МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

$ab \vdots 2^6 3^{13} 5^{11}$

$bc \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{13}$

$ac \vdots 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

$\Rightarrow ab\cdot bc\cdot ac = a^2b^2c^2 \vdots 2^{36} 3^{59}\cdot 5^{52}$

Пусть $ab = 2^6 3^{13} 5^{11} k$

$bc = 2^{14} 3^{21} 5^{13} l$

$ac = 2^{16} 3^{25} 5^{28} m$

$\Rightarrow ab\cdot bc\cdot ac = 2^{36}\cdot 3^{59}\cdot 5^{52}\cdot klm$

$abc = 2^{18}\cdot 3^{29}\cdot 5^{26}\sqrt{3klm}$ причем

$abc \in N \Leftrightarrow \sqrt{klm\cdot 3} \in N$ и $k\in N$, $l\in N$, $m\in N$

Очевидно, что $klm \vdots 3 \Rightarrow$ одно из k, l или m делится на 3 и klm минимально при 2 значениях равных 1 и одно 3 $\Rightarrow \sqrt{3klm} = 3 \Rightarrow abc = 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{26}$ (минимально)

Ответ: $2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{26}$

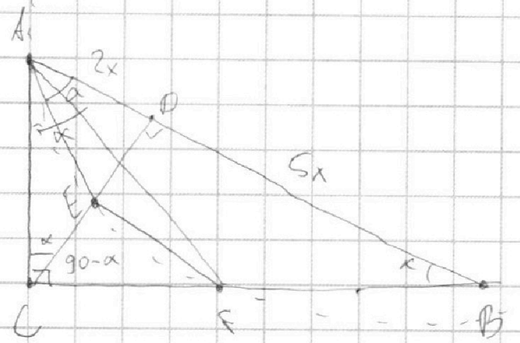
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

*Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



① $\frac{AB}{BD} = 1{,}4 = \frac{7}{5}$

Пусть $BD = 5x \Rightarrow AB = 7x$

$\Rightarrow AD = 2x$

Пусть $\angle EAB = \alpha$

т.к. $EABF$ – вписанная трапеция, то она равнобедренная. $\Rightarrow \angle EAB = \angle ABF = \alpha$

т.к. AC – касательная к окр-ти, то $\angle CAF = \angle ABF = \alpha$ (угол между касательной и секущей)

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \left(\frac{AD}{AB}\cdot S_{ABC}\right) : \left(\frac{CE}{CD}\cdot\frac{CF}{CB}\cdot\frac{DB}{AB}\cdot S_{ABC}\right) = \frac{AD\cdot CD\cdot BC\cdot AB}{AB\cdot EC\cdot CF\cdot DB}\cdot\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} =$$

$= \frac{AD}{DB}\cdot\left(\frac{BC}{CF}\right)^2$ т.к. $EF \parallel AB$, то $\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB}$

$\frac{CF}{CB} = \frac{AC\cdot tg\alpha}{CB} = \frac{CD}{BD}\cdot tg\alpha$ т.к. $\frac{AC}{CD} = \frac{CB}{BD} = \cos\alpha$ (△-ки прямоуг. $\Rightarrow \angle ACD = 90 - \angle ACD = 90-\alpha$, т.к. $\angle DCB = 90 - \angle DBC = 90-\alpha$)

$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$ в силу подобия △-ков ACD и CDB по 3 углам (св-во высоты прямоуг. △-ка)

$\Rightarrow CD^2 = AD\cdot BD \Rightarrow CD = \sqrt{2x\cdot 5x} = x\sqrt{10} \Rightarrow tg\alpha = \frac{AD}{CD} = \frac{2x}{x\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{AD}{BD}\cdot\left(\frac{BC}{CF}\right)^2 = \frac{AD}{BD}\cdot\left(\frac{BD}{CD\cdot tg\alpha}\right)^2 = \cancel{\frac{2x}{8}}\ \frac{2x}{5x}\cdot\left(\frac{5x}{\sqrt{10}x\cdot\frac{2}{\sqrt{10}}}\right)^2 =$

$= \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} = 2{,}5$

Ответ: $\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

По формулам приведения: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$

$\cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)$

$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{4\pi}{10}\right)$

$\Leftrightarrow \sin x - \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) = 0$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$2\sin\frac{\left(x - \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5}\right)}{2}\cos\left(\frac{x + \frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}}{2}\right) = 0$

① $\sin\left(\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5}\right) = 0$

$\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5} = \pi n,\ n \in Z$

$x = \frac{5\pi n}{2} - \frac{\pi}{5},\ n \in Z$

② $\cos\left(\frac{3x}{5} - \frac{\pi}{5}\right) = 0$

$\frac{3x}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

$x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k,\ k \in Z$

~~Ответ:~~ $\cancel{x \in \left\{\frac{5\pi n}{2} - \frac{\pi}{5} \middle| n \in Z,\ \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k \middle| k \in Z\right\}}$

Ответ: $\frac{5\pi n}{2} - \frac{\pi}{5},\ n \in Z,\ \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k,\ k \in Z$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\Rightarrow$ при b од $x \in \left[-\frac{\sqrt{32}}{7}; \frac{\sqrt{32}}{7}\right]$ решений нет (очевидно)

В остальных случаях, двигая и прямую ③ можно получить 4 решения.

