



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1:4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N=1$$

$$ab : 2^6 3^{13} 5^{11}$$

$$\Leftrightarrow ab \cdot bc \cdot ac = abc : 2^{36} 3^{59} 5^{52}$$

$$bc : 2^{14} 3^{21} 5^{13}$$

$$\text{также } ab = 2^6 3^{13} 5^{11} k$$

$$bc = 2^{14} 3^{21} 5^{13} l$$

$$ac = 2^{16} 3^{25} 5^{28} m$$

$$\Leftrightarrow ab \cdot bc \cdot ac = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot k l m$$

$$abc = 2^{18} \cdot 3^{29} \cdot 5^{26} \sqrt{klm}$$

$\sqrt{abc} \in N \Leftrightarrow \sqrt{klm} \cdot 3^3 \in N$  и  $k \in N$ ,  $l \in N$ ,  $m \in N$

Следует, что  $\sqrt{klm} : 3 \Rightarrow$  оно из  $k$ ,  $l$  или  $m$  делится

на 3 и  $\sqrt{lm}$  минимально при 2 звёздочках равных 1 и

$$\text{одна } 3 \Rightarrow \sqrt{3klm} = 3 \Leftrightarrow abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26} \text{ (минимально)}$$

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

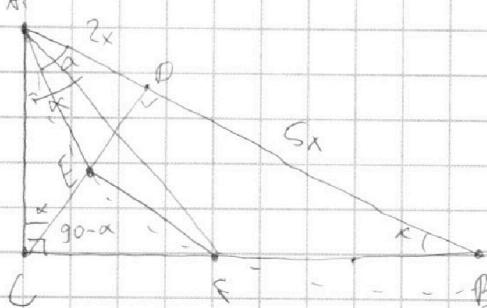


- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N°2



$$\textcircled{1} \frac{AB}{BD} = 1, x = \frac{7}{8}$$

$$\text{поскольку } BD = 5x \Rightarrow AB = 7x \\ \Rightarrow AD = 2x$$

$$\text{поскольку } \angle EAB = \alpha$$

и в  $\triangle EABF$  - вписанная  
прямая, то она равнодобр-  
енческ.  $\Rightarrow \angle EAB = \angle ABF = \alpha$   
т.к.  $AC$  - касательная к окр-ти,

но  $\angle CAE = \angle ABF = \alpha$  (угол между касательной и секущей)

$$\frac{S_{ACP}}{S_{CEF}} = \left( \frac{AD}{AB} \cdot S_{ABC} \right) : \left( \frac{CE}{CD} \cdot \frac{CF}{CB} \cdot \frac{DB}{AB} \cdot S_{ABC} \right) = \frac{AD \cdot CP \cdot BC \cdot AB}{AB \cdot EC \cdot CF \cdot DB} \cdot \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} =$$

$$= \frac{AD}{PB} \cdot \left( \frac{BC}{CF} \right)^2 \text{ т.к. } EF \parallel AB, \text{ то } \frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{AC \cdot \operatorname{tg} \alpha}{CB} = \frac{CP}{BD} \cdot \operatorname{tg} \alpha \text{ т.к. } \frac{AC}{CD} = \frac{CP}{BD} = \cos \alpha \begin{cases} \text{т.к. } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ (\text{т.к. } \angle ACD = 90^\circ - \angle ACD = 90^\circ - \alpha, \text{ т.к.}) \end{cases}$$

$$\angle PCB = 90^\circ - \angle DBC = 90^\circ - \alpha$$

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CP}{BD} \text{ в силу критерия с-ка } \triangle ACD \sim \triangle CBD \text{ по}$$

3 условия (CB - вн. биссектрисы прямого угла с-ка)

$$\Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow CD = \sqrt{2x \cdot 5x} = x\sqrt{10} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{AD}{CD} = \frac{2x}{x\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ACP}}{S_{CEF}} = \frac{AD}{BD} \cdot \left( \frac{BC}{CF} \right)^2 = \frac{AD}{BD} \cdot \left( \frac{BD \cdot \operatorname{tg} \alpha}{CD \cdot \operatorname{tg} \alpha} \right)^2 = \frac{AD}{BD} \cdot \frac{2x}{5x} \cdot \left( \frac{5x}{\sqrt{10}x \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}} \right)^2 =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \left( \frac{5}{2} \right)^2 = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$\text{Ответ: } \frac{S_{ACP}}{S_{CEF}} = \frac{5}{2} = 2,5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N=3$$

$$\text{10) } \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$\cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{4\pi}{10}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin x - \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) = 0 \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$2 \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) = 0$$

$$\textcircled{1} \quad \sin\left(\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5}\right) = 0$$

$$\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5} = \sqrt{n}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\sqrt{n}}{2} - \frac{\pi}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{2} \quad \cos\left(\frac{3x}{5} - \frac{\pi}{5}\right) = 0$$

$$\frac{3x}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \sqrt{k}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{3}\sqrt{k}, k \in \mathbb{Z}$$

Ответы:  $x \in \left\{ \frac{5\sqrt{n}}{2} - \frac{\pi}{5} \mid n \in \mathbb{Z} \right. ; \left. \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{3}\sqrt{k} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

