}{2} =$$

$$= \frac{48+68}{2} = 34$$

$$39 + 17 + 12 = 40 + 28 = 68$$

$$\begin{pmatrix} 20 & 34 & 39 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$b=1$$

$$a = 2^8 3^{14} 5^{12}$$

$$c = 2^{12} 3^{20} 5^{27}$$

$$2^{14} 3^{28} 5^{39}$$

$$\begin{matrix} 7 \\ 7 \\ 14 \\ 4 \\ 4 \\ 10 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

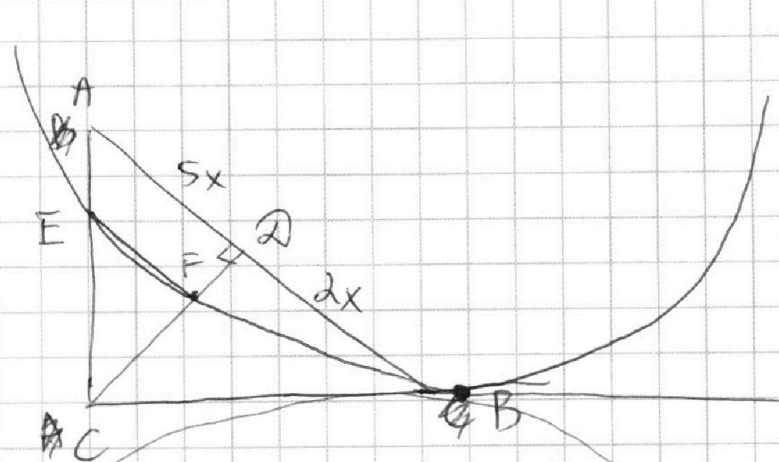
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$$

$$S_{CDA} = \frac{5}{7} S_{ABC}$$

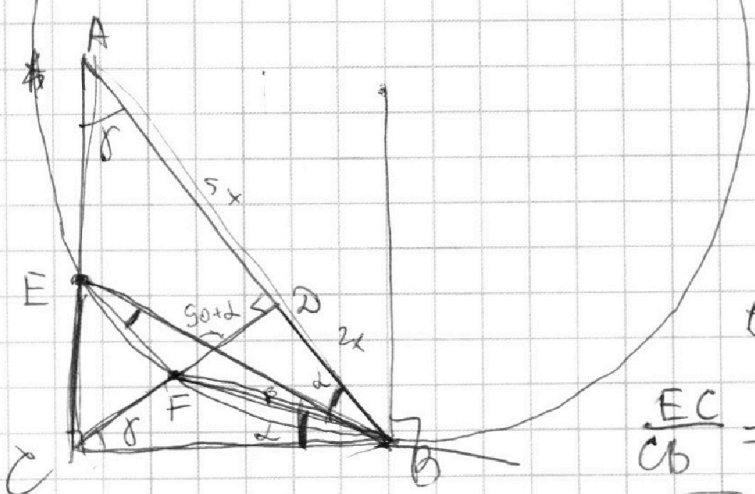
пусть у  $\triangle CEF$   
и  $\triangle CDA$   
коэф подобия  
k, тогда

$$CE = k \cdot AC, EA = AC(1-k)$$

$$CA = \sqrt{49 - 14} = \sqrt{35}$$

$$CA = \sqrt{5x \cdot 2x} = x\sqrt{10}$$

$$CB = \sqrt{10 + 4x} = x\sqrt{14}$$



$$\frac{EC}{CB} = \frac{FD}{DB} \quad \left(\frac{1-k}{k}\right)^2 = \frac{7}{2}$$

$$\frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{AB}{CB} = \frac{CF}{EA}$$

$$\frac{EC}{FD} = \frac{CB}{DB} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$\frac{CF}{EA} = \frac{7}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{EC}{DB} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$\frac{CF}{CA} = \frac{CE}{\sqrt{35}x} = \frac{CF}{\sqrt{10}x}$$