③ : $y = \frac{b}{6a} - \frac{5}{6a}x \quad (a \neq 0)$

$\Rightarrow \cancel{-\frac{5}{6a} \in \left[-\frac{\sqrt{32}}{7}; \frac{\sqrt{32}}{7}\right]}$

$\cancel{-\frac{\sqrt{32}}{7} \le -\frac{5}{6a} \le \frac{\sqrt{32}}{7}}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{7} \\ -\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ a < \frac{35}{6\sqrt{32}} \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ a > \frac{35}{6\sqrt{32}} \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ a < -\frac{35}{6\sqrt{32}} \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ a > -\frac{35}{6\sqrt{32}} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad a \in \left(-\frac{35}{6\sqrt{32}}; \frac{35}{6\sqrt{32}}\right)$

т.к 0 подходит

Ответ: при $a \in \left(-\frac{35}{6\sqrt{32}}; \frac{35}{6\sqrt{32}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

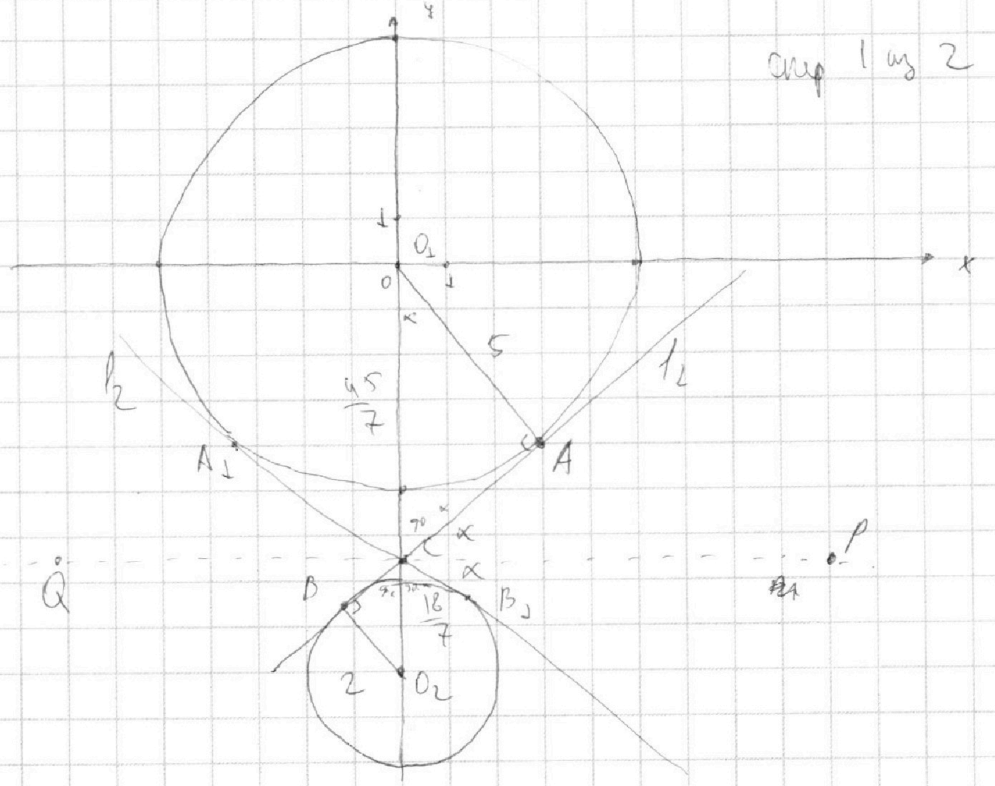
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4

Стр 1 из 2



$$\begin{cases}5x+6ay-b=0\\(x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6ay=b-5x & (3)\\ \left[\begin{array}{ll} x^2+y^2-25=0 & (1)\\ x^2+(y+9)^2-4=0 & (2)\end{array}\right.\end{cases}$$

Графики функций (1) и (2) представляют собой окр-ти с центром в $O_1(0;0)$ и радиусом 5 и окр-ти с центром в $O_2(0;-9)$ радиуса 2. График (3) – прямая.

Пусть l_1 и l_2 – общие внутренние касательные к 2 окружностям (см. рисунок). Пусть точки касания: A и B и $C=(O_1O_2)\cap(AB)$ $\Rightarrow$ $O_1A\perp AB$ и $O_2B\perp AB$ т.к. O_1 и O_2 – центры окр-тей $\Rightarrow$ $\triangle O_1AC$ подобен $\triangle O_2BC$ по 3 углам.

$\Rightarrow \frac{O_1C}{CO_2}=\frac{O_1A}{O_2B}=\frac{5}{2} \Rightarrow$ и $O_1O_2=9 \Rightarrow O_1C=\frac{45}{7}$, $O_2C=\frac{18}{7}$

(1) $a=0$ то $b=0$ $\Rightarrow$ $5x=0$ $\Rightarrow$ $a=0$ подходит, в остальных случаях считаем, что $a\neq 0$. Пусть $\angle CAO_1=\alpha$ ~~Пусть PQ ∥ Ox O_1~~ Пусть $PQ\parallel Ox$ и $C\in PQ$. $\angle ACP=90-\angle O_1CA=\alpha \Rightarrow$ $\angle B_1CP=\alpha$ в силу симметрии (очевидно из углов)

$l_1=\operatorname{tg}\alpha\, x-O_1C$ $\Rightarrow$ $l_2=-\operatorname{tg}\alpha\, x-O_1C$

