МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, $bc$ делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, $ac$ делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник $ABC$. Окружность, касающаяся прямой $AC$ в точке $A$, пересекает высоту $CD$, проведённую к гипотенузе, в точке $E$, а катет $BC$ – в точке $F$. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника $ACD$ к площади треугольника $CEF$.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 25\right)\left(x^2 + y^2 + 18y + 77\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа $x$ и $y$ удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения $xy$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$. Сфера $\Omega$ касается ребра $AS$ в точке $L$ и касается плоскости основания пирамиды в точке $K$, лежащей на отрезке $AM$. Сфера $\Omega$ пересекает отрезок $SM$ в точках $P$ и $Q$. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника $ABC$ равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$.

б) Найдите двугранный угол при ребре $BC$ пирамиды, если дополнительно известно, что $\Omega$ касается грани $BCS$ в точке $N$, $SN = 6$, а радиус сферы $\Omega$ равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☒ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N=1

$ab \vdots 2^6 3^{13} 5^{11}$ $\Rightarrow$ $\cancel{a^2}\ ab\cdot bc\cdot ac = a^2b^2c^2 \vdots 2^{36} 3^{59}\cdot 5^{52}$

$bc \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{13}$ Пусть $ab = 2^6 3^{13} 5^{11} k$

$ac \vdots 2^{16} 3^{25} 5^{28}$ $bc = 2^{14} 3^{21} 5^{13} l$

$ac = 2^{16} 3^{25} 5^{28} m$

$\Rightarrow ab\cdot bc\cdot ac = 2^{36}\cdot 3^{59}\cdot 5^{52}\cdot klm$

$abc = 2^{18}\cdot 3^{29}\cdot 5^{26}\sqrt{3klm}$ причем

$\cancel{\Gamma}\ abc \in N \Leftrightarrow \sqrt{klm\cdot 3} \in N$ и $k\in N, l\in N,$ $m\in N$

Очевидно, что $klm \vdots 3 \Rightarrow$ одно из $k$, $l$ или $m$ делится на 3 и $klm$ минимально при 2 значениях равных 1 и одно 3 $\Rightarrow \sqrt{3klm} = 3 \Rightarrow abc = 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{26}$ (минимально)

Ответ: $2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{26}$

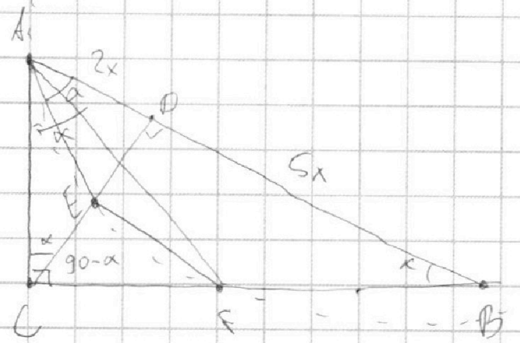
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

*Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2




① $\frac{AB}{BD} = 1,4 = \frac{7}{5}$

Пусть $BD = 5x \Rightarrow AB = 7x$
$\Rightarrow AD = 2x$

Пусть $\angle EAB = \alpha$

т.к $EABF$ — вписанная трапеция, то она равнобедренная. $\Rightarrow \angle EAB = \angle ABF = \alpha$

т.к $AC$ — касательная к окр-ти, то $\angle CAF = \angle ABF = \alpha$ (угол между касательной и секущей)

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \left(\frac{AD}{AB}\cdot S_{ABC}\right) : \left(\frac{CE}{CD}\cdot\frac{CF}{CB}\cdot\frac{DB}{AB}\cdot S_{ABC}\right) = \frac{AD\cdot CD\cdot BC\cdot AB}{AB\cdot EC\cdot CF\cdot DB}\cdot\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} =$

$= \frac{AD}{DB}\cdot\left(\frac{BC}{CF}\right)^2$ т.к $EF \parallel AB$, то $\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB}$

$\frac{CF}{CB} = \frac{AC\cdot tg\alpha}{CB} = \frac{CD}{BD}\cdot tg\alpha$ т.к $\frac{AC}{CD} = \frac{CB}{BD} = \cos\alpha$ ($\Delta$-ки прямоуг $\Rightarrow \angle ACD = 90 - \angle ACD = 90 - \alpha$, т.к $\angle DCB = 90 - \angle DBC = 90 - \alpha$)

$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$ в силу подобия $\Delta$-ков $ACD$ и $CDB$ по 3 углам (св-во высоты прямоуг $\Delta$-ка)

$\Rightarrow CD^2 = AD\cdot BD \Rightarrow CD = \sqrt{2x\cdot 5x} = x\sqrt{10} \Rightarrow tg\alpha = \frac{AD}{CD} = \frac{2x}{x\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{AD}{BD}\cdot\left(\frac{BC}{CF}\right)^2 = \frac{AD}{BD}\cdot\left(\frac{BD}{CD\cdot tg\alpha}\right)^2 = \frac{2x}{5x}\cdot\left(\frac{5x}{\sqrt{10}x\cdot\frac{2}{\sqrt{10}}}\right)^2 =$

$= \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} = 2,5$

Ответ: $\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{5}{2} = 2,5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

По формулам приведения:
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$

$\cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)$

$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{4\pi}{10}\right)$

$\Leftrightarrow \sin x - \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) = 0$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$2\sin\frac{\left(x - \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5}\right)}{2}\cos\left(\frac{x + \frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}}{2}\right) = 0$

① $\sin\left(\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5}\right) = 0$

$\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5} = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{5\pi n}{2} - \frac{\pi}{5},\ n \in \mathbb{Z}$

② $\cos\left(\frac{3x}{5} - \frac{\pi}{5}\right) = 0$

$\frac{3x}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

~~Ответ:~~ $\cancel{x \in \left\{\frac{5\pi n}{2} - \frac{\pi}{5} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z},\ \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}}$

Ответ: $\frac{5\pi n}{2} - \frac{\pi}{5},\ n \in \mathbb{Z},\ \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\Rightarrow$ при $b/a \in \left[-\frac{\sqrt{32}}{7}; \frac{\sqrt{32}}{7}\right]$ решений нет (очевидно)

В остальных случаях, двигая и прямую ③ можно получить 4 решения.