Ответ:  $\frac{5\sqrt{n}}{2} - \frac{\pi}{5}, n \in \mathbb{Z}, \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{3}\sqrt{k}, k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$  при  $b_9 \propto \in [-\frac{\sqrt{32}}{7}; \frac{\sqrt{32}}{7}]$  решений нет (четыре)

В остальных случаях, зная  $y$  можно решить ③ можно  
получить 4 решения.

$$③ \Leftrightarrow y = \frac{b}{6a} - \frac{5}{6a}x \quad (a \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{6a}x \in (-\frac{\sqrt{32}}{7}, \frac{\sqrt{32}}{7})$$

$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{32}}{7} \leq \frac{5}{6a}x \leq \frac{\sqrt{32}}{7}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{7} \\ -\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < \frac{35}{6\sqrt{32}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a > \frac{35}{6\sqrt{32}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < -\frac{35}{6\sqrt{32}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a > -\frac{35}{6\sqrt{32}} \end{cases}$$

$$a \in \left(-\frac{35}{6\sqrt{32}}, \frac{35}{6\sqrt{32}}\right)$$

или 0 подходит

Ответ: при  $a \in \left(-\frac{35}{6\sqrt{32}}, \frac{35}{6\sqrt{32}}\right) \times \{0\}$

спр 2 вг 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

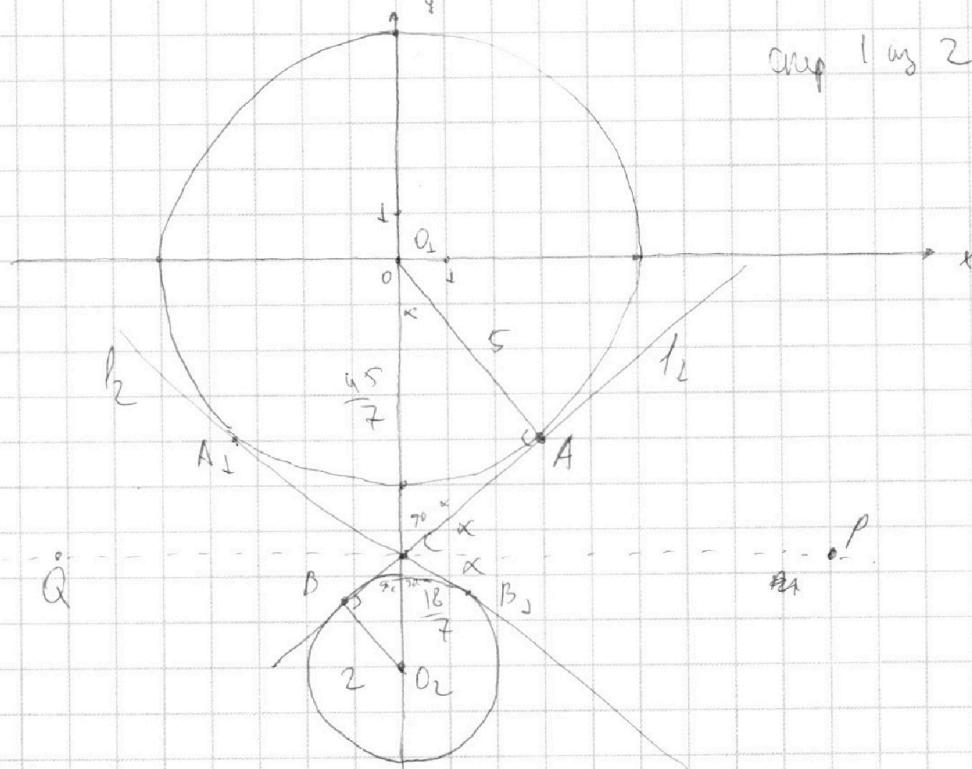
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

**МФТИ.**



$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6ay = b - 5x & (3) \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 & (1) \\ x^2 + (y+9)^2 - 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

(График функций (1) и (2) представляет собой окружности с центрами в  $O_1(0,0)$  и радиусами 5 и окружность с центром в  $O_2(0,9)$  радиусом 4. График (3) - прямая)

Пусть  $l_1$  и  $l_2$  - общие внешние касательные к 2 окружностям (см. рисунок). Пусть точки касания:  $A$  и  $B$  и  $C = (O_1O_2) \cap (AB)$ .  
 $\Rightarrow O_1A \perp AB$  и  $O_2B \perp AB$  т.к.  $O_1$  и  $O_2$  - центры окружностей  $\Rightarrow \angle O_1AC$  краттен  $\angle O_2BC$  по 3 улам.

$$\Rightarrow \frac{O_1C}{CO_2} = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{5}{2} \Rightarrow O_1O_2 = 9 \Rightarrow O_1C = \frac{45}{7}, O_2C = \frac{18}{7}$$