По теореме Пифагора в $\triangle CAO_1$: $AC^2=CO_1^2-O_1A^2$ $\Rightarrow AC=\frac{5\sqrt{32}}{7} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{AC}{O_1A}=\frac{\sqrt{32}}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$ и $\log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{(0{,}5y)} 11 = \log_{0{,}125y^3}(11^{-5}) - 5$

Пусть $a = \log_{11} x$ $b = \log_{11} 0{,}5y$

$\begin{cases} a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0 \\ b^4 + \frac{16}{3b} + 5 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} (b^2+a^2)(b-a)(a+b) + \frac{16(b+a)}{3ab} = 0 \\ a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ ① $b - a = 0$ ② $\begin{cases} (b^2+a^2)(b-a) + \frac{16}{3ab} = 0 \\ a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0 \end{cases}$

$\log_x 11 = \log_{0{,}5y} 11$

$x = \frac{1}{0{,}5y}$

$xy = 2$

$f(a) = a^4 - \frac{16}{3a} + 5$ если $a\uparrow$, то $a^4\uparrow$ $\frac{16}{3a}\downarrow$ $-\frac{16}{3a}\uparrow$

$f'(a) = 4a^3 + \frac{16}{3a^2} = 0$ $\Rightarrow f(a)\uparrow$ на $(0;+\infty)$ на $(-\infty;0)$

$12a^5 = -16$ имеет не более 1 решения

$a^5 = -\frac{16}{12}$

~~при $a \to +\infty$ $f(a) \to \infty$ при $a \to 0$ $f(a) \to \infty$~~

$\Rightarrow$ По теореме Коши о промежуточном значении $f(a)$ имеет не более 2 решений

~~причём при $b>0$ $f(a)$ возрастает при $b<0$ $f(a)$ убывает~~

~~при очень маленьких~~ a $f(a) > 0 \Rightarrow$ т.к. $f(a)\uparrow$ ~~то на $(-\infty;0)$ $f(a)>0 \Rightarrow$ других решений нет.~~

$\Rightarrow$ система имеет не более 2 решений

Заметим, что если $x; 0{,}5y$ — решение, то и $\left(\frac{1}{0{,}5y}; \frac{1}{x}\right)$ — тоже решение

при очень маленьких a $f(a) > 0$ $\Rightarrow$ т.к. $f(a)\uparrow$, то на $(-\infty;0)$ нет пересечений с осью x.

$\Rightarrow$ решений отличных от $x; 0{,}5y$ нет

Ответ: 2

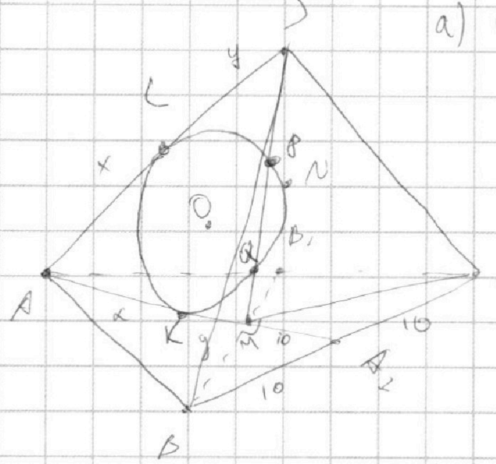
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7



а) ① Пусть $AL = x$; $SL = y$; $SP = MQ = z$

Тогда степень точки S отн-о сферы ω

$= z(SM - z) = y^2$

А точки $M = z(SM - z) = MK^2 \Rightarrow MK = y$

M − центр $\triangle ABC$. По свойству медиан $\frac{AM}{MA_1} = \frac{2}{1} \Rightarrow MA_1 = \frac{AM}{2}$

$AM = x + y = AS = 20$

$\Rightarrow MA_1 = 10 = A_1C = BA_1 = \frac{1}{2}BC$

$\Rightarrow \triangle BMC$ − прямоугольный (медиана равна середине стороны)

$S_{BMC} = \frac{MA_1}{AA_1} \cdot S_{ABC} = \frac{MC \cdot BC}{2}$

$\Rightarrow AA_1 \cdot MC \cdot BM = 2 \cdot MA_1 \cdot S_{ABC}$

$AA_1 \cdot \frac{2}{3}BB_1 \cdot \frac{2}{3}CC_1 = 2MA_1 \cdot S_{ABC}$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{2\cdot 3\cdot 3 \cdot MA_1 \cdot S_{ABC}}{2\cdot 2} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 180}{2} = 8100$

Ответ: Произведение длин медиан $= 8100$

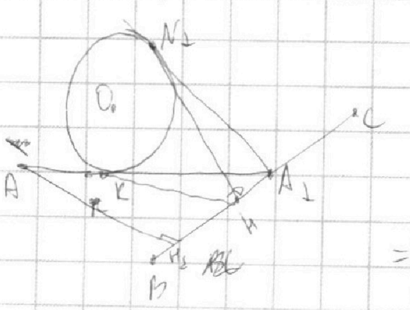
б) $SN = 6 \Rightarrow SL = 6 = y$ (касательные из одной точки)

$\Rightarrow x = 14$

Пусть A_1K и A_1N_1 − касательные, причем $N \in KA_1O$, где O − центр ω

Рассмотрим $KONA_1$

$A_1N_1 = A_1K$. Пусть $N_1H \perp BC \Rightarrow KH \perp BC$ в силу симметрии



$\frac{KH}{AH_1} = \frac{KA_1}{AA_1} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} \Rightarrow KH = \frac{8}{15} \cdot AH_1 = \frac{8}{15} \cdot \frac{S_{ABC}}{2BC} =$