③ $\Leftrightarrow y = \frac{b}{6a} - \frac{5}{6a}x \quad (a \neq 0)$

$\Rightarrow -\frac{5}{6a} \notin \left[-\frac{\sqrt{32}}{7}; \frac{\sqrt{32}}{7}\right]$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} -\frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{7} \\ -\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$

~~$-\frac{\sqrt{32}}{7} \le -\frac{5}{6a} \le \frac{\sqrt{32}}{7}$~~

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ a < \frac{35}{6\sqrt{32}} \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ a > \frac{35}{6\sqrt{32}} \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ a < -\frac{35}{6\sqrt{32}} \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ a > -\frac{35}{6\sqrt{32}} \end{cases} \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$ $a \in \left(-\frac{35}{6\sqrt{32}}; \frac{35}{6\sqrt{32}}\right)$

т.к 0 подходит

Ответ: при $a \in \left(-\frac{35}{6\sqrt{32}}; \frac{35}{6\sqrt{32}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

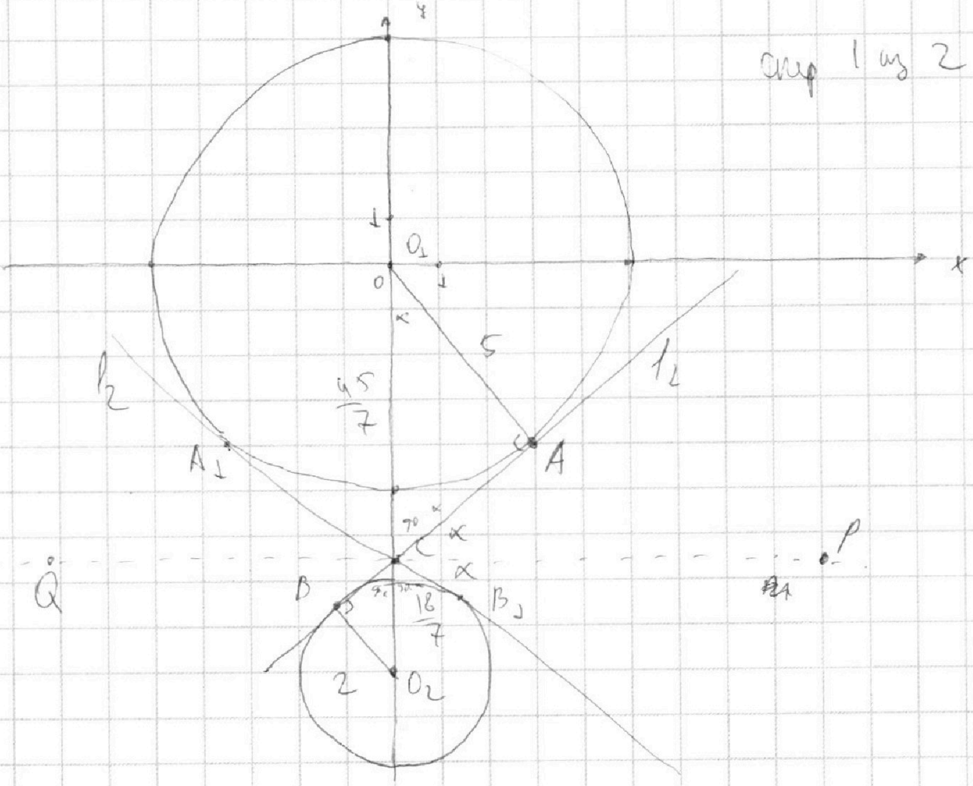
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

Стр 1 из 2




$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6ay = b-5x \quad (3) \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-25=0 \quad (1) \\ x^2+(y+9)^2-4=0 \quad (2) \end{array}\right. \end{cases}$$

Графики функций (1) и (2) представляют собой окр-ти с центром в $O_1(0;0)$ и радиусом 5 и окр-ти с центром в $O_2(0;-9)$ радиуса 2. График (3) - прямая

Пусть $l_1$ и $l_2$ - общие внутренние касательные к 2 окружностям (см. рисунок) Пусть точки касания: $A$ и $B$ и $C=(O_1O_2)\cap(AB)$ $\Rightarrow$ $O_1A \perp AB$ и $O_2B \perp AB$ т.к $O_1$ и $O_2$ - центры окр-тей $\Rightarrow \triangle O_1AC$ подобен $\triangle O_2BC$ по 3 углам.

$$\Rightarrow \frac{O_1C}{CO_2} = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{5}{2} \Rightarrow \text{ и } O_1O_2 = 9 \Rightarrow \quad O_1C = \frac{45}{7}, \quad O_2C = \frac{18}{7}$$

(1) $a=0$ то $b=0$ $\Rightarrow$ $5x=0$ $\Rightarrow$ $a=0$ подходит, в остальных случаях считаем, что $a \neq 0$. Пусть $\angle CAO_1 = \alpha$ ~~Пусть PQ // Ox O1~~ Пусть $PQ \parallel Ox$ и $C \in PQ$ $\angle ACP = 90 - \angle O_1CA = \alpha \Rightarrow$ $\angle B_1CP = \alpha$ в силу симметрии (очевидно из углов)

$$l_1 = \operatorname{tg}\alpha\, x - O_1C \qquad \text{По теореме Пифагора в } \triangle CAO_1:\ AC^2 = CO_1^2 - O_1A^2$$

$$\Rightarrow l_2 = -\operatorname{tg}\alpha\, x - O_1C \qquad \Rightarrow AC = \frac{5\sqrt{32}}{7} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{AC}{O_1A} = \frac{\sqrt{32}}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$ и $\log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{(0{,}5y)} 11 = \log_{0{,}125y^3}(11^{-5}) - 5$