(1)  $a=0$  и  $b=0 \Rightarrow 5x=0 \Rightarrow a=0$  параллельны, в исключении случаев касания, т.к.  $a \neq 0$  Пусть  $\angle CAO_1 = \alpha$  Пусть  $PQ \parallel O_1O_2$  и  $C \in PQ$   $\angle ACP = 90^\circ - \angle O_1CA = \alpha \Rightarrow \angle BCP = \alpha$  в силу симметрии (отвёрстия из улоб)

$$\begin{aligned} l_1 &= \operatorname{tg} \alpha \cdot x - O_1C && \text{по теореме Медиана } b \parallel (AO_1) : AC^2 = O_1^2 - O_1A^2 \\ \Rightarrow l_1 &= -\operatorname{tg} \alpha \cdot x - O_1C && \Rightarrow AC = \frac{5\sqrt{32}}{7} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{O_1A} = \frac{\sqrt{32}}{7} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt[4]{x^5}$$

$$(\log_{11} x - 6(\log_x 11) = \log_x \sqrt[4]{21} - 5 + \log_{11} (0,5y) + \log_{(0,5y)} 11 = \log_{\frac{1}{0,125y} 3}(11^3) - 5$$

$$\text{пусть } a = \log_{11} x \quad b = \log_{11} 0,5y$$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{b}{3a} \frac{16}{3a} + 5 = 0 \\ b^4 + \frac{16}{3b} + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b^2 + a^2)(b-a)(a+b) + \frac{16(b+a)}{3ab} = 0 \\ a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{с. 1) } b-a=0$$

$$\text{с. 2) } \begin{cases} (b^2 + a^2)(a+b) + \frac{16}{3ab} = 0 \\ a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\log_x 11 = \log_{0,5y} 11$$

$$x = 0,5y$$

$$xy = 2$$

$$f(a) = a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0 \quad a^4 + \frac{16}{3a} = 5 \quad \text{если } a \neq 0 \text{ то}$$

$$f'(a) = 4a^3 - \frac{16}{3a^2} = 0 \quad \Rightarrow f(a) \uparrow \text{ на } (0; +\infty) \quad \text{на } (-\infty, 0)$$

$$12a^5 = -16 \quad \text{имеем не более 1 решение}$$

если  $a \rightarrow -\infty$

$f(a) \rightarrow \infty$

если  $a \rightarrow 0$

$f(a) \rightarrow \infty$

если  $a \rightarrow +\infty$

$f(a) > 0 \Rightarrow \text{но на } (-\infty, 0) f(a) > 0 \Rightarrow$

$\text{если } a < 0 \Rightarrow f(a) < 0$

$\Rightarrow$  по теореме о том что промежутком между  $f(a)$  имеем не более 2 решений

$f(a) > 0 \Rightarrow$  2 решения

$f(a) < 0 \Rightarrow$  2 решения

$f(a) = 0 \Rightarrow$  1 решение

$f(a) > 0 \Rightarrow$  2 решения

$f(a) < 0 \Rightarrow$  2 решения

$f(a) = 0 \Rightarrow$  1 решение

$f(a) > 0 \Rightarrow$  2 решения

$f(a) < 0 \Rightarrow$  2 решения

$f(a) = 0 \Rightarrow$  1 решение

$f(a) > 0 \Rightarrow$  2 решения

$f(a) < 0 \Rightarrow$  2 решения

$f(a) = 0 \Rightarrow$  1 решение

$f(a) > 0 \Rightarrow$  2 решения

$f(a) < 0 \Rightarrow$  2 решения

$f(a) = 0 \Rightarrow$  1 решение

$f(a) > 0 \Rightarrow$  2 решения

$f(a) < 0 \Rightarrow$  2 решения

$f(a) = 0 \Rightarrow$  1 решение

Заметим, что если  $x, 0,5y$  - решения, то и  $(\frac{1}{0,5y}, \frac{1}{x})$  -

- тоже решение

$$\begin{matrix} 2 & 0,5y & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0,5y & x & 2 \end{matrix}$$

если очень маленькое

$f(a) > 0$

$\Rightarrow$  мин  $f(a) > 0$

на  $(-\infty, 0)$  нет пересечений

с осями  $x$ .

$\Rightarrow$  решений остается один  $x, 0,5y$

нет

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

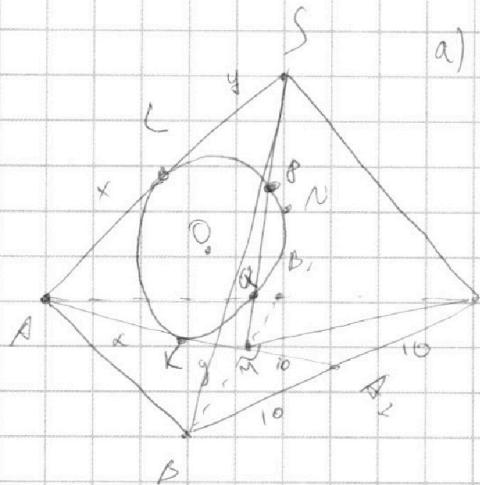


- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N° 7



a) ① Пусть  $AC = x$ ,  $SC = y$ ,  $SP = MQ = z$   
Тогда итак  $таки S = \text{один из середок}$   
 $= z(SM - z) = y^2$

$$\text{А таки } M = z(SM - z) = Mx^2 \Rightarrow MK = y$$

$M$ - центр  $\triangle ABC$ . по свойству  
меридиан  $\frac{AM}{MA_1} = \frac{2}{1} \Rightarrow MA_1 = \frac{AM}{2}$

$$AM = x + y = AS = 20$$

$$\Rightarrow MA_1 = 10 = A_1C = BA_1 = \frac{1}{2} BC$$

$\Rightarrow \triangle BMC$  - прямодолонный (меридиана равна средне геометрическому)

$$S_{BMC} = \frac{MA_1}{AA_1} \cdot S_{ABC} = \frac{MC \cdot BC}{2}$$

$$\Rightarrow MA_1 \cdot MC \cdot BC = 2 \cdot MA_1 \cdot S_{ABC}$$

$$\frac{1}{2} AA_1 \cdot \frac{2}{3} BB_1 \cdot \frac{2}{3} CC_1 = 2MA_1 \cdot S_{ABC}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot MA_1 \cdot S_{ABC}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 180}{2} = 8100$$

