



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot k_1, \quad k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot k_2, \quad k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \cdot k_3, \quad k_3 \in \mathbb{Z}$$

$$abc \text{ как минимум } : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

Заметим, что:

$$(abc)^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot k_1 k_2 k_3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow k_1 k_2 k_3$  как минимум  $: 3$ , т.е.

$k_1 k_2 k_3 = 3m$ .  $\Rightarrow$  м.к. между  $abc$  - четвёрка.

$$\Rightarrow (abc)^2 = 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{52} \cdot m$$

Т.к.  $m$  - можно брать любым удобным образом

$\Rightarrow$  увеличим степень:

$$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26} \cdot m, \text{ но мы знаем, что}$$

$$abc : 5^{28} \Rightarrow abc_{\min} = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \quad (\text{при } m=5^2)$$

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

Сур 1 из 1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arccos = 9\pi - 2x$$

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = 0,9\pi - 0,2x$$

$$\text{ОДЗ: } 0 \leq 0,9\pi - 0,2x \leq \pi$$

$$-0,9\pi \leq -0,2x \leq 0,1\pi$$

$$-0,1\pi \leq 0,2x \leq 0,9\pi$$

$$-0,5\pi \leq x \leq 4,5\pi$$

$$\arccos(\sin x) = 0,9\pi - 0,2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \cos(0,9\pi - 0,2x)$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{2\pi}{5} - 0,2x\right)$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5} - 0,2x\right) - \sin x = 0 \quad 2 \sin\left(\frac{2\pi}{5} - 1,2x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{5} + 0,8x\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{2\pi}{5} - 1,2x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{5} + 0,8x\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5} - 1,2x\right) = 0 \quad \text{или} \quad \cos\left(\frac{2\pi}{5} + 0,8x\right) = 0$$

$$\frac{2\pi}{5} - 1,2x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x \in [0,5\pi; 4,5\pi]$$

$$1,2x = \frac{2\pi}{5} - \pi n \quad | \cdot \frac{5}{6}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} - \frac{5}{6}\pi n$$

$$\frac{2\pi}{5} + 0,8x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$0,8x = \frac{5\pi}{10} - \frac{4\pi}{10} + \pi k \quad | \cdot \frac{5}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{5\pi k}{4}$$

Смр 1 и 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\Rightarrow -0,5\pi \leq \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi n}{6} \leq 4,5\pi \quad | \cdot \frac{6}{\pi}$$

$$-3 \leq 2 - 5n \leq 27$$

$$-5 \leq -5n \leq 25$$

$$-5 \leq n \leq 1$$

$$n \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$$

$$-0,5\pi \leq \frac{\pi}{8} + \frac{5\pi k}{4} \leq 4,5\pi \quad | \cdot \frac{8}{\pi}$$

$$-4 \leq 1 + 10k \leq 36$$

$$-5 \leq 10k \leq 35$$

$$-0,5 \leq k \leq 3,5$$

$$k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$n = -5 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{6} + \frac{25\pi}{6} = \frac{27\pi}{6} = 4,5\pi$$

$$n = -4 \Rightarrow x = \frac{22\pi}{6} = \frac{11\pi}{3}$$

$$n = -3 \Rightarrow x = \frac{17\pi}{6}$$

$$n = -2 \Rightarrow x = 2\pi$$

$$n = -1 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

$$n = 0 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

$$n = 1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{11\pi}{8}$$

$$k = 2 \Rightarrow x = \frac{21\pi}{8}$$

$$k = 3 \Rightarrow x = \frac{31\pi}{8}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ 4,5\pi, \frac{11\pi}{3}, \frac{17\pi}{6}, \right.$$

$$\left. 2\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{21\pi}{8}, \frac{31\pi}{8} \right\}$$