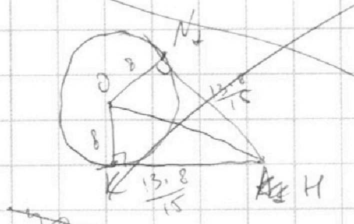
$= \frac{8}{15} \cdot 18 = \frac{48}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

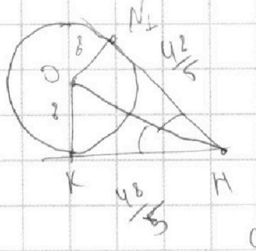
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Рассмотрим плоскость HN_1OK~~



~~По теореме Пифагора: $OH = \frac{\sqrt{394}\cdot 8}{15}$~~

Рассмотрим плоскость HN_1OK



По теореме Пифагора в $\triangle KOH$:

$OH = \frac{8\sqrt{51}}{5}$ Пусть $\varphi = \angle OHK$

$\cos\varphi = \frac{48\cdot 5}{5\cdot 8\sqrt{51}} = \frac{6}{\sqrt{51}}$

$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \frac{2\cdot 36}{51} - 1 = \boxed{\frac{7}{17}}$ Двугранный угол $= 2\varphi$

Ответ: $\arccos \frac{7}{17}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$ и $\log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}(11^{-13}) - 5$

$\Rightarrow \begin{cases} \log_{11}^4 x - \frac{16}{3}\log_x 11 + 5 = 0 \\ \log_{11}^4 0{,}5y + \frac{16}{3}\log_{0{,}5y} 11 + 5 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ x \neq 1 \\ y \neq 2 \\ \log_{11}^4 x - \frac{16}{3}\log_x 11 + 5 = 0 \\ (\log_{11}^4 0{,}5y - \log_{11}^4 x) + \frac{16}{3}\log_{0{,}5y} 11 + \frac{16}{3}(\log_x 11) = 0 \quad (1) \end{cases}$

~~(1) $\log_{0{,}5y} 11 + \log_x 11 = 0$ (2) $\log_{0{,}5y} 11 + \log_x 11 \neq 0$~~ (вычитаем)

~~Заметим, что если (x, y) решение, то $\left(\frac{1}{x}; \frac{1}{0{,}5y}\right)$ тоже решение. $\log_{11}^4 x = \log_{11}^4 \frac{1}{x}$, $\log_{11}^4 0{,}5y = \log_{11}^4 \frac{1}{0{,}5y}$~~

Пусть $a = \log_{11}^4 x \Rightarrow f(a) = a^4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0$

$f'(a) = 4a^3 - \frac{16}{3} \Rightarrow f(a)$ не может иметь более 2 решений (по теореме Коши о промежуточном значении если $f(a)=0$ и $f(b)=0$, то существует $f'(\xi)=0$ $\xi \in [a;b]$

$\log_{0{,}5y} 11 = -\log_x 11 \Rightarrow \log_{\frac{1}{x}} 11 = \log_{0{,}5y} 11$

$\Rightarrow$ если $(x; y)$ решение, то $\left(\frac{1}{0{,}5y}; \frac{1}{x}\right)$ тоже решение

(1) $\Rightarrow$ ~~$\log_{11}^4 0{,}5y$~~ $(\log_{0{,}5y} 11 + \log_x 11)\left(\log_{11}^2 0{,}5y + \log_{11}^2 x + \frac{16}{3}\right) = 0$

$\Rightarrow$ ~~2 часть не имеет~~

$\Rightarrow$ $0{,}5y = \frac{1}{x} \Rightarrow xy = 2$ (т.к. $x \neq 0$)

$\log_x 11 = -\log_{0{,}5y} 11 = \log_{\frac{1}{0{,}5y}} 11$

$\log_{0{,}5y} 11 = -\log_x 11 = \log_{\frac{1}{x}} 11$

$\frac{1}{0{,}5y} = \frac{1}{0{,}5y} =$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

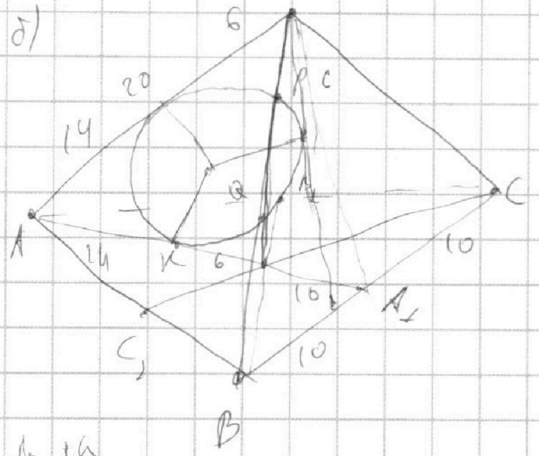
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

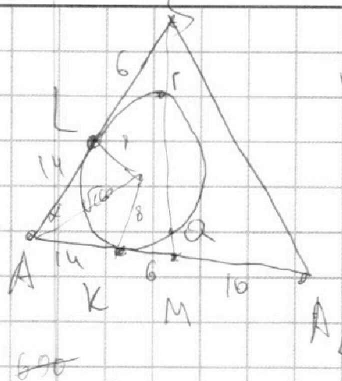
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

б)