Объем: произведение длин меридиан = 8100

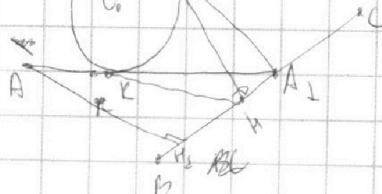
②)  $SN = 6 \Rightarrow SL = 6 = y$  (касательное из ортого мордой)

$$\Rightarrow x = 14$$

Пусть  $A_1, K, A_1, N_1$  - касательные, причем  $N_1 \in KA_1 \cap O$ , где  $O$  - центр  $\odot$

расстояние  $KA_1$

$A_1N_1 = A_1K$ . Пусть  $N_1M \perp BC$   $\Rightarrow KN_1 \perp BC$  в силу шиповки



$$\frac{KM}{AH_1} = \frac{KA_1}{AA_1} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} \Rightarrow KM = \frac{8}{15} \cdot AH_1 = \frac{8}{15} \cdot \frac{S_{ABC}}{BC} =$$

$$= \frac{8 \cdot 18}{15} = \frac{48}{5}$$

чп 1 из 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

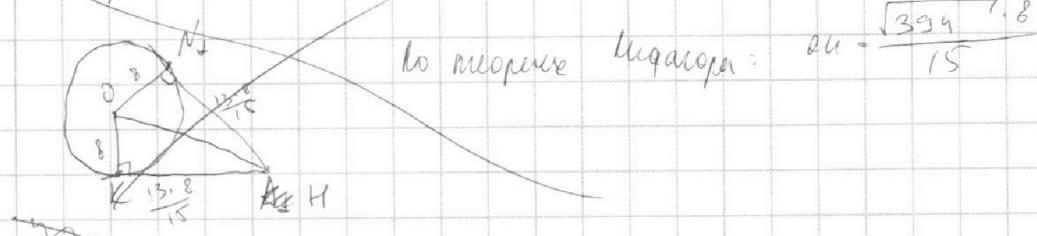
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ**

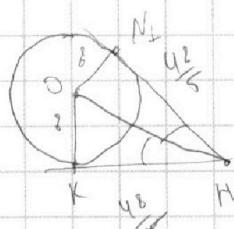
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим плоскость  $HM \perp OK$



по теореме косинусов:  $OH = \frac{\sqrt{394} \cdot 7.8}{15}$

Рассмотрим плоскость  $HN \perp OK$



по теореме косинусов:

$$OM = \frac{8\sqrt{51}}{5} \text{ Пусть } \varphi = \angle OHK$$

$$\cos \varphi = \frac{6\sqrt{51}}{5 \cdot 8\sqrt{51}} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$$

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2 \varphi - 1 = \frac{2 \cdot 36}{51} - 1 = \boxed{\frac{7}{51}} \quad \text{двуугранный угол} = \arccos \frac{7}{51} = 2\varphi$$

Ответ:  $\arccos \frac{7}{51}$   $\boxed{\frac{7}{51}}$

очерк

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                          |                                     |                          |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$N=5$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{xy} 11 = (\log_{xy} \frac{1}{12}) - 5 \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,5y} \frac{1}{12} - 5$$

$$\log_{0,125y^2} (15^{-13}) - 5$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_{11}^4 x - \frac{16}{3} \log_{xy} 11 + 5 = 0 \\ (\log_{11}^4 0,5y + \frac{16}{3} \log_{0,5y} 11 + 5 = 0) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \\ xy > 0 \\ y \neq 1 \\ y \neq 0,5 \\ \log_{11}^4 x - \frac{16}{3} \log_{xy} 11 + 5 = 0 \\ (\log_{11}^4 0,5y - \log_{11}^4 x + \frac{16}{3} \log_{0,5y} 11 + \\ + \frac{16}{3} (\log_{0,5y} x / 11) = 0 \end{array} \right.$$

$$\textcircled{1} \quad (\log_{0,5y} 11 + \log_x 11 = 0) \quad \textcircled{2} \quad \log_{0,5y} 11 + (\log_x 11 + 10) \quad (\text{вычитаем})$$

Заметили, что если  $\log_{11}^4 x = \log_{11}^4 0,5y$  — решение, то  $(\frac{1}{x}, \frac{1}{0,5y})$  тоже

$$\log_{11}^4 x = \log_{11}^4 0,5y \Rightarrow \log_{11}^4 x = \log_{11}^4 0,5y$$

$$\text{тогда } a = \log_{11}^4 x \Rightarrow f(a) = a^4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0$$

$$f'(a) = 4a^3 - \frac{16}{3} \Rightarrow f'(a) \text{ не может иметь больше}$$

2 решений (по теореме Коши о промежуточном значении)

если  $f(a) = 0$  и  $f(b) = 0$ , то существует  $\xi \in [a, b]$  такое, что  $f'(\xi) = 0$

$$\log_{0,5y} 11 = -\log_x 11 + 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{x}} 11 = \log_{0,5y} 11$$