Пусть $a = \log_{11} x$ $b = \log_{11} 0{,}5y$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0 \\ b^4 + \frac{16}{3b} + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b^2+a^2)(b-a)(a+b) + \frac{16(b+a)}{3ab} = 0 \\ a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ① $b - a = 0$ ② $\begin{cases} (b^2+a^2)(b-a) + \frac{16}{3ab} = 0 \\ a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0 \end{cases}$

$\log_x 11 = \log_{0{,}5y} 11$

$x = \frac{1}{0{,}5y}$

$xy = 2$

$f(a) = a^4 - \frac{16}{3a} + 5$

если $a\uparrow$, то $a^4\uparrow$ $\frac{16}{3a}\downarrow$ $-\frac{16}{3a}\uparrow$

$f'(a) = 4a^3 + \frac{16}{3a^2} = 0$ $\Rightarrow f(a)\uparrow$ на $(0;+\infty)$ на $(-\infty;0)$

$12a^5 = -16$ имеет не более 1 решения

~~$a = \sqrt[5]{\frac{16}{12}}$~~

~~при $a \to +\infty$ $f(a) \to +\infty$ при $a \to 0$ $f(a) \to \infty$~~

$\Rightarrow$ по теореме Коши о промежуточном значении $f(a)$ имеет не более 2 решений

~~причем при $a > 0$ $f(a)$ возрастает при $a < 0$ $f(a)$ убывает~~

~~при очень маленьком~~ $a$ $f(a) > 0 \Rightarrow$ т.к. $f(a)\uparrow$ то на $(-\infty; 0)$ $f(a) > 0 \Rightarrow$ ~~других решений~~ нет.

$\Rightarrow$ система имеет не более 2 решений

Заметим, что если $x$, $0{,}5y$ — решение, то и $\left(\frac{1}{0{,}5y}; \frac{1}{x}\right)$ — тоже решение

при очень маленьком $a$ $f(a) > 0$ $\Rightarrow$ т.к. $f(a)\uparrow$, то на $(-\infty;0)$ нет пересечений с осью $x$.

$\Rightarrow$ решений отличных от $x$, $0{,}5y$ нет

Ответ: 2

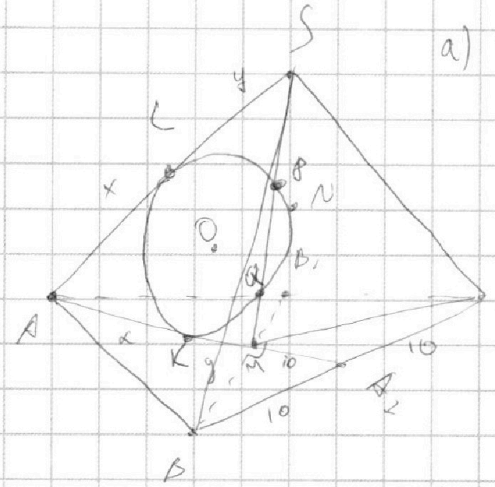
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7




а) ① Пусть $AL = x$; $SL = y$; $SP = MQ = z$

Тогда степень точки S отн-о сферы $= z(SM - z) = y^2$

А точки $M = z(SM - z) = MK^2 \Rightarrow MK = y$

M − центр △ABC. По свойству медиан $\frac{AM}{MA_1} = \frac{2}{1} \Rightarrow MA_1 = \frac{AM}{2}$

$AM = x + y = AS = 20$

$\Rightarrow MA_1 = 10 = A_1C = BA_1 = \frac{1}{2}BC$

$\Rightarrow$ △BMC − прямоугольный (медиана равна середине стороны)

$S_{BMC} = \frac{MA_1}{AA_1} \cdot S_{ABC} = \frac{MC \cdot BC}{2}$

$\Rightarrow AA_1 \cdot MC \cdot BM = 2 \cdot MA_1 \cdot S_{ABC}$

$AA_1 \cdot \frac{2}{3}BB_1 \cdot \frac{2}{3}CC_1 = 2MA_1 \cdot S_{ABC}$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot MA_1 \cdot S_{ABC}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 180}{2} = 8100$

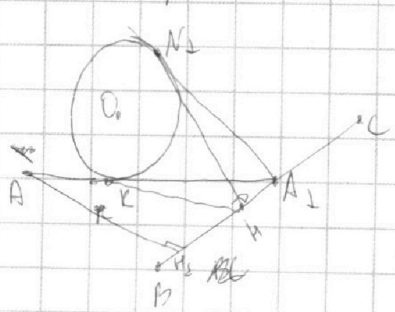
Ответ: Произведение длин медиан $= 8100$

б) $SN = 6 \Rightarrow SL = 6 = y$ (касательные из одной точки)

$\Rightarrow x = 14$

Пусть $A_1K$ и $A_1N_1$ − касательные, причем $N \in KA_1O$, где O − центр Ω

Рассмотрим $KONA_1$

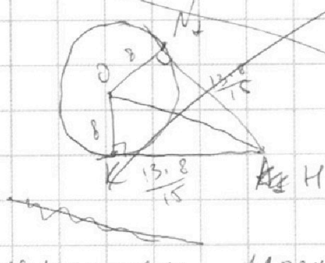



$A_1N_1 = A_1K$. Пусть $N_1H \perp BC \Rightarrow KH \perp BC$ в силу симметрии

$\frac{KH}{AH_1} = \frac{KA_1}{AA_1} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} \Rightarrow KH = \frac{8}{15} \cdot AH_1 = \frac{8}{15} \cdot \frac{S_{ABC}}{2BC} =$