$$CF = \frac{7}{\sqrt{14}} EA$$

$$EC = \frac{\sqrt{14}}{2} FD$$

$$CE\sqrt{10} = CF\sqrt{35}$$

$$CB \cdot 2 = 1$$

$$CE\sqrt{2} = CF\sqrt{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

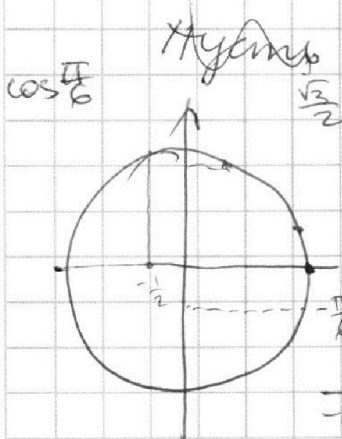
- 1  2  3  4  5  6  7



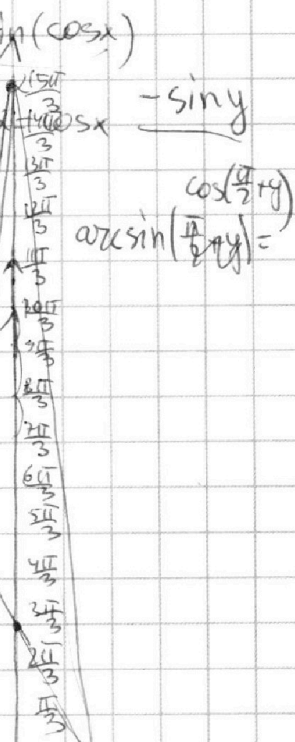
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$   
 $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$



$\arcsin \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$   
 $10 \arcsin \in [-5\pi; 5\pi]$



$\pi - 2x = 5\pi$   
 $x = -2\pi$   
 $x = +3\pi$

$\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = -2y$

Если  $x = \frac{\pi}{2} + y$  - корни,  
то  $x = \frac{\pi}{2} - y$  - корни

$\frac{\pi}{2} - y = -2\pi$   
 $y = 2,5\pi$   
 $\frac{\pi}{2}$   
 $3\pi$   
 $-\frac{\pi}{3}$

$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - y < \frac{\pi}{2}$   
 $\frac{\pi}{2} + y < \frac{\pi}{2}$

$y = \pi - 2x + \pi$

$y = kx + b$   
 $-\frac{\pi}{2} = -\frac{k\pi}{2} + b$   
 $5\pi = b$   
 $\frac{k\pi}{2} = 5\pi$   
 $k = 10$

$y = 10x + 5\pi$

$10x + 5\pi = -2x + \pi$   
 $12x = -4\pi$   
 $x = -\frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{2} - y = -\frac{\pi}{3}$   
 $y = \frac{2\pi + 3\pi}{6}$   
 $y = \frac{5\pi}{6}$   
 $\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} = \frac{3\pi + 5\pi}{6} = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$



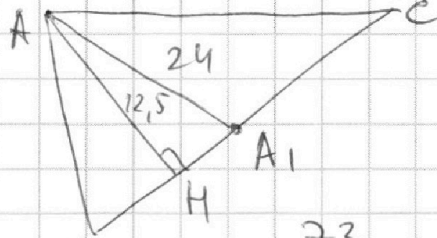
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 76 \\ 288 \\ \times 288 \\ \hline 2304 \\ + 2304 \\ 576 \\ \hline 82944 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 455 \\ \times 1679 \\ \hline 10174 \\ + 5037 \\ \hline 60544 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 73 \\ \times 23 = 1679 \end{array}$$