⇒ если  $(\frac{1}{x}, \frac{1}{0,5y})$  — решение, то  $(\frac{1}{0,5y}, \frac{1}{x})$  — тоже решение

$$\textcircled{1} \Rightarrow \log_{11}^4 0,5y \left( \log_{0,5y} 11 + \log_x 11 \right) \left( \log_{11}^2 0,5y + \log_{11}^2 x + \frac{16}{3} \right) = 0$$

=> 2 решения та же

$$\Rightarrow \text{так} \quad 0,5y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow xy = 2 \quad (\text{т.к. } x \neq 0)$$

$$\begin{aligned} \log_x 11 &= -\log_{0,5y} 11 = \\ &= \log_{\frac{1}{0,5y}} 11 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{0,5y} = \frac{x}{0,5y} = \frac{x}{xy} = \frac{1}{2}$$

Обрати  $\times$  на 2

$$\begin{aligned} \log_{0,5y} 11 &= -\log_x 11 = \\ &= \log_{\frac{1}{x}} 11 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

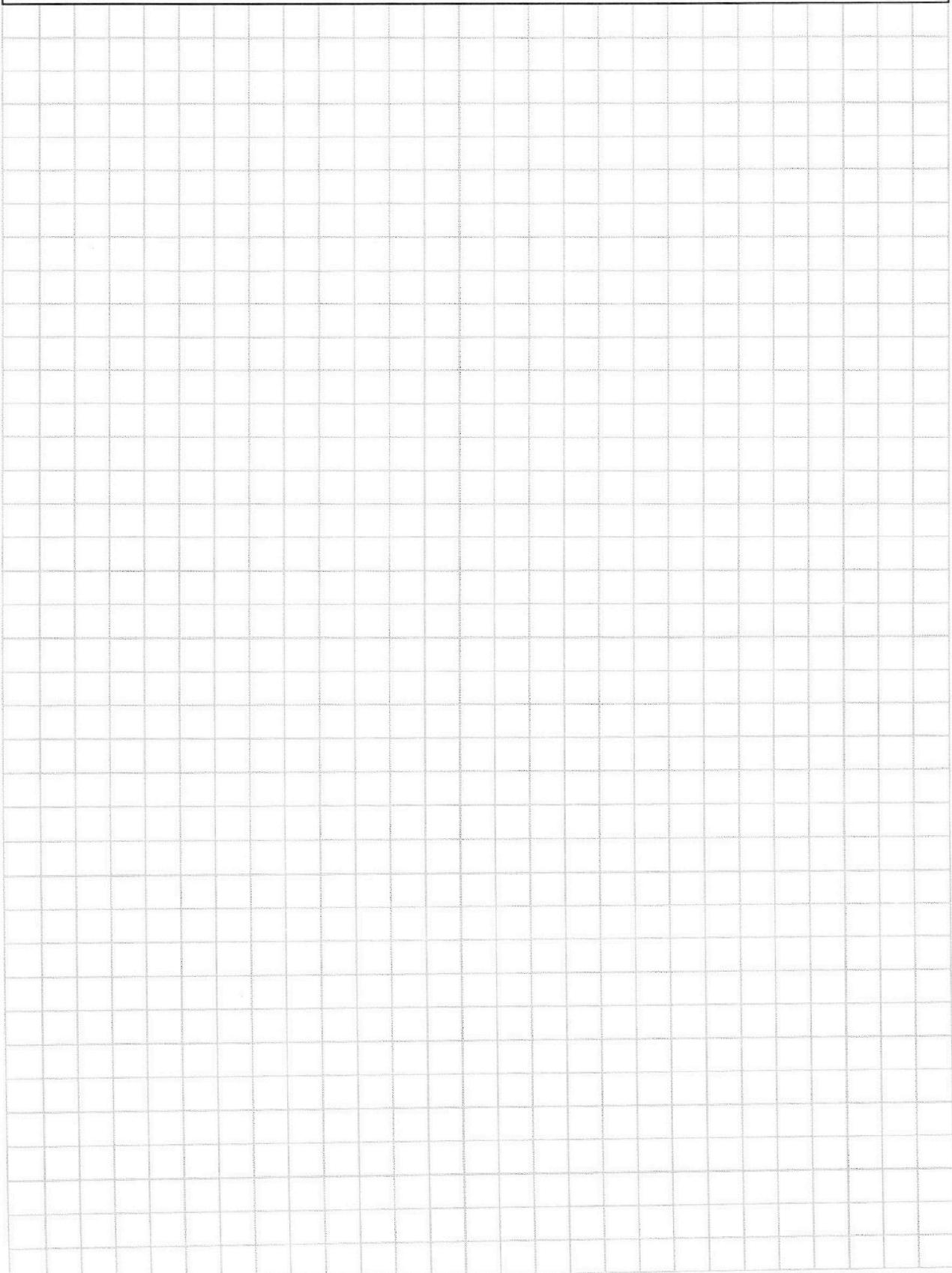
5

6

7

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

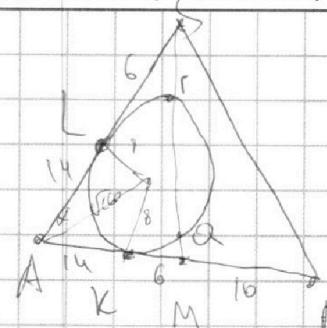
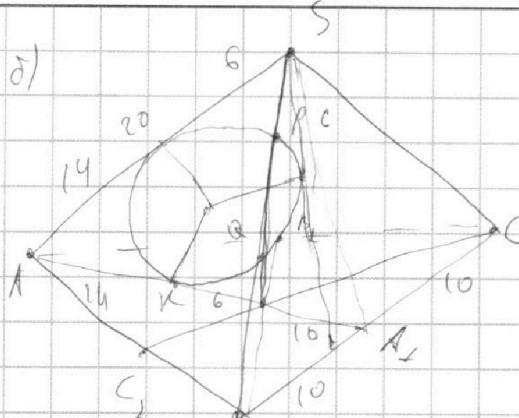
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{196+64} = \sqrt{260}$$

$$\cos \alpha = \frac{14}{\sqrt{260}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

$$\sin 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 49,2 \quad \frac{49,2}{65} =$$

$$\frac{98}{65} - 1 = \frac{33}{65}$$

$$1 + \frac{6}{5} \sqrt{1 + \frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{51}}{5} \cdot 8$$

$$\frac{85\sqrt{1}}{5}$$

окр K

посл АК - высота в о. АМК  $\Rightarrow \angle AH \cdot DC = 180^\circ$

$$\Rightarrow AH = \frac{360}{20} = 18$$

$$\frac{KA_1}{AA_1} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} \Rightarrow KH_2 = \frac{8}{15} \cdot AH \quad \text{окр АМ}$$

$$= \frac{8}{15} \cdot 18 = \frac{48}{5}$$

$$12 - 51 = \frac{51}{17}$$