Смр 2 из 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

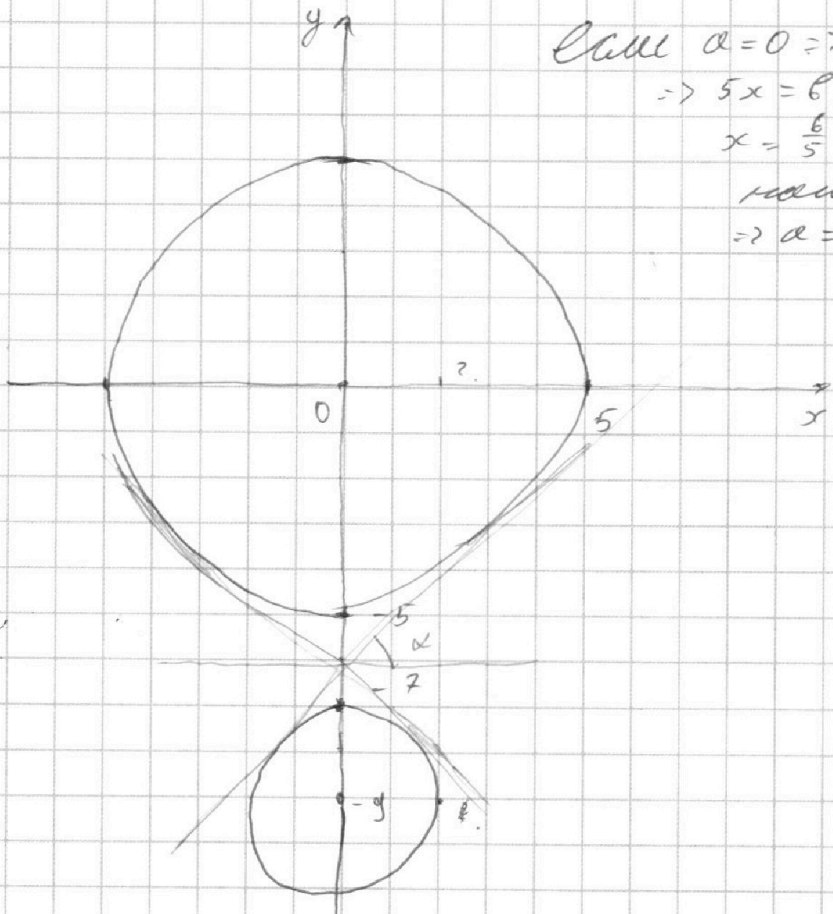
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Стр 1 из 4.

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0. & (1) \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0. & (2) \end{cases}$$

(2)  $x^2 + y^2 = 25$  или  $x^2 + (y+9)^2 = 4$ .



Если  $a=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 5x = b.$$

$$x = \frac{b}{5} - \text{можно}$$

найти макс.в.

$$\Rightarrow a=0 - \text{уд.}$$

$$l: y = \frac{-5x + b}{6a}.$$

$l$  с коэф  $-\frac{5}{6a}$  всегда пересекает окружности  $x^2 + y^2 = 25$  и  $x^2 + (y+9)^2 = 4$  в 4 разных точках.

Движение по ~~одной~~ оси  $y$  осечется из-за счт  $b \Rightarrow$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\operatorname{tg} \angle BOC = \operatorname{tg} \alpha = \frac{5\sqrt{2}}{14} = \frac{4\sqrt{2}}{7} \quad \text{Стор 3 из 4}$$

$$\operatorname{tg} \left| -\frac{5}{6a} \right| > \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$-\frac{4\sqrt{2}}{7} < -\frac{5}{6a} < \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$-\frac{24\sqrt{2}}{35} < \frac{1}{a} < \frac{24\sqrt{2}}{35}$$

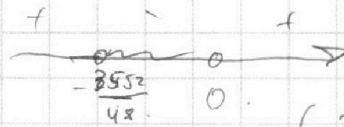
$$\begin{cases} -\frac{5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{7} \\ -\frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{24\sqrt{2}}{35} < \frac{1}{a} \quad \text{①} \quad | \cdot a \neq 0. & -\frac{24\sqrt{2}a}{35} - 1 < 0. \\ \frac{1}{a} < \frac{24\sqrt{2}}{35} \quad \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{①} \quad & \frac{24\sqrt{2}a + 35}{35} > 0 \\ & a > -\frac{35}{24\sqrt{2}} \\ & a > -\frac{35\sqrt{2}}{48} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{②} \quad & -\frac{5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{7} \quad a \neq 0. \\ & \frac{4\sqrt{2}}{7} + \frac{5}{6a} < 0. \end{aligned}$$

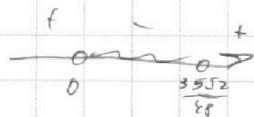
$$\frac{24\sqrt{2}a + 35}{a} < 0.$$



$$a \in \left( -\frac{35\sqrt{2}}{48}; 0 \right)$$

$$\text{②} \quad -\frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{a \cdot 24\sqrt{2} - 35}{a} < 0.$$



$$a \in \left( 0; \frac{35\sqrt{2}}{48} \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