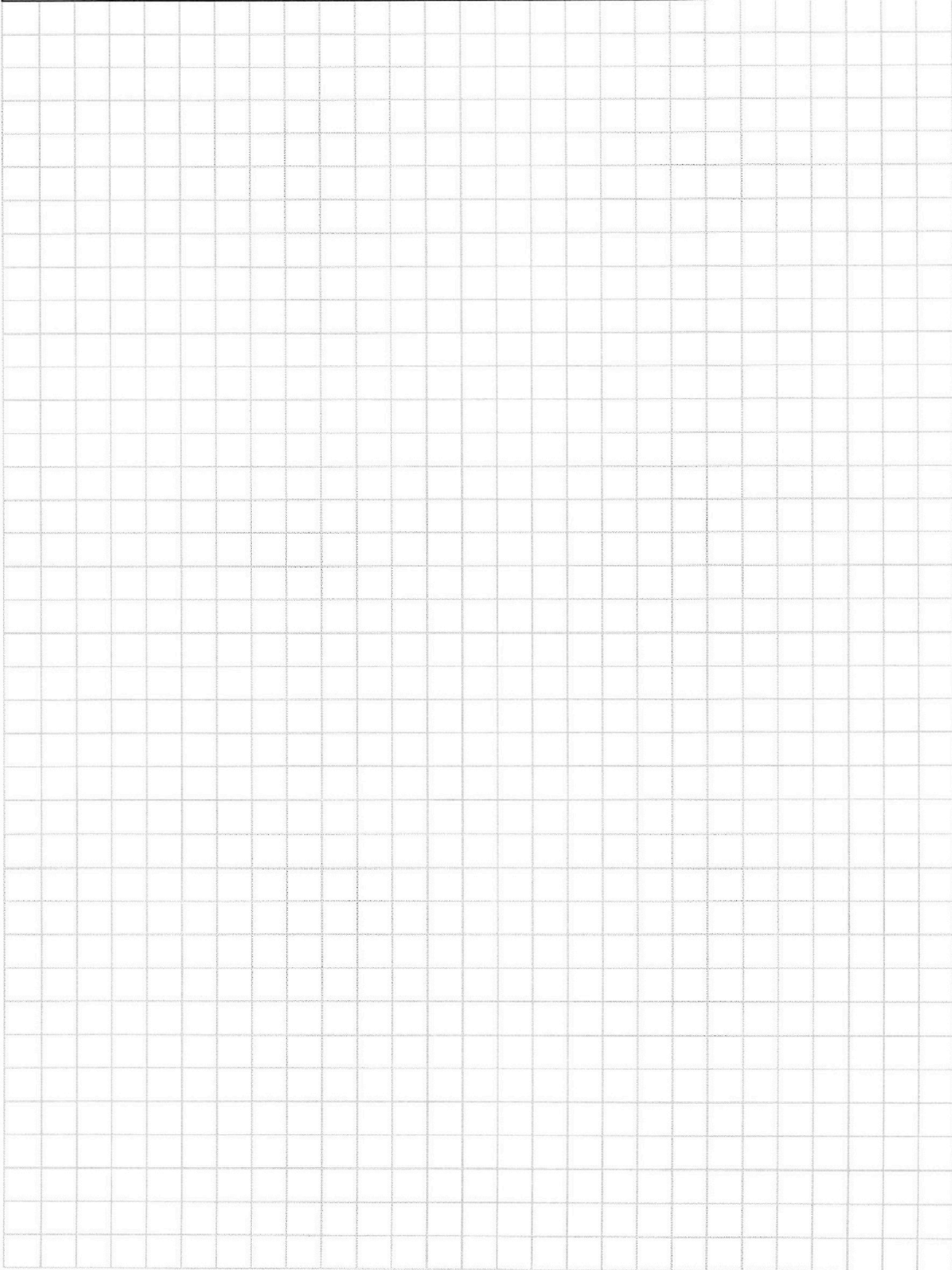


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.  
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4 y + 4 \log_5 y = \log_5 y^{\frac{1}{5}} - 3$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3} \frac{1}{\log_5 y} - 3$$

$$\frac{100}{8} =$$

$$\frac{25}{2} = 12,5$$

$$b^4 + \frac{4}{b^3} = -\frac{1}{3b} - 3$$

$$b^4 + \frac{13}{3}b + 3 = 0$$

$$t^4 - \frac{13}{3}t + 3 = 0$$

$$a^4 + \frac{13}{3}a + 3 = 0$$

Заметим что  
~~если  $y = 2x$~~

$$\begin{array}{r} + 36,5 \\ \hline 72 + 1 = 73 \end{array}$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