$\sqrt{196+64} = \sqrt{260}$

$\cos x = \frac{14}{\sqrt{260}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$

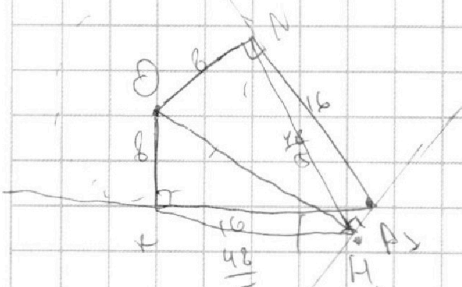
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{49 \cdot 2}{65} - 1 = \frac{98}{65} - 1 = \boxed{\frac{33}{65}}$

~~600~~
1200
240

$\Rightarrow SA_1^2 = 400 + 900 - \frac{2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 33}{65} = \frac{240 \cdot 33}{13}$

$1 + \frac{6}{5}$ $\quad \sqrt{1 + \frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{61}}{5} \cdot 8$

$\frac{8\sqrt{61}}{5}$



$\Delta A_1 K$

Пусть AH — высота в ΔAHC $\Rightarrow \frac{AH \cdot DC}{2} = 180$

$\Rightarrow AH = \frac{360}{20} = 18$ (обведено в подобие)

$\frac{KA_1}{AA_1} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} \Rightarrow KH_1 = \frac{8}{15} \cdot AH = \frac{8}{15} \cdot 18 = \frac{48}{5}$

$72 - 51$

$\Rightarrow \cos x = \frac{OH}{...} =$
по теореме Пифагора $OH_1 = \frac{8\sqrt{51}}{5}$

$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{48 \cdot 5}{5 \cdot 8\sqrt{51}} = \frac{6}{\sqrt{51}} \Rightarrow \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \frac{2 \cdot 36}{51} - 1 = \frac{21}{51} = \boxed{\frac{7}{17}}$

$\arccos \frac{7}{17}$

$-\frac{\sqrt{32}}{7} = \frac{-5}{6a}$

$\frac{\sqrt{32}}{7} \geq \frac{5}{6a}$ $\quad a > 0$ $\quad 6a \geq \frac{5 \cdot 7}{\sqrt{32}}$

$a \geq \frac{35}{6\sqrt{32}}$

$\Rightarrow a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{35}{6\sqrt{32}}\right.$

при $a < 0$
$a < \frac{35}{6\sqrt{32}}$

$- 5$

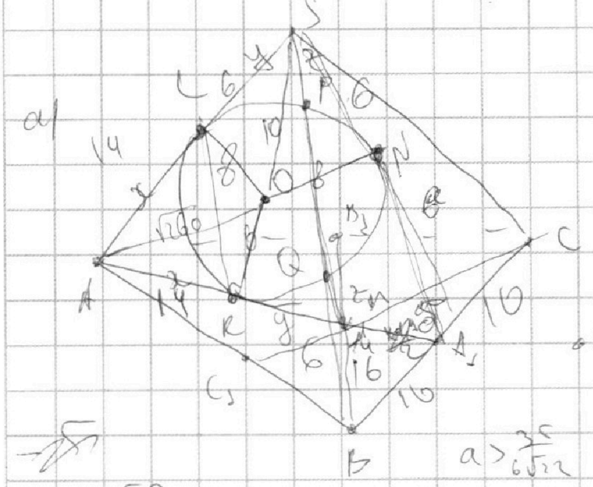
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

а)



$S_{ABC} = 180$

$SA = BC = 20$

$z(SM - z) = y$

$LK \parallel SM$ $\quad AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 - ?$

$\triangle CMB$ – прямоуг

$a < -\frac{35}{6\sqrt{32}}$

$a > 0$

$a < 0$

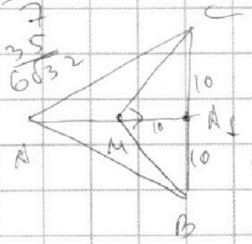
$a > -\frac{35}{6\sqrt{32}}$

$\cancel{x^2 = y + y}$

$a > \frac{35}{6\sqrt{32}}$

$\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7}$

$a < \frac{35}{6\sqrt{32}}$



$= \frac{1}{2} S_{CMB} = \frac{MA_1}{AA_1} \cdot S_{ABC} \cdot \frac{1}{2}$

$CM \cdot MB$

$CM \cdot MB \cdot AA_1 = \frac{1}{2} MA_1 \cdot S_{ABC}$

$\frac{2}{3} CC_1 \cdot \frac{2}{3} BB_1 \cdot AA_1 = \frac{1}{2} MA_1 \cdot S_{ABC}$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 10 \cdot 180 =$

S_{MCB}

$CM \cdot MB = 2 S_{CMB} = \frac{2 \cdot MA_1}{AA_1} \cdot S_{ABC}$

$AA_1 \cdot \frac{2}{3} CC_1 \cdot \frac{2}{3} BB_1 = 2 \cdot MA_1 \cdot S_{ABC}$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot S_{ABC} \cdot 10 MA_1 = \frac{180 \cdot 10 \cdot 9}{2} = \boxed{8100}$

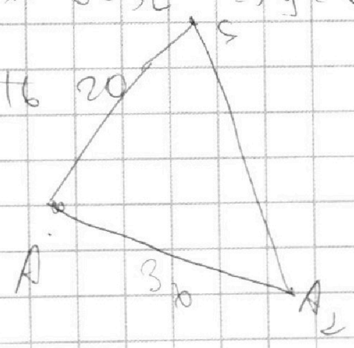
1800
14
14
56
14
196
64
260

180
45
900
720
8100

б)