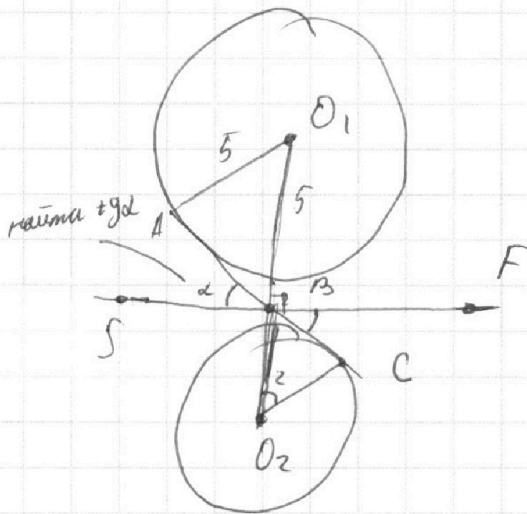


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$  достаточно чтобы  $|\operatorname{tg} \angle (l_1, O_2)| > \operatorname{tg}$  *большой вписан.*

*касательных.* ~~меньше~~  $\Rightarrow |-\frac{5}{6a}| > \operatorname{tg}$  *большой вписан.*

Найдем его:



Рассм.  $\triangle O_1 A B$  и  $\triangle O_2 C B$ :

$\angle O_2 B C = \angle O_1 B A$  - *вертикал.*

$\angle O_1 A B = \angle O_2 C B = 90^\circ$  (радиус перпенд. касат.)  $\Rightarrow \triangle O_1 A B \sim \triangle O_2 C B$   
*по двум углам.*

$$OK = \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{O_1 B}{O_2 B} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad O_1 B = \frac{45}{7}$$

$$O_1 O_2 = 9 \quad \Rightarrow \quad O_2 B = \frac{18}{7}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \angle A B S = \operatorname{tg} \angle B O_2 C$$

$$BC = \sqrt{\frac{324}{49} - \frac{198}{49}} = \frac{8\sqrt{2}}{7} \quad (\text{по сл. уг. } T_h \text{ теорема}).$$

$\Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ответ:  $a \in \emptyset \left( -\frac{35\sqrt{2}}{48}, \frac{35\sqrt{2}}{48} \right)$  Стр 4 из 4.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11} x = a, \quad x > 0, \quad x \neq 1 \Rightarrow a \neq 0.$$

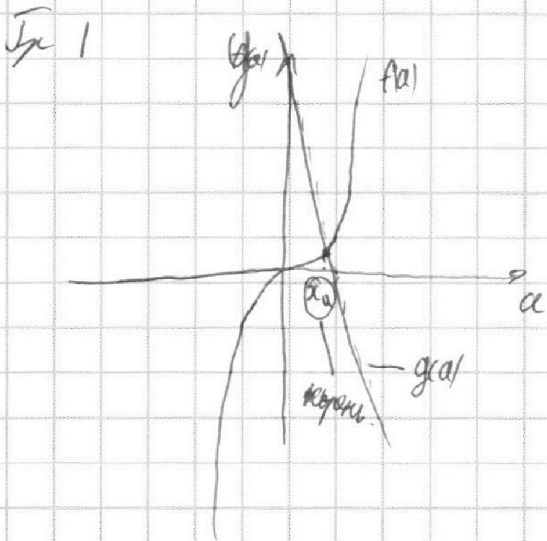
$$\log_{11} 0.5y = b, \quad y > 0, \quad y \neq 2 \Rightarrow b \neq 0.$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \quad | \cdot 3a.$$

$$3a^5 - 18 = -2 - 15a.$$

$$3a^5 = 16 - 15a.$$

$$f(a) = 3a^5 \quad \nearrow \quad | \Rightarrow \text{максимум один корень}$$
$$g(a) = -15a + 16 \quad \searrow$$



$$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5 \quad | \cdot 3b$$

$$3b^5 + 3 = -13 - 15b.$$

$$3b^5 = -15b - 16.$$

$$f(b) = 3b^5 \quad \nearrow$$

$$g(b) = -15b - 16 \quad \searrow \quad | \Rightarrow \text{максимум 1 корень}$$

Стор 1 из 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

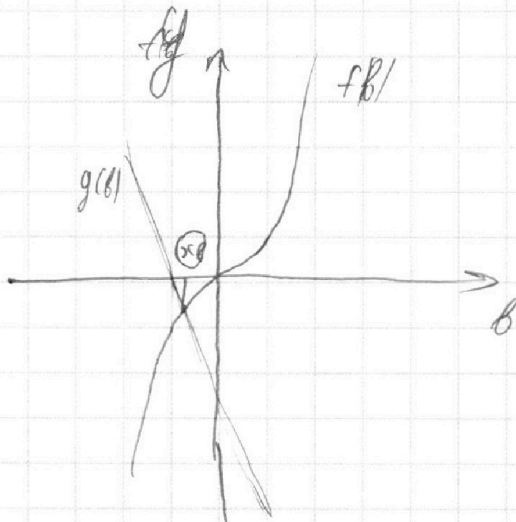
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Стр 2 из 2