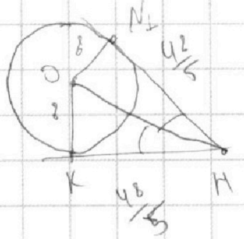
$= \frac{8}{15} \cdot 18 = \frac{48}{5}$

~~Рассмотрим плоскость $HN_1OK$~~



~~По теореме Пифагора: $OH = \frac{\sqrt{394}\cdot 8}{15}$~~

Рассмотрим плоскость $HN_1OK$



По теореме Пифагора в $\triangle KOH$:

$OH = \frac{8\sqrt{51}}{5}$ Пусть $\varphi = \angle OHK$

$\cos\varphi = \frac{48\cdot 5}{5\cdot 8\sqrt{51}} = \frac{6}{\sqrt{51}}$

$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \frac{2\cdot 36}{51} - 1 = \boxed{\frac{7}{17}}$ Двугранный угол $= 2\varphi$

Ответ: $\arccos \frac{7}{17}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$ и $\log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}(11^{-13}) - 5$

$\Rightarrow \begin{cases} \log_{11}^4 x - \frac{16}{3}\log_x 11 + 5 = 0 \text{ и} \\ \log_{11}^4 0{,}5y + \frac{16}{3}\log_{0{,}5y} 11 + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ x\neq 1 \\ y\neq 2 \\ \log_{11}^4 x - \frac{16}{3}\log_x 11 + 5 = 0 \\ (\log_{11}^4 0{,}5y - \log_{11}^4 x) + \frac{16}{3}\log_{0{,}5y} 11 + \frac{16}{3}(\log_x 11) = 0 \quad (1) \end{cases}$

~~(1) $\log_{0{,}5y} 11 + \log_x 11 = 0$ (2) $\log_{0{,}5y} 11 + \log_x 11 \neq 0$~~ (вычитаем)

~~Заметим, что если $(x; y)$ — решение, то $\left(\frac{1}{x}; \frac{1}{0{,}5y}\right)$ тоже решение. $\log_{11}^4 x = \log_{11}^4 \frac{1}{x}$, $\log_{11}^4 0{,}5y = \log_{11}^4 \frac{1}{0{,}5y}$~~

Пусть $a = \log_{11}^4 x \Rightarrow f(a) = a^4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0$

$f'(a) = 4a^3 - \frac{16}{3} \Rightarrow f(a)$ не может иметь больше 2 решений (по теореме Коши о промежуточном значении если $f(a)=0$ и $f(b)=0$, то существует $f'(\xi)=0$ $\xi\in[a;b]$

$\log_{0{,}5y} 11 = -\log_x 11 \Rightarrow \log_{\frac{1}{x}} 11 = \log_{0{,}5y} 11$

$\Rightarrow$ если $(x; y)$ — решение, то $\left(\frac{1}{0{,}5y}; \frac{1}{x}\right)$ — тоже решение

(1) $\Rightarrow$ $(\log_{0{,}5y} 11 + \log_x 11)\left(\log_{11}^2 0{,}5y + \log_{11}^2 x + \frac{16}{3}\right) = 0$

$\Rightarrow$ ~~2 часть не имеет~~

$\Rightarrow$ $0{,}5y = \frac{1}{x} \Rightarrow xy = 2$ (т.к. $x \neq 0$)

$\log_x 11 = -\log_{0{,}5y} 11 = \log_{\frac{1}{0{,}5y}} 11$

$\log_{0{,}5y} 11 = -\log_x 11 = \log_{\frac{1}{x}} 11$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

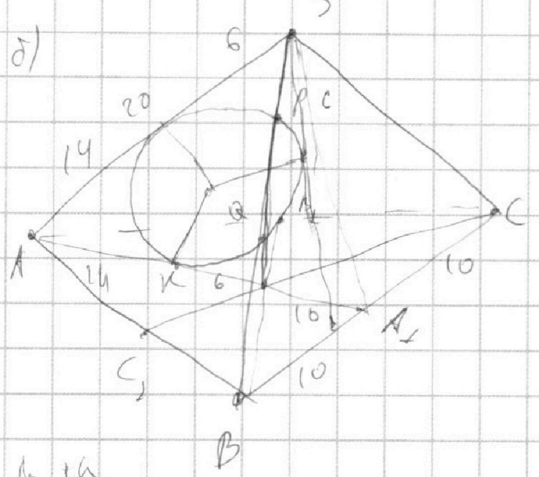
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

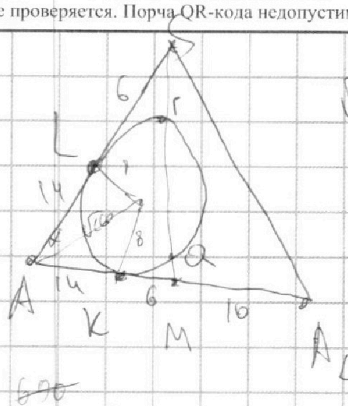
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

б)




$\sqrt{196+64} = \sqrt{260}$

$\cos\alpha = \frac{14}{\sqrt{260}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$

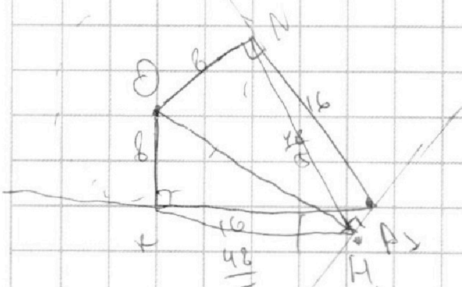
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{49\cdot 2}{65} - 1 = \frac{98}{65} - 1 = \boxed{\frac{33}{65}}$

~~600~~
1200
240

по т. cos $\Rightarrow SA_1^2 = 400 + 900 - \frac{2\cdot 20\cdot 30\cdot 33}{65} = \frac{240\cdot 33}{13}$

$1 + \frac{6}{5}$ $\quad \sqrt{1+\frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{61}}{5}\cdot 8$