по теореме косинусов  $OK_1 = \frac{8\sqrt{5}}{5}$

$$\frac{48 \cdot 5}{5 \cdot 8\sqrt{5}} =$$

$$\Rightarrow \cos 2\psi = 2\cos^2 \psi - 1 =$$

$$= \frac{2 \cdot 36}{51} - 1 = \frac{21}{51} = \frac{7}{17}$$

окр cos  $\frac{7}{17}$

$$-\frac{\sqrt{12}}{7} \leq \frac{-5}{6a}$$

$$\frac{\sqrt{12}}{7} \geq \frac{5}{6a}$$

$$- \frac{5}{6a}$$

$$a > 0$$

$$\begin{cases} a > \frac{55}{6\sqrt{32}} \\ a < \frac{35}{6\sqrt{32}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \in (-\infty, 0) \cup \left( \frac{35}{6\sqrt{32}}, \infty \right)$$

$$\begin{cases} a < 0 \\ a < \frac{35}{6\sqrt{32}} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

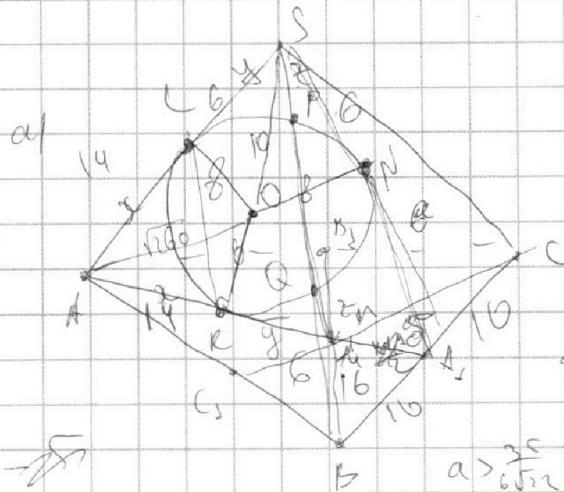
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

8-с  
 $a^2 + b^2 = c^2$

$$\begin{aligned} n=1 \\ ab &= 2^{13} \cdot 3^{11} \cdot k \\ bc &= 2^4 \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot n \\ ac &= 2^{16} \cdot 3^{15} \cdot 5^{28} \cdot l \end{aligned}$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot k^2 \cdot l^2$$

$$abc = \sqrt{2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot k^2 \cdot l^2} = 2^{18} \cdot 3^{29} \cdot 5^{26} \cdot \sqrt{3 \cdot k \cdot l}$$

$$= [2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{26}]^{30}$$

$$\begin{aligned} a+b &= 6 \\ b+c &= 14 \\ a+c &= 16 \end{aligned}$$

нашёл все же решение  
косоугольником  
или  $a+k+l=6$

$$2=f \text{ и } l=3$$

$$\begin{aligned} \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} &= \frac{AD}{PB} \cdot \frac{Sc_{AB}}{A} : \frac{CE}{CP} \cdot \frac{CF}{CB} \cdot \frac{BD}{AB} \cdot \frac{Sc_{AB}}{AB} = \\ &= \frac{AP}{AB} \cdot \frac{CP}{CE} \cdot \frac{CB}{CF} \cdot \frac{AB}{BD} \end{aligned}$$