Зр 2



из соображений симметрии для  
ур 1 и 2 (каждый из  $x$ -осей и тот же  $a$   
точка пересеч. с осью  $OX$  и  $OY$  соответственно)  
заменим что  $x_a$  и  $x_b$  - произвольны.

$$\Rightarrow x_a - x_b = 0.$$

$$x_a = \log_{0.5} x. \quad \Rightarrow \quad \log_{0.5} 0.5xy = 0.$$

$$x_b = \log_{0.5} xy \quad \Rightarrow \quad 0.5xy = 1.$$

$$xy = 2.$$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

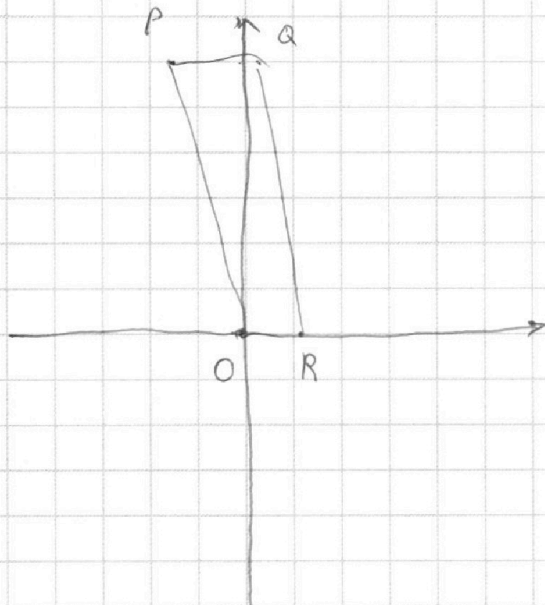
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1 из 2



$$\begin{cases} y \geq -6x \\ y \geq 0 \\ y \leq 90 \\ y \leq -6x + 102 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x_2 + y_2 = 48 + 6x_1 + y_1 \\ y + 6x \leq 102 \\ y + 6x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 + 6x_2 \max = 102 \\ y_2 + 6x_2 \min = 48 \\ y_1 + 6x_1 \max = 54 \\ y_1 + 6x_1 \min = 0 \end{cases}$$

Составим таблицу для максимизации.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$y_1 + 6x_1 =$	$y_2 + 6x_2 =$	кол-во мячей	Стрел 2 из 2
54	102	16 · 16	
53	101	15 · 15	
52	100	15 · 15	
...	...		
48	96	16 · 16	
...	...		
6	54	16 · 16	
...	...		
0	48	16 · 16	

→ кол-во мячей всего =  $\Sigma =$

$$= 15^2 \cdot 5 \cdot 9 + 16^2 \cdot 10 = 225 \cdot 45 + 2560 =$$

$$\begin{array}{r}
 1 \ 2 \\
 \times 225 \\
 \hline
 1125 \\
 450 \\
 + 1125 \\
 \hline
 10125
 \end{array}$$

$$= 12685$$

Ответ: 12685

$$10125 + 2560 =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$y_1 + 6x_1 = 53$   
 $y_2 + 6x_2 = 101$

$y_1 + 6x_1$	$y_2 + 6x_2$
54	102
53	101
52	100
...	...
48	96
42	90
36	84

$16 \cdot 16$   
 $15 \cdot 15$   
 $15 \cdot 5$   
 $15^2 \cdot 45 = 16^2 \cdot 10$   
 $16^2 \cdot 10$

$53 \rightarrow 49$   
 $47 \rightarrow 43$   
 $41$   
 $37$   
 $31$   
 $25$   
 $19$   
 $13$   
 $7$   
 $1$

$15$   
 $8$   
 $15$   
 $8$

$16 \cdot 16$   
 $16 \cdot 16$   
 $16$

$1$   
 $16$

$-8 \rightarrow 7$   
 $0 \rightarrow 15$   
 $-3 \rightarrow 6$   
 $-1 \rightarrow 14$

$54$   
 $48$   
 $42$   
 $36$   
 $30$   
 $24$   
 $18$   
 $12$   
 $6$   
 $0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