$\frac{8\sqrt{61}}{5}$




$\triangle AK$

Пусть $AH$ - высота в $\triangle AKC$ $\Rightarrow \frac{AH\cdot DC}{2} = 180$

$\Rightarrow AH = \frac{360}{20} = 18$

$\frac{KA_1}{AA_1} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} \Rightarrow KH_1 = \frac{8}{15}\cdot AH$ очевидно из подобие

$= \frac{8}{15}\cdot 18 = \frac{48}{5}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{OH_1}{} =$

по теореме Пифагора $OH_1 = \frac{8\sqrt{51}}{5}$

$12 - 51$

$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{48\cdot 5}{5\cdot 8\sqrt{51}} = \frac{6}{\sqrt{51}} \Rightarrow \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 =$

$= \frac{2\cdot 36}{51} - 1 = \frac{21}{51} = \boxed{\frac{7}{17}}$

arccos $\frac{7}{17}$

$-\frac{\sqrt{32}}{7} = \frac{-5}{6a}$

$\frac{\sqrt{32}}{7} \geqslant \frac{5}{6a}$ $\quad a>0$ $\quad 6a \geqslant \frac{5\cdot 7}{\sqrt{32}}$

$a \geqslant \frac{35}{6\sqrt{32}}$

$-5$

$\Rightarrow a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{35}{6\sqrt{32}}\right)$

при $a<0$

$a < \frac{35}{6\sqrt{32}}$

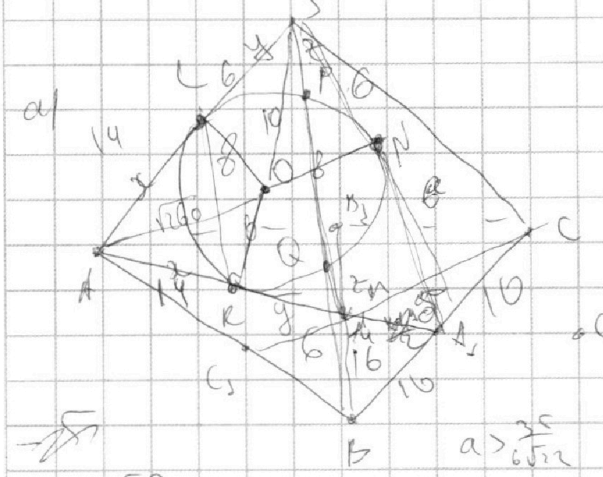
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

а)



$S_{ABC} = 180$

$SA = BC = 20$

$z(SM - z) = y$

$LK \parallel SM$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 - ?$

$\triangle CMB$ - медиан

$a < -\frac{35}{6\sqrt{32}}$

$a > 0$

$a < 0$

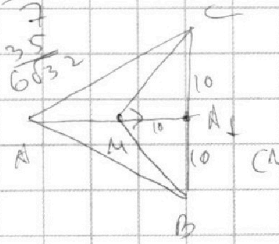
$a > -\frac{35}{6\sqrt{32}}$

$\cancel{x^2 = y \cdot y}$

$a > \frac{35}{6\sqrt{32}}$

$\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7}$

$a < \frac{35}{6\sqrt{32}}$



$\frac{1}{2} S_{CMB} = \frac{MA_1}{AA_1} \cdot S_{ABC} \cdot \frac{1}{2}$

CM·MB

$CM \cdot MB \cdot AA_1 = \frac{1}{2} MA_1 \cdot S_{ABC}$

$\frac{2}{3} CC_1 \cdot \frac{2}{3} BB_1 \cdot AA_1 = \frac{1}{2} MA_1 \cdot S_{ABC}$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 10 \cdot 180 =$

$S_{MCB}$

1800

14 · 14 = 196

196 + 64 = 260

$CM \cdot MB = 2 S_{CMB} = \frac{2 \cdot MA_1}{AA_1} \cdot S_{ABC}$

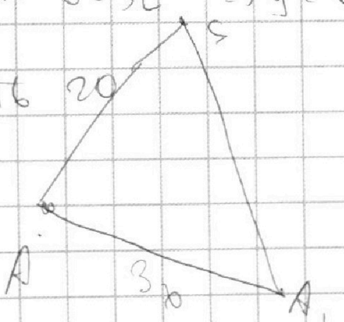
$AA_1 \cdot \frac{2}{3} CC_1 \cdot \frac{2}{3} BB_1 = 2 \cdot MA_1 \cdot S_{ABC}$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot S_{ABC} \cdot 10 MA_1 = \frac{180 \cdot 10 \cdot 9}{2} = \boxed{8100}$

180 · 45 = 900 + 720 = 8100

б) $\cancel{y+10}$ $SN = 6 = SL \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x = 14$

$y + 10 = 16$ 20



$14^2 = (a-6)(a+8)$

$a^2 - 64$

$196 + 64 = 260$

$a = \sqrt{260}$

sin

$\cos\alpha = \frac{14}{\sqrt{260}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2 \cdot 49}{65} - 1 = \frac{33}{65}$

$\frac{98}{65} - 1$

$400 + 500 - \frac{600 \cdot 33}{65} =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a+b=6$
$b+c=14$
$a+c=16$

$6-a+c=14$

№1

$ab=2^6 3^{13} 5^{11} k$

$bc=2^{14} 3^{21} 5^{13} n$

$ac=2^{16} 3^{25} 5^{28} l$

$a^2b^2c^2=2^{36} 3^{59} 5^{52} knl$

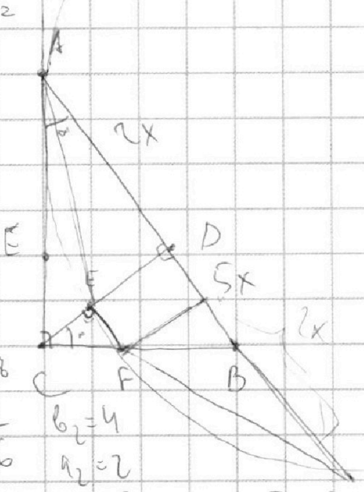
$abc=\sqrt{2^{36} 3^{59} 5^{52} knl} \Rightarrow 2^{18} \cdot 5^{26} \cdot 3^{29} \sqrt{3nkl}$