$$\frac{AP}{BD} = 1/4 = \frac{7}{5}$$

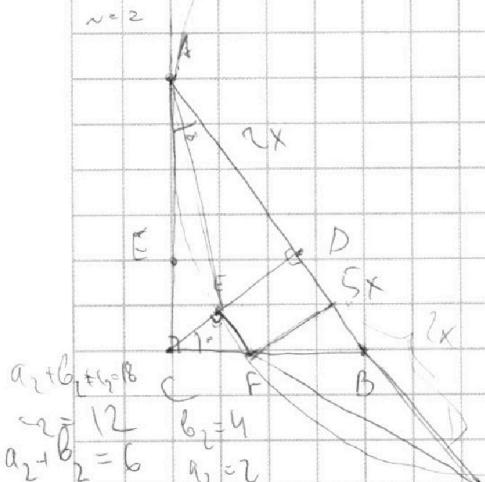
$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{2}{7} \quad \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AB}{BD} = \boxed{\frac{2}{5}} = \frac{AD}{BP}$$

$$\frac{AD}{BP} = \frac{AD}{CP} \cdot \frac{CP}{DB} = \frac{AD}{AC} = \frac{CP}{BD}$$

$$ad \leq h+l \geq 6$$

$$l+m \geq 14$$

$$ad+m \geq 3$$



$$\begin{aligned} a_2+b_2 &= 6 \\ a_2 &= 6 - b_2 \\ a_2 &= 6 - 4 = 2 \\ b_2 &= 4 \\ a_2+b_2 &= 6 \\ a_2 &= 6 - b_2 \\ b_2 &= 6 - 2 = 4 \\ a_2+b_2 &= 10 \\ a_2 &= 10 - b_2 \\ a_2 &= 10 - 4 = 6 \end{aligned}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{4} \Rightarrow x = 30^\circ$$

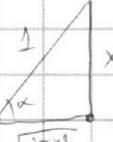
$$2x \cdot \frac{2}{5} = 5x - 3x$$

$$CD^2 = BD \cdot AD = 10x^2 = 2x \cdot \frac{2}{5} = 8x^2 \Rightarrow 80x^2 = 4x$$

$$x = \frac{2}{50}$$

$$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

n=3



$$\sin x = \cos \frac{90^\circ - 2x}{10}$$

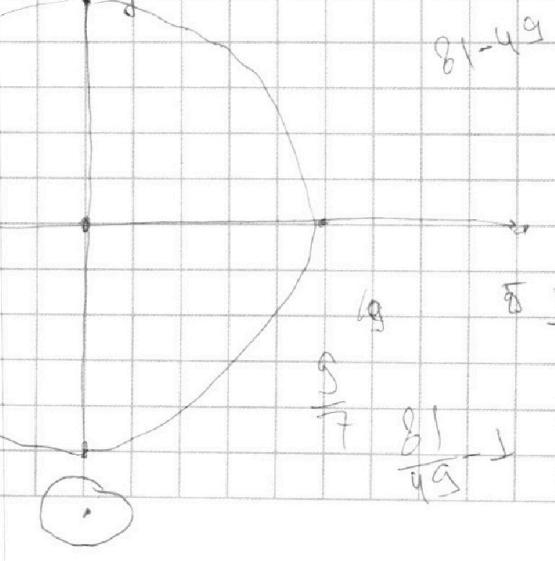
$$\begin{cases} 5x + 6ay - 8 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$

$$81 - 49$$

нр а = const  
гипотенуза квадрат

$$y = \frac{6 - 5x}{6a}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

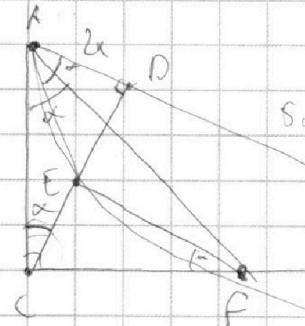
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left( \log_{11} 0,5y + \log_{11} x \right) \left( \log_{11} 0,5x + \log_{11} y \right) = 0$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{CB}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{AC \cdot \operatorname{tg} \alpha}{CB}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{AB}{BP} - 1,4 = \frac{7}{5}$$

из  $BP = 5x$ ,  $AP = 2x$

$$\therefore AP = 2x$$

$$CP^2 = AD \cdot PB = 10x^2 \Rightarrow CD = x\sqrt{10}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{AC \cdot \operatorname{tg} \alpha}{CB} \rightarrow \frac{CE}{ED} = \frac{CD - AP \operatorname{tg} \alpha}{CP}$$

$$\frac{AL}{CD} = \frac{CB}{CB}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{AC \cdot \operatorname{tg} \alpha}{CB} =$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AP}{CP} = \frac{2x}{x\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{CEF}} = \frac{1}{AB} \cdot \frac{AD}{AB} \cdot \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} : \left( \frac{CE}{CP} \cdot \frac{CF}{CB} \cdot \frac{BD}{AB} \right) \cdot S_{ABC} = \frac{AP \cdot CP \cdot CB \cdot AB}{AB \cdot CE \cdot CF \cdot BD}$$

$$= \frac{AD}{BD} \cdot \frac{CP}{CE} \cdot \frac{CB}{CF}$$

$$x = 3 - \frac{10}{3} \quad y = 2x$$

$$y = -2x$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{CP}{BC}$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{BD}$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{CP}{BD} = \frac{\sqrt{10}x}{5x} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{CE}{CB} \cdot \frac{\sqrt{10}}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2x}{5x} \cdot \left( \frac{CB}{CF} \right)^2 =$$

$$\frac{2 \cdot 25}{5 \cdot 4} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Ошибки: [2,5]