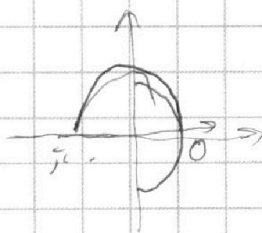
 МФТИ



- |                          |                                     |                                     |                                     |                          |                                     |                                     |
|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                        | 6                                   | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\arccos e$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

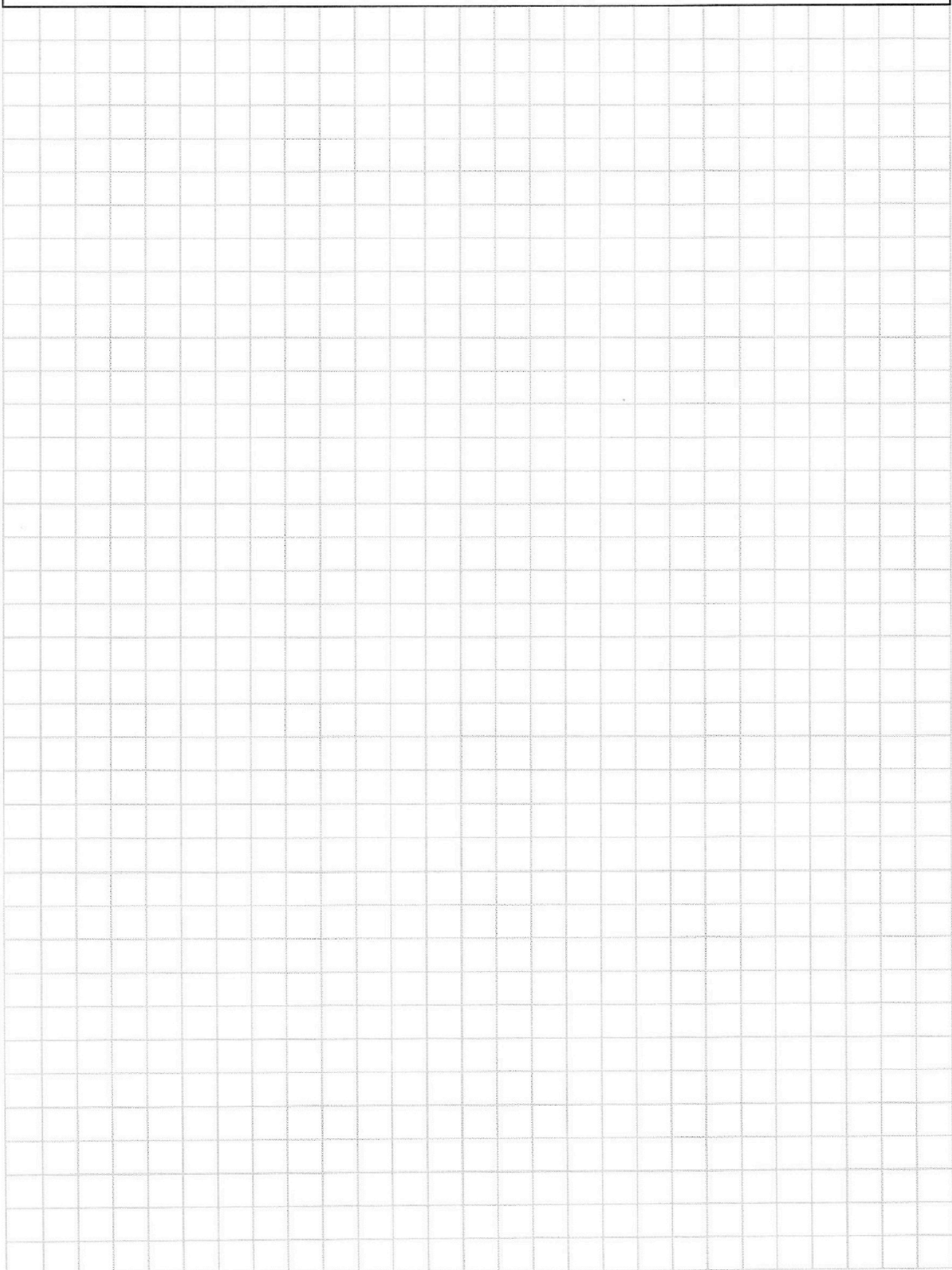
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

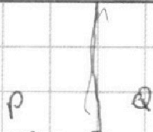
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



-6. 9.  
16<sup>2</sup>



$$a = y_1 + 6x_1 = 54$$

$$b = y_2 + 6x_2 = 102$$

$$y_1 + 6x_1 = 54$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$$

-5. 8 (19)

1/6.