$=\boxed{2^{18} \cdot 5^{26} \cdot 3^{30}}$

наим целое значение которого достигается при $n, k, l=1$

$2=1$ и $1=3$

№2




$a_2+b_2+c_2=18$

$c_2=12$

$a_2+b_2=6$

$b_2=4$

$a_2=2$

$b_2+c_2=14$

$a_2+c_2=16$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}=\frac{AD}{AB}\cdot S_{CAB} : \frac{CE}{CA}\cdot\frac{CF}{CB}\cdot\frac{BD}{AB}\cdot S_{CAB}=$

$=\frac{AD}{AB}\cdot\frac{CA}{CE}\cdot\frac{CB}{CF}\cdot\frac{AB}{BD}$

$\frac{AB}{BD}=1{,}4=\frac{7}{5}$

$\Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{2}{7}$ $\quad \frac{AD}{AB}\cdot\frac{AB}{BD}=\boxed{\frac{2}{5}}=\frac{AD}{BD}$

$\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB}$ $\quad \frac{AD}{AC}=\frac{CB}{BD}$

$\left\{ \begin{array}{l} k+l\geq 6 \\ l+m\geq 14 \\ k+m\geq \end{array} \right.$

$2x\cdot\cos x=5x\cdot\sin x$

$\frac{2}{5}=\operatorname{tg} x$

$\frac{2x\cdot 2}{5}=\frac{2}{5}=5x$

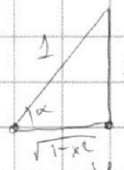
$\operatorname{tg} x=\frac{BD}{CD}=\frac{CD}{AD}$

$CD^2=BD\cdot AD=10x^2=2x\cdot\frac{2}{5} \Leftrightarrow 50x^2=4x$

$x=\frac{2}{50}$

№3

$10\arccos(\sin x)=9\pi-2x$




$\sin x=\cos\frac{9\pi-2x}{10}$

№4

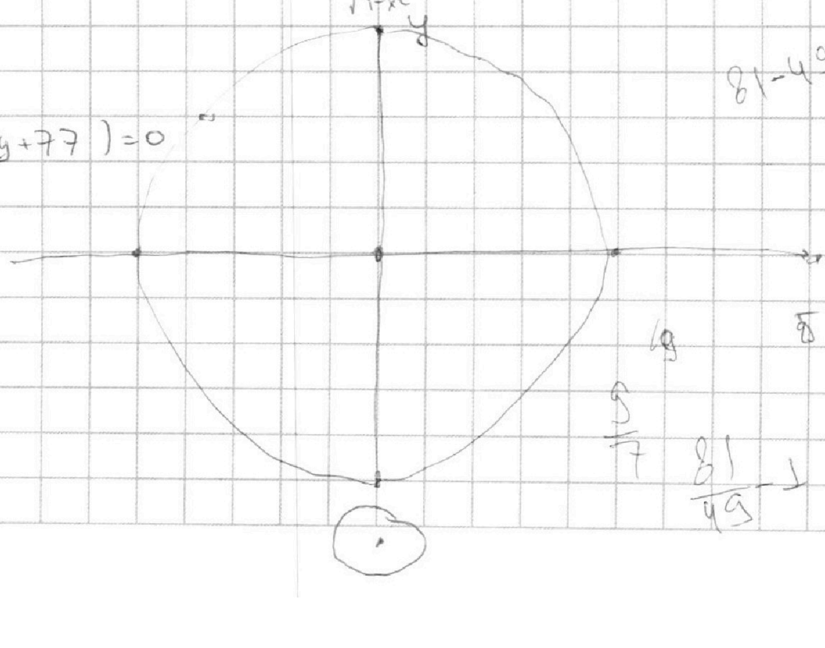
$\left\{ \begin{array}{l} 5x+6ay-6=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{array} \right.$

$x^2+(y+9)^2=4$

при $a=\text{const}$

график задает прямую

$y=\frac{6}{6a}-\frac{5x}{6a}$




$81-49$

$\frac{9}{7}$

$\frac{81}{49}-1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

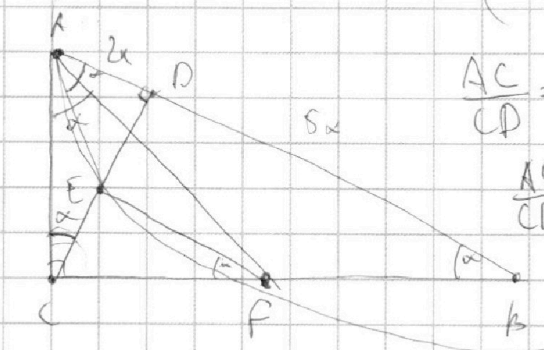
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2

$\left(\log^2_{11} 0{,}5y + \log^2_{11} x\right)\left(\log_{11} 0{,}5y + \log_{11} x\right) = 0$




$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{CB}$

$\frac{CF}{CB} = \frac{AC \cdot tg\alpha}{CB}$

$\frac{AC}{CD} = \frac{CB}{BD}$

① $\frac{AB}{BD} = 1{,}4 = \frac{7}{5}$

пусть $BD = 5x$, ~~$AD = 2x$~~

$\Rightarrow AD = 2x$

по св-ву высоты прямоуг. о-ка

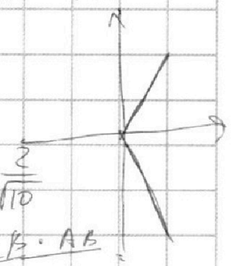
$CD^2 = AD \cdot DB = 10x^2 \Leftrightarrow CD = x\sqrt{10}$