$\cancel{y+10}$ $SN = 6 = SL \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x = 14$

$y + 10 = 16$ 20



$a^2 - 64$

$14^2 = (a-8)(a+8)$

$196 + 64 = 260$

$a = \sqrt{260}$

$\cos\alpha = \frac{14}{\sqrt{260}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2 \cdot 49}{65} - 1 = \frac{33}{65}$

$\frac{260}{65} = 4$

$\frac{98}{65} - 1$

$400 + 500 - \frac{600 \cdot 33}{65} =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$ab = 2^6 3^{13} 5^{11} k$

$bc = 2^{14} 3^{21} 5^{13} n$

$ac = 2^{16} 3^{25} 5^{28} l$

$a^2b^2c^2 = 2^{36} 3^{59} 5^{52} knl$

$abc = \sqrt{2^{36} 3^{59} 5^{52} knl} \Rightarrow 2^{18} \cdot 5^{26} \cdot 3^{29} \sqrt{3nkl}$

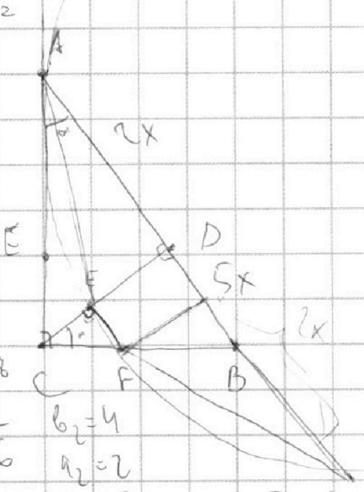
$= \boxed{2^{16} \cdot 5^{26} \cdot 3^{30}}$

наим целое значение которого достигается при $n, k, l = 1$

$2 = 1$ и $1 = 3$

$a+b = 6$, $b+c = 14$, $a+c = 16$

№2



$a_2+b_2+c_2 = 18$

$c_2 = 12$

$b_2 = 4$

$a_2+b_2 = 6$

$a_2 = 2$

$b_2+c_2 = 14$

$a_2+c_2 = 16$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{AD}{DB} \cdot S_{CAB} : \frac{CE}{CA} \cdot \frac{CF}{CB} \cdot \frac{BD}{AB} \cdot S_{CAB} =$

$= \frac{AD}{AB} \cdot \frac{CA}{CE} \cdot \frac{CB}{CF} \cdot \frac{AB}{BD}$

$\frac{AB}{BD} = 1{,}4 = \frac{7}{5}$

$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{2}{7}$ $\frac{AD}{AB} \cdot \frac{AB}{BD} = \boxed{\frac{2}{5}} = \frac{AD}{BD}$

$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$ $\frac{AD}{AC} = \frac{CB}{BD}$

$2x \cdot \cos x = 5x \cdot \sin x$

$\frac{2}{5} = \operatorname{tg} x$

$\operatorname{tg} x = \frac{BD}{CD} = \frac{CD}{AD}$

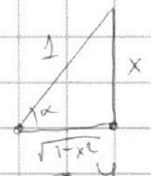
$CD^2 = BD \cdot AD = 10x^2 = 2x \cdot \frac{2}{5} \Leftrightarrow 50x^2 = 4x$

$x = \frac{2}{50}$

$\begin{cases} k+l \geq 6 \\ l+m \geq 14 \\ k+m \geq \end{cases}$

№3

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$



$\sin x = \cos \frac{9\pi - 2x}{10}$

№4

$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77) = 0 \end{cases}$

$x^2 + (y+9)^2 = 4$

при $a = const$

график задает прямую

$y = \frac{6}{6a} - \frac{5x}{6a}$

$81 - 49$

$\frac{9}{7}$ $\frac{81}{49} - 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

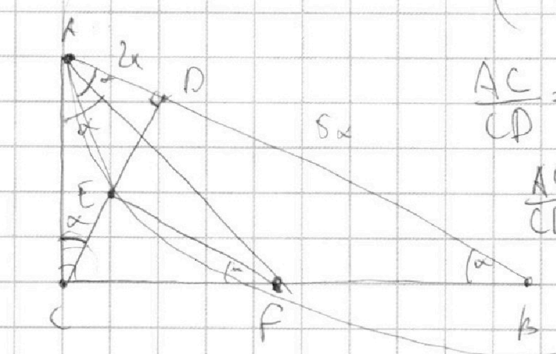
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$\left(\log^2_{11} 0{,}5y + \log^2_{11} x\right)\left(\log_{11} 0{,}5y + \log_{11} x\right) = 0$



$\frac{CF}{CB} = \frac{AC \cdot tg\alpha}{CB}$

$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{CB}$

$\frac{AC}{CD} = \frac{CB}{BD}$

① $\frac{AB}{BD} = 1{,}4 = \frac{7}{5}$

пусть $BD = 5x$, ~~$AD = 2x$~~

$\Rightarrow AD = 2x$

по св-ву высоты прямоуг. о-ка

$CD^2 = AD \cdot DB = 10x^2 \Leftrightarrow CD = x\sqrt{10}$

$\frac{CF}{CB} = \frac{AC \cdot tg\alpha}{CB} = \frac{CE}{ED} = \frac{CD - AD\,tg\alpha}{CD}$