54	102	180	54	-6
53	101	150	0	$0 \leq a + 6x_1 \leq 90$
52	100	48	6	$48 \leq b - 6x_2 \leq 102$
51	99			
50	98			
49				
48	96			

$$(y_2 + 6x_2) - (y_1 + 6x_1) = 48$$

$$y_2 + 6x_2 = 48 + y_1 + 6x_1$$

$$y \leq -6x$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 90 \\ y \leq -6x + 102 \end{cases}$$

$$-15a + b = 90$$

$$2a + b = 90$$

$$a = 0$$

$$y + 6x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$y \leq 90$$

$$y + 6x \leq 102$$

$$102 - 48$$

$$54$$

47 95

$$-15a = 90$$

$$a = -6$$

$$(y_2 + 6x_2)_{\max} =$$

$$y_1 + 6x_1, \max = 54$$

$$17 \cdot 6 = 102$$

$$17a + b = 0$$

min 0

$$-102 = -b$$

$$2a + b = 90$$

$$y_2 + 6x_2, \min 48$$

$$\max 102$$

$$b = 102$$

$$15a =$$

$$y_1 + 6x_1 = 54$$

$$a = -6$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

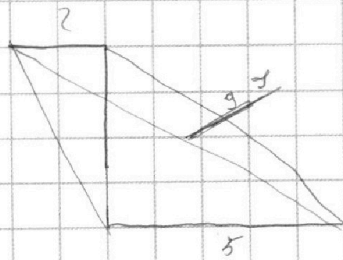
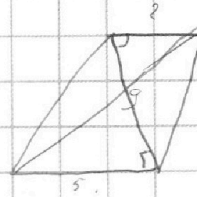
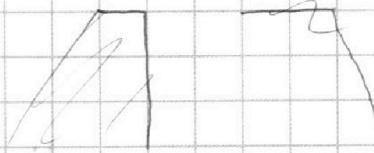
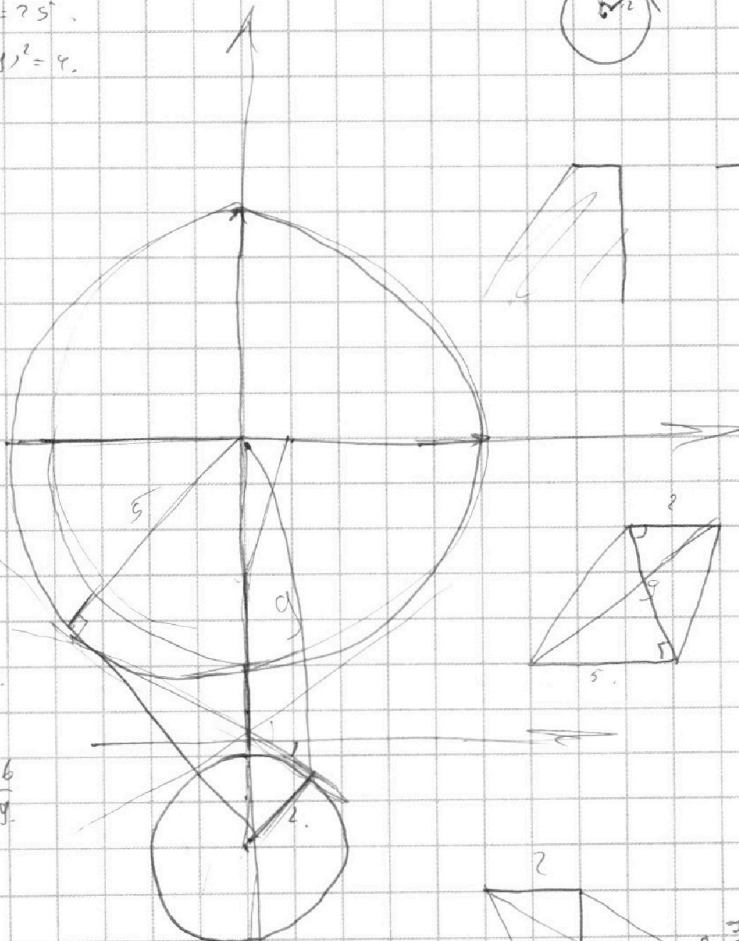
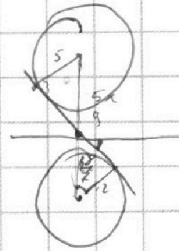
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = \frac{-5x + 6}{6x}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ x^2 + (y+4)^2 &= 4 \end{aligned}$$