-1/3

$$-\frac{2}{3}(a-b)(a+b)^2 + \frac{16}{3} = 0$$

$$\frac{27}{2} \cdot 0,75 \cdot \frac{8}{3}$$

н-5

$$\log_{11} 2 + 6 \log_{11} 11 = \log_{11} 3 \cdot \frac{1}{121} - 5 \quad u \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,5y} 11^{-1/2}$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} 11 + \frac{2}{3} \log_{11} 11 + 5 = 0 \quad \log_{11}^4 0,5y + \log_{0,5y} 11 + \frac{13}{3} \log_{0,5y} 11 + 5 = 0$$

$$\log_{11}^4 2 - \frac{16}{3} \log_{11} 11 + 5 = 0$$

$$\log_{11}^4 0,5y + \log_{0,5y} 11 \cdot \frac{16}{3} + 5 = 0$$

$$\log_{11}^4 x = \log_{11}^4 0,5y \quad \log_{11}^4 0,5y - \log_{11}^4 x + \log_{11} \frac{16}{3} (\log_{0,5y} 11 + \log_{11} 11) = 0$$

$$\text{i}) (\log_{0,5y} 11 + \log_{11} 11 = 0)$$

$$\text{ii}) (a^2 + b^2)(a+b) = 0$$

$$t = 0$$

$$\log_{11}^4 0,5y + \log_{0,5y} 11 \cdot \frac{16}{3} + 5 = 0$$

$$\text{iii}) t^2 + 2ab = 0$$

$$\text{iv}) \frac{t^2 - 2ab}{a^2 + b^2} = -2ab$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11} 0,5y - \log_{11} x + \frac{16}{3} (\log_{0,5y} 11 + \log_x 11) = 0$$

$$4a^3 - \frac{16}{3x^2} = 0$$

$$\textcircled{1} \quad \log(a^2 + b^2)(a - b) = 0 \quad \textcircled{2} \quad 4a^3 - a + b = 0$$

$$(a - b)^2 + 2ab)(a - b) = 0$$

$$a^4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0$$

$$\frac{16}{3} \sqrt{\frac{16}{3}} - \frac{16}{3} \sqrt{\frac{16}{3}}$$

$$11a - b = 0 \quad \textcircled{3} \quad (a - b)^2 + 2ab = 0$$

$$a^2 + b^2 = 0$$

$$a^3 = \frac{4}{3}$$

$$\log_{11} 0,5y = \log_x 11$$

$$\begin{cases} \log_{11} 0,5y \\ \log_x 11 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 0,5y$$

$$\log_{11} x = \frac{16}{3} \log_x 11 + 5 = 0$$

$$\frac{16}{3}a + 5 = 0$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$$

$$\log_{11} x - 6 \log_x 11 = \log_x \frac{1}{12} - 5$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = (\log_{0,5y} 11)^{-1} - 5$$

$$\log_{11} x - \frac{16}{3} \log_x 11 + 5 = 0$$

$$\log_{11}^4 0,5y + \frac{16}{3} \log_{0,5y} 11 + 5 = 0$$

$$\log_{11} a^4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0$$

$$a^4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0$$

$$a(b^4 - a^4) + \frac{16}{3}(a + b) = 0$$

$$(a+b)(a-b)(a^2 + b^2) + \frac{16}{3} = 0$$

$$-a + b = 0$$

$$a^3 - b^3 - a^2b +$$

$$+ b^3 - a^2b +$$

$$+ b^2 - a^2b +$$

$$+ b^3 - a^2b +$$

$$\textcircled{1} \quad a + b = 0$$

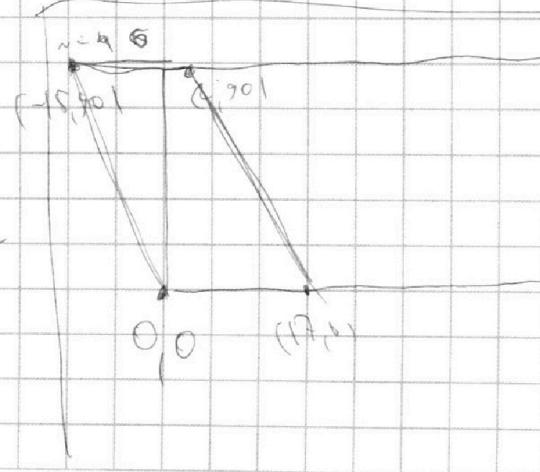
$$\textcircled{2} \quad (a - b)(a^2 + b^2) + \frac{16}{3} = 0 \quad (\log_{11} x - \log_{0,5y} 11)(\log_{0,5y}^2 x + \log_{0,5y}^2 11 + \frac{16}{3}) = 0$$

$$\log_x 11 = \log_{0,5y} 11 \quad (\log_x 11 - \log_{0,5y} 11)$$

$$\begin{cases} 0,5y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0,5 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } 0,5 \quad | \quad 2$$



$$6x_2 - 6x_3 + (y_2 - y_1) = 4$$

$$6x_2 + y_2 = 6x_3 + y_1$$

$$\log_x 11 = 4 - \log_{0,5y} 11 =$$

$$= \log_{\frac{1}{0,5y}} 11$$

$$\log_{0,5y} 11 = -\log_x 11 =$$

$$= \log_{\frac{1}{x}} 11$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