$\frac{AC}{CD} = \frac{CB}{CD}$ $\quad \frac{CF}{CB} = \frac{AC \cdot tg\alpha}{CB}$ $\quad tg\alpha = \frac{AD}{CD} = \frac{2x}{x\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \left(\frac{AD}{AB} \cdot S_{ABC}\right) : \left(\frac{CE}{CD} \cdot \frac{CF}{CB} \cdot \frac{BD}{AB} \cdot S_{ABC}\right) = \frac{AD \cdot CD \cdot CB \cdot AB}{AB \cdot CE \cdot CF \cdot BD} =$

$= \frac{AD}{BD} \cdot \frac{CD}{CE} \cdot \frac{CB}{CF}$

$y = 2x$

$y = -2x$

~~$\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{BC}$~~ $\quad \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{BD} \Leftrightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{BD} = \frac{\sqrt{10}\,x}{5x} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

$\Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{\sqrt{10}}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{2x}{5x} \cdot \left(\frac{CB}{CF}\right)^2 = \frac{2 \cdot 25}{5 \cdot 4} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

Ответ: $\boxed{2{,}5}$

$(a-b)(a^2+b^2) + \frac{16}{3} = 0$

№5

$\log^4_{11} x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$ и $\log^4_{11}(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3} 11^{-14/3}$

$\log^4_{11} x - 6\log_x 11 + \frac{2}{3}\log_x 11 + 5 = 0$ | $\log^4_{11} 0{,}5y + \log_{0{,}5y} 11 + \frac{13}{3}\log_{0{,}5y} 11 + 5 = 0$

$\log^4_{11} x - \frac{16}{3}\log_x 11 + 5 = 0$ | $\log^4_{11} 0{,}5y + \log_{0{,}5y} 11 \cdot \frac{16}{3} + 5 = 0$

~~$\log^4_{11} x = \log^4_{11} 0{,}5y$~~ $\quad \log^4_{11} 0{,}5y - \log^4_{11} x + \frac{16}{3}\left(\log_{0{,}5y} 11 + \log_x 11\right) = 0$

1) $\left(\log_{0{,}5y} 11 + \log_x 11 = 0\right)$ $\quad$ 2) $(a^2+b^2)(a+b) = 0$ $\quad a(t^2 + 2ab) + t = 0$

$t = 0$

2) $t^2 = -2ab$

$a^2 + b^2 = -2ab$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_{11}^4 0{,}5y - \log_{11}^4 x + \frac{16}{3}(\log_{0{,}5y} 11 + \log_x 11) = 0$

$4a^3 - \frac{16}{3a^2} = 0$

① $(a^2+b^2)(a-b) = 0$ ② $a+b=0$

$\frac{16}{3}\sqrt[3]{\frac{16}{3}} - \frac{16}{3}\sqrt[3]{\frac{16}{3}}$

$((a-b)^2 + 2ab)(a-b) = 0$

$a^4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0$

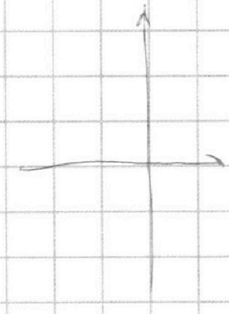
1) $a - b = 0$ 2) $\cancel{(a-b)^2 + 2ab = 0}$

$a^2 + b^2 = 0$

$a^3 = \frac{4}{3}$

$\log_{0{,}5y} 11 = \log_x 11$

$a = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$



$a^4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0$

$f'(a) = 4a^3 - \frac{16}{3}$

$\cancel{\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{3}} - \frac{16}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}}$

$f''(a) = 12a^2$

$\cancel{\log_{0{,}5y}}$

$\log_{11} 0{,}5y$

$x = 0{,}5y$

$\log_{11}^4 x - \frac{16}{3}\log_x 11 + 5 = 0$

$t^4 - \frac{16}{3}t + 5 = 0$

если бы $f(a)$ имела 3и более корней
то $f'(a)$ имела бы более бы 2 корня
$\Rightarrow f(a)$ имеет.

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$

$\log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{(0{,}5y)^3}(11^{-13}) - 5$

$\log_{11}^4 x - \frac{16}{3}\log_x 11 + 5 = 0$

$\log_{11}^4 0{,}5y + \frac{16}{3}\log_{0{,}5y} 11 + 5 = 0$

$\begin{cases} a^4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0 \\ b^4 - a^4 + \frac{16}{3}(a+b) = 0 \end{cases}$

$a^4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0$

$(a+b)((a-b)(a^2+b^2) + \frac{16}{3}) = 0$

$\Rightarrow a + b = 0$

$\cancel{a^3 - b^3 - a^2b +}$

$t(t^2 + 2ab) + \frac{16}{3} = 0$

① $a + b = 0$

② $(a-b)(a^2+b^2) + \frac{16}{3} = 0$

$(\log_{11} x - \log_{11} 0{,}5y)(\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 0{,}5y + \frac{16}{3}) = 0$

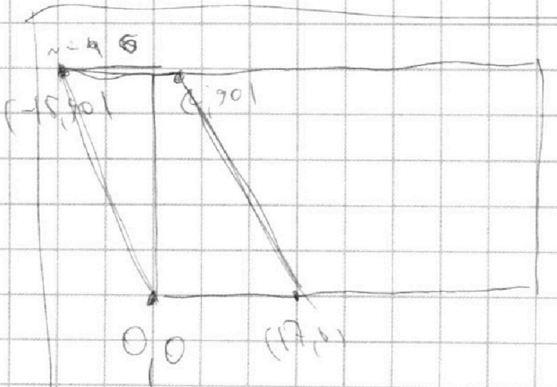
$\log_x 11 = \log_{\frac{1}{0{,}5y}} 11$ $(\log_x 11 - \log_{0{,}5y} 11)($