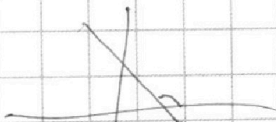
$$\begin{aligned} 4 \cdot 49 \\ 200 - 4 \\ 196 \end{aligned}$$

$$\frac{324}{49} = \frac{196}{49}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 180 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{128}{49}}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ -196 \\ \hline \end{array}$$



$$\frac{9}{2} \cdot 2$$

$$\frac{18}{2}$$

$$-\frac{48\sqrt{2}}{35} <$$

$$0 < \left( -\frac{48\sqrt{2}}{35}, \frac{48\sqrt{2}}{35} \right)$$

$$-\frac{8\sqrt{2}}{7}$$

$$-\frac{8\sqrt{2}}{7} < -\frac{5}{6} \alpha < \frac{8\sqrt{2}}{7}$$

$$-\frac{8\sqrt{2}}{7} < \frac{5}{6} \alpha < \frac{8\sqrt{2}}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta \neq \sin \beta \cdot \cos \alpha \quad \left( \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos$$

$\sin$

$$\cos \left( \frac{9\pi - 2x}{10} \right) = \sin x$$

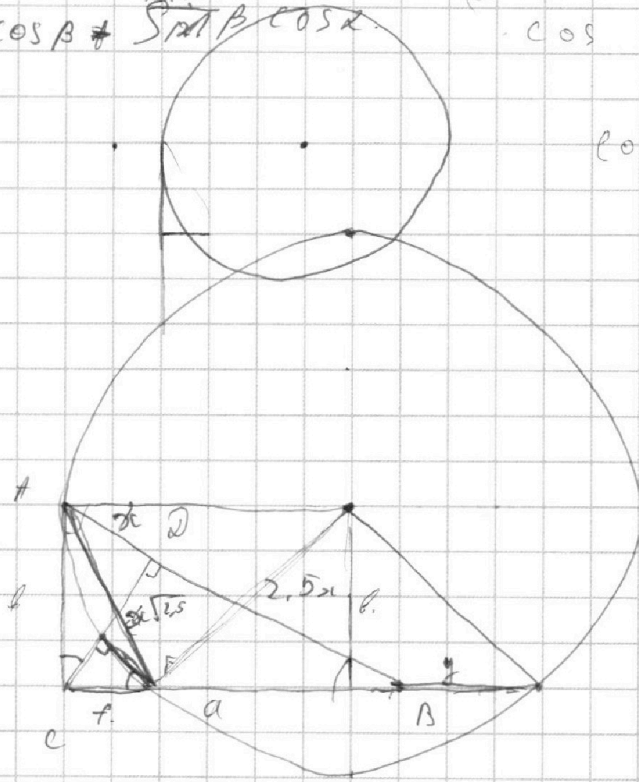
$$\cos (0,9\pi - 0,5x) = \sin x$$

$$\cos 0,9\pi \cdot \cos 0,5x + \sin 0,5x \cdot \sin 0,9\pi = \sin x$$

$$\frac{9\pi}{10} = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5}$$

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha$$

$$\sin \left( \frac{2\pi}{5} - 0,5x \right) = \sin x$$



$$f \cdot a = b^2$$

$$\frac{AC}{CF} = \frac{DC}{CF} = \frac{AD}{CE} = \frac{b}{a}$$

$$f = \frac{b^2}{a}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{b}{a}$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{b^2}{a^2}$$

$$h^2 + x^2 = b^2$$

$$h^2 + 6,25x^2 = a^2$$

$$a^2 + b^2 = 12,25x^2$$

$$2h^2 = 12,25x^2 - 7,25x^2$$

$$2h^2 = 5x^2$$

$$h = x\sqrt{2,5}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2$$

$$(\sin \alpha - \cos \alpha) \cos \beta$$

$$b^2 = 7,25x^2$$

$$a = x\sqrt{8,75}$$

$$\begin{matrix} 175 \\ 105 \\ 12,25 \end{matrix}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

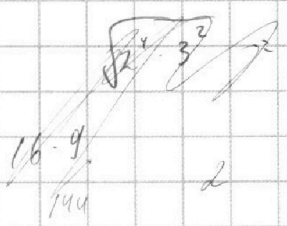


$$\begin{aligned}
 ab &= 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot K_1 && 46 \\
 bc &= 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot K_2 && 59 \\
 ac &= 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \cdot K_3 && 24 \\
 abc &= 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot K_1 K_2 K_3 && 52
 \end{aligned}$$

$abc$  - *нормальное*  $\Rightarrow K_1, K_2, K_3 \vdots 3$

$$\sqrt{2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}} = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26} \cdot K_1 K_2 K_3$$