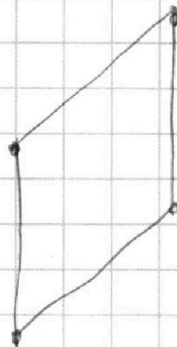
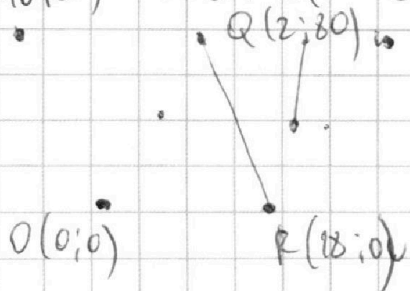
$$x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{3}{1}$$

$$a^2 (x^2 + bx + c)(x^2 + dx + e) =$$

$$= x^4 + x^3(a+c) + x^2(b+ae+d) + x(ad+cb) + bd$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+ae+d=0 & e^2 = b+d \\ ad+cb = \frac{13}{3} \\ bd=3 \end{cases}$$

$$P(-16; 20) \quad (ed + c(b-d)) = \frac{13}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

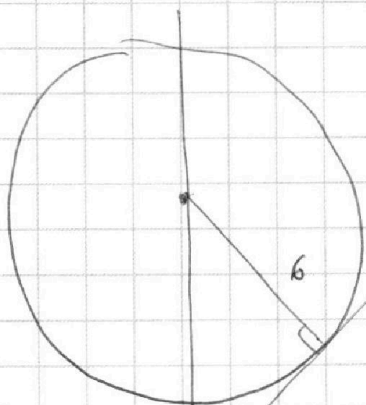
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

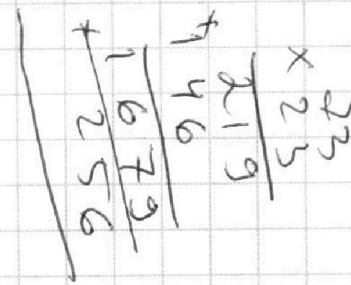
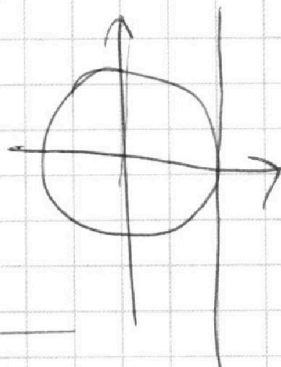
- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

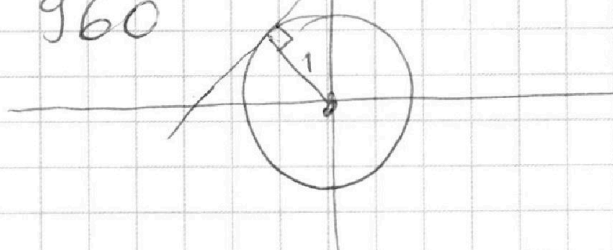
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик



$$\begin{array}{r} 240 \\ \times \quad 4 \\ \hline 960 \end{array}$$



$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{\frac{2x}{5}} (2x)^3 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\log_5 2x} - 3$$

Заметим  $t = \log_5(2x)$

$$t^4 - \frac{39}{t^3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{t} - 3$$

$$t^4 - \frac{13}{3}t + 3 = 0$$

$$3t^4 - 13t + 9 = 0$$

$$\begin{aligned} &= 8 \cdot 28 = \\ &= 16 \cdot 14 = \\ &= 4 \cdot 56 = \\ &= 2 \cdot 112 = \end{aligned}$$

$$\left(4 + \frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{array}{r} 2560 \\ - 24 \\ \hline 16 \\ - 16 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 1879 \\ + 56 \\ \hline 1935 \\ + 18805 \\ \hline 20740 \\ + 1900 \\ \hline 22640 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 1879 \\ + 56 \\ \hline 1935 \\ + 18805 \\ \hline 20740 \\ + 1900 \\ \hline 22640 \end{array}$$

$$\frac{9}{3} + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}$$