$0{,}5xy = 1$

$xy = 2$

$\frac{1}{x_1}\ \frac{1}{y}$ — после перест. $= 0{,}5$

Ответ: $0{,}5;\ 2$



$6x_2 - 6x_1 + (y_2 - y_1) = 48$

$6x_2 + y_2 = 6x_1 + y_1$

$\log_x 11 = -\log_{0{,}5y} 11 =$

$= \log_{\frac{1}{0{,}5y}} 11$

$\log_{0{,}5y} 11 = -\log_x 11 =$

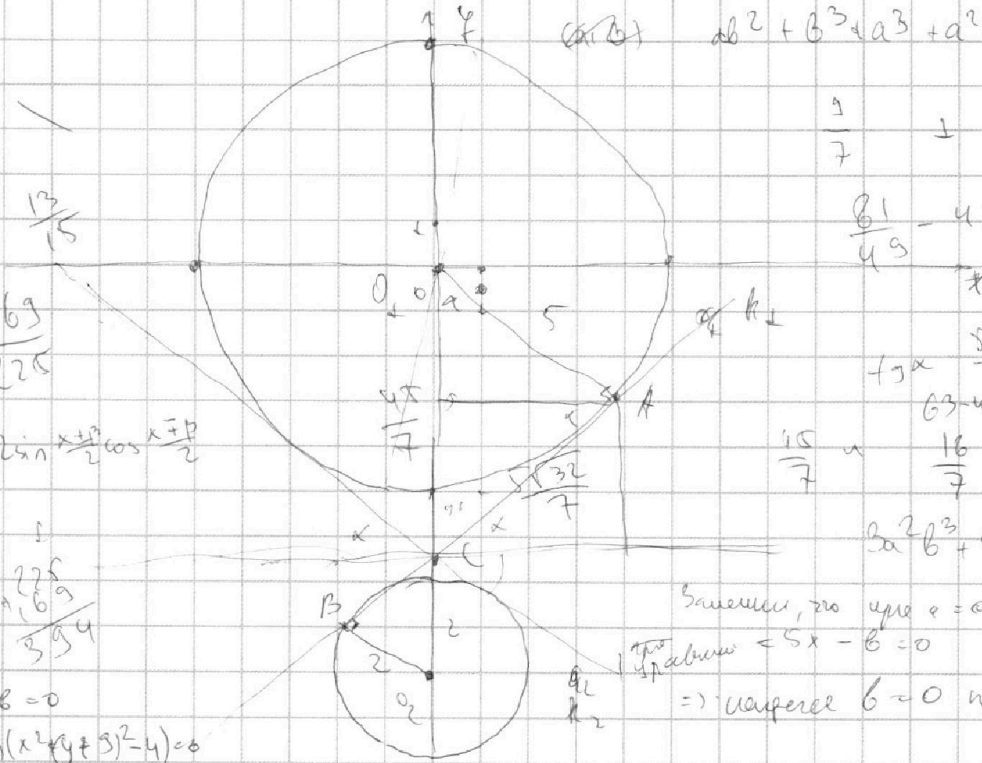
$= \log_{\frac{1}{x}} 11$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\sin x \pm \sin\beta = 2\sin\frac{x\pm\beta}{2}\cos\frac{x\mp\beta}{2}$

$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+(y+3)^2-4)=0 \end{cases}$

Заметим, что при $a=0$ прямая $5x-b=0$ ⇒ исследуем $b=0$ например

$\frac{AC}{BC} = \frac{AO_1}{BO_2} = \frac{5}{2} \Rightarrow OC = \frac{5}{7}\cdot 9 = \frac{45}{7}$

$y = \frac{5x}{6a} - \frac{b}{6a}$

$\frac{b}{6a} = \frac{45}{7}$ $6a = \frac{76}{45}$

$\frac{5}{6a} \in [a_2; a_1]$

$\left[-\frac{\sqrt{32}}{7}; \frac{\sqrt{32}}{7}\right] \setminus \{0\}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) =$

№3

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi-2x}{10}$

$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi-2x}{10}\right)$; $\sin x - \cos\left(\frac{9\pi-2x}{10}\right) = \sin x - \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) = 0$

$2\sin\left(\frac{x - \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5}}{2}\right)\cos\left(\frac{x+\frac{x}{5}-\frac{2\pi}{5}}{2}\right) = 0$

$\sin\left(\frac{2}{5}x + \frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{3x}{5} - \frac{\pi}{5}\right) = 0$

$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{5} =$

$1 + \frac{36}{25} = \frac{\sqrt{61}}{5}$

$\frac{1}{2} AH \cdot BC = S_{ABC} = 180$

$9\cdot 5\cdot 9\cdot 20 = 8100$ $AH\cdot 20 = 360$

$\frac{5\pi+2\pi}{10}$ $\frac{7\pi}{10}$ $\frac{5}{3}$

$\frac{h\cdot 20}{2} = 180 \Rightarrow h = 18$

$\frac{4\cdot 20}{2} = 3180$ $x = 16$