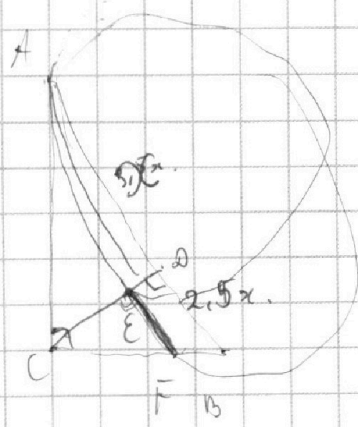
$$abc_{\min} = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \cdot 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$



$$\boxed{2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}}$$

$$d = 2^4 \cdot k$$

$$\frac{abc^2}{ac} = \frac{2^{20} \cdot 3^{34} \cdot 5^{24} \cdot K_1 K_2}{2^{10} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \cdot K_3}$$



$$b^2 = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot K_1 K_2 K_3$$

$$a = \frac{2^{21} \cdot 3^{38} \cdot 5^{34} \cdot K_1 K_3}{2^{21} \cdot 2^{21} \cdot 5^{13} \cdot K_2} = 2^8 \cdot 3^{19} \cdot 5^{26} \cdot \frac{K_1 K_3}{K_2}$$

$$c = \frac{2^{30} \cdot 3^{46} \cdot 5^{41} \cdot K_2 K_3}{2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot K_1} = 2^{24} \cdot 3^{33} \cdot 5^{30} \cdot \frac{K_2 K_3}{K_1}$$

$$Fx = 2AB$$

$$AB = 3,5x$$

$$\frac{AB}{BD} = 1,4$$

$$AB = (AB - x) \cdot 1,4$$

$$1,4x = 0,4AB$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$$

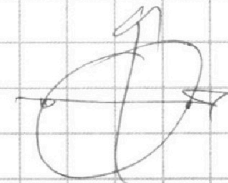
$$\sin \cdot \sin =$$

$$\sin \left( \frac{2\pi}{5} - 0,5x \right) = 0$$

$$\cos \alpha + \cos \beta$$

$$\cos \left( \frac{2\pi}{5} + 0,5x \right) = 0$$

$$\frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$$



$$\sin x + y = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$$

$$\sin x - y = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$$

$$2 \sin y \cdot \cos x$$

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad y = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\frac{2\pi}{5} - 0,5x = \pi n$$

$$\frac{2\pi}{5} + 0,5x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x + y = \alpha$$

$$x - y = \beta$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{5}$$

$$\frac{5\pi}{10} = \frac{4\pi}{10}$$

$$\frac{\pi}{10} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{\pi}{4}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$

$$2 \sin x \cdot \cos y$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin y \cdot \cos x$$

$$\sin \left( \frac{2\pi}{5} - 0,5x \right) - \sin x = 2 \sin \left( \frac{2\pi}{5} + 0,5x \right) \cos \left( \frac{2\pi}{5} + 0,5x \right) = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_a x = a$$

$$x > 0$$

$$x \neq 1$$

$$\log_a xy = a + b$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5$$

$$\parallel^{a+b} = xy$$

$$a^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5a$$

$$a^5 = -5a + \frac{16}{3}$$

$$\log_a^4 (0,5y)$$

$$a^5 = \frac{16 - 15a}{3}$$

$$\log_x^3 \frac{1}{721} = -\frac{2}{3} \log_x 11$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^4 - 6a = -\frac{2a}{3} - 5$$

$$\log_a x = a$$

$$a^4 = \frac{6}{a}$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5$$

$$-\frac{2}{3} \log_x 11$$

$$a^5 + b^5 = -5a - 5b$$

$$a^5 + 5a = -b^5 - 5b$$

$$\log_x 11 = a$$

$$1 \cdot a$$

$$a(10^4 + 6) = -b(b^4 + 5)$$

$$a + b$$

$$3a^5 = -15a + 16$$

$$3b^5 = -15b - 16$$

$$3(a^5 + b^5) = \left(\frac{1}{a}\right)^4 - 6a - 5 - \frac{2}{3}a$$

$$\frac{16}{3}$$

$$= 15(b - a) - 3$$

$$\frac{16a^5}{3} = a^4 + 1$$

$$a^5 = -5a + \frac{16}{3}$$

$$b^5 = -5b - \frac{16}{3}$$

$$-\frac{16}{3}$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5$$

$$b^5 + 1 = -\frac{13}{3} - 5b$$

$$b^5 = -\frac{16}{3} - 5b$$