$\frac{CF}{CB} = \frac{AC \cdot tg\alpha}{CB} = \frac{CE}{ED} = \frac{CD - AD\,tg\alpha}{CD}$

$\frac{AC}{CD} = \frac{CB}{CD}$

$\frac{CF}{CB} = \frac{AC \cdot tg\alpha}{CB}$

$tg\alpha = \frac{AD}{CD} = \frac{2x}{x\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$



$S_{CEF}$ $\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \left(\frac{AD}{AB} \cdot S_{ABC}\right) : \left(\frac{CE}{CD} \cdot \frac{CF}{CB} \cdot \frac{BD}{AB} \cdot S_{ABC}\right) = \frac{AD \cdot CD \cdot CB \cdot AB}{AB \cdot CE \cdot CF \cdot BD} =$

$= \frac{AD}{BD} \cdot \frac{CD}{CE} \cdot \frac{CB}{CF}$

$y = 2x$

$y = -2x$

~~$\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{BC}$~~ $\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{BD} \Leftrightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{BD} = \frac{\sqrt{10}x}{5x} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

$\Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{\sqrt{10}}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{2x}{5x} \cdot \left(\frac{CB}{CF}\right)^2 = \frac{2 \cdot 25}{5 \cdot 4} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

Ответ: $\boxed{2{,}5}$

$(a-b)(a^2+b^2) + \frac{16}{3} = 0$

№5

$\log^4_{11} x - 6\log_x 11 = \log_{3x^3} \frac{1}{121} - 5$ и $\log^4_{11}(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3} 11^{-13/6}$

$\log^4_{11} x - 6\log_x 11 + \frac{2}{3}\log_x 11 + 5 = 0$ | $\log^4_{11} 0{,}5y + \log_{0{,}5y} 11 + \frac{13}{3}\log_{0{,}5y} 11 + 5 = 0$

$\log^4_{11} x - \frac{16}{3}\log_x 11 + 5 = 0$ | $\log^4_{11} 0{,}5y + \log_{0{,}5y} 11 \cdot \frac{16}{3} + 5 = 0$

~~$\log^4_{11} x = \log^4_{11} 0{,}5y$~~ $\log^4_{11} 0{,}5y - \log^4_{11} x + \frac{16}{3}\left(\log_{0{,}5y} 11 + \log_x 11\right) = 0$

1) $\left(\log_{0{,}5y} 11 + \log_x 11 = 0\right)$ 2) $(a^2+b^2)(a+b) = 0$ $a\left(t^2 + 2ab\right)t = 0$

$t = 0$

2) $t^2 = -2ab$

$a^2 + b^2 = -2ab$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_{11}^4 0{,}5y - \log_{11}^4 x + \frac{16}{3}(\log_{0{,}5y} 11 + \log_x 11) = 0$

$4a^3 - \frac{16}{3a^2} = 0$

① $(a^2+b^2)(a-b)=0$   ② $a+b=0$

$\frac{16}{3}\sqrt[3]{\frac{16}{3}} - \frac{16}{3}\sqrt[3]{\frac{16}{3}}$

$((a-b)^2+2ab)(a-b)=0$

$a^4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0$

1) $a-b=0$   2) $\cancel{(a-b)^2+2ab=0}$

$a^2+b^2=0$

$a^3 = \frac{4}{3}$

$\log_{0{,}5y} 11 = \log_x 11$

$a = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$

$a^4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0$

$f'(a) = 4a^3 - \frac{16}{3}$

$\cancel{\log_{0{,}5y}}$

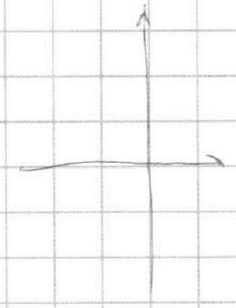
$\log_{11} 0{,}5y$

$f''(a) = 12a^2$

$x = 0{,}5y$

$\log_{11}^4 x - \frac{16}{3}\log_x 11 + 5 = 0$

$t^4 - \frac{16}{3}t + 5 = 0$



если бы $f(a)$ имела 3и более корней
то $f'(a)$ имела бы более 2 корне
$\Rightarrow f(a)$ имеет

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$

$\log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}5y^3}(11^{-13}) - 5$

$\log_{11}^4 x - \frac{16}{3}\log_x 11 + 5 = 0$

$\log_{11}^4 0{,}5y + \frac{16}{3}\log_{0{,}5y} 11 + 5 = 0$

$\begin{cases} a^4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0 \\ b^4 - a^4 + \frac{16}{3}(a+b) = 0 \end{cases}$

$a^4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0$

$(a+b)((a-b)(a^2+b^2) + \frac{16}{3}) = 0$

$\Rightarrow a+b=0$

$\cancel{a^3 - b^3 - a^2b +}$

$t(t^2 + 2ab) + \cancel{\frac{16}{3}} = 0$

① $a+b=0$

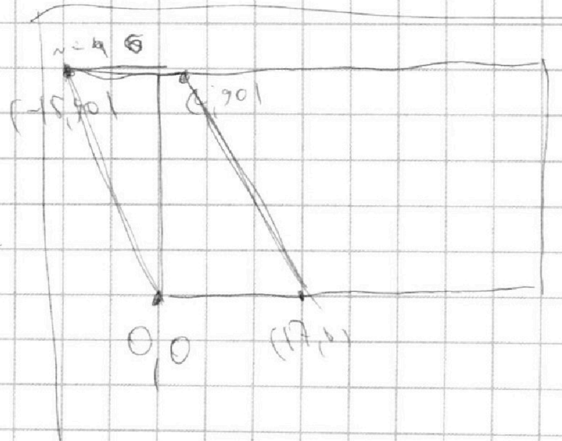
② $(a-b)(a^2+b^2) + \frac{16}{3} = 0$

$(\cancel{\log_{11} x - \log_{11} 0{,}5y})(\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 0{,}5y + \frac{16}{3}) = 0$

$\log_x 11 = -\log_{0{,}5y} 11$   $(\log_x 11 - \log_{0{,}5y} 11)($

$0{,}5xy = 1$

$xy = 2$



$6x_2 - 6x_1 + (y_2 - y_1) = 48$

$6x_2 + y_2 = 6x_1 + y_1$

$\frac{1}{x}\ \frac{1}{y}$ – после переход $= 0{,}5$

$\log_x 11 = -\log_{0{,}5y} 11 =$

Ответ: $0{,}5;\ 2$

$= \log_{\frac{1}{0{,}5y}} 11$

$\log_{0{,}5y} 11 = -\log_x 11 =$

$= \log_{\frac{1}{x}} 11$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

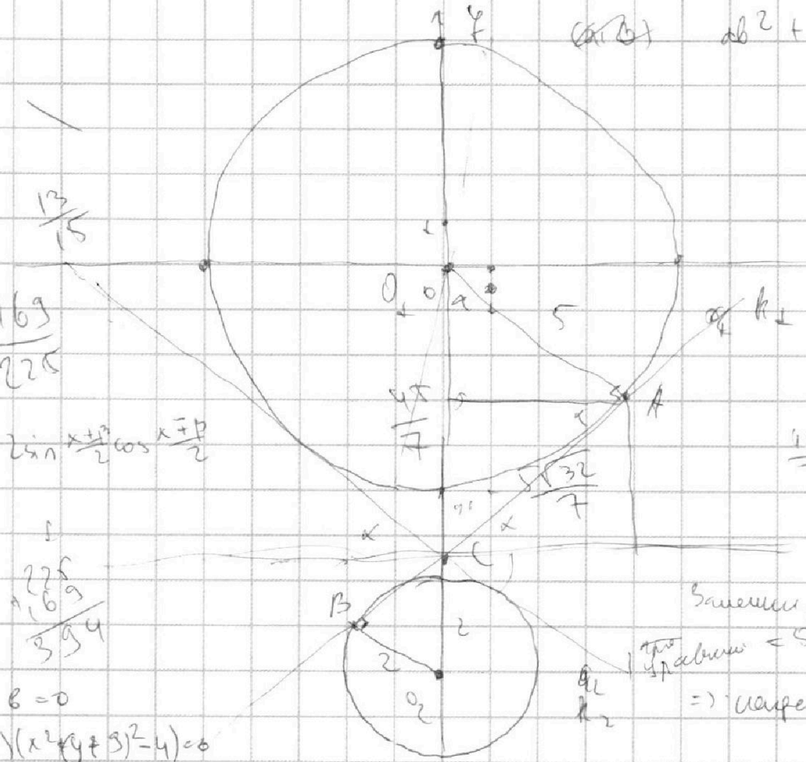
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

$(a+b)^7 \quad ab^2+b^3+a^3+a^2b+\frac{16}{3ab}$




$\frac{13}{15}$

$1+\frac{169}{225}$

$\frac{9}{7}$

$\frac{81}{49}-49=\frac{\sqrt{32}}{7}$

$tg\,\alpha \quad \frac{5\sqrt{32}}{7\cdot 5}=\frac{\sqrt{32}}{7}$

$63-45=15+3$

$\frac{45}{7} \quad \frac{16}{7} \quad \frac{45}{18}=\frac{5\cdot 9}{2\cdot 9}$

$\sin x \pm \sin \beta = 2\sin\frac{x\pm\beta}{2}\cos\frac{x\mp\beta}{2}$

$3a^2b^3+3ab^4+3a^4b+3a^3b^2+16=0$

$\frac{225}{169}$ / $394$

Заметим, что при $a=0$ прямая $5x-b=0$

$\Rightarrow$ искомое $b=0$ подходит

$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+(y+9)^2-4)=0 \end{cases}$$

$180 \quad \frac{AC}{BC}=\frac{AO_1}{BO_2}=\frac{5}{2} \Rightarrow OC=\frac{5}{7}\cdot 9=\frac{45}{7}$

$y=\frac{5x}{6a}-\frac{b}{6a}$

$\frac{h\cdot 20}{2}=180 \Rightarrow \frac{b}{6a}=\frac{45}{7} \qquad 6a=\frac{7b}{45}$

$h=18$

$\frac{5x}{7b}\cdot 45=y \qquad \frac{5}{6a}\,6$

$\frac{h\cdot 20}{2}=3180$

$\frac{5}{6a}\in[a_2;a_1]$

$x=16 \qquad \left[-\frac{\sqrt{32}}{7};\frac{\sqrt{32}}{7}\right]\setminus\{0\}$

$\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$

№3

$\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{9\pi}{10}+\frac{x}{5})=$

$10\arccos(\sin x)=9\pi-2x$

$\arccos(\sin x)=\frac{9\pi-2x}{10}$

$\sin x=\cos(\frac{9\pi-2x}{10})$; $\quad \sin x-\cos(\frac{9\pi-2x}{10})=\sin x-\sin(\frac{x}{5}-\frac{2\pi}{5})=0$

$2\sin\left(\frac{x-\frac{x}{5}+\frac{2\pi}{5}}{2}\right)\cos\left(\frac{x+\frac{x}{5}-\frac{2\pi}{5}}{2}\right)=0$

$\sin(\frac{2}{5}x+\frac{\pi}{5})\cos(\frac{3x}{5}-\frac{\pi}{5})=0$

$\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{5}$

$1+\frac{36}{25}=\frac{\sqrt{61}}{5}$

$\frac{1}{2}AH\cdot BC=S_{ABC}=180$

$9\cdot 5\cdot 9\cdot 20=8100 \qquad AH\cdot 20=360$

$\frac{5\pi+2\pi}{10} \quad \frac{7\pi}{10},\frac{5}{3}$