



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .  $2^{22} 3^{26} 5^{36}$
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-14;42)$ ,  $Q(6;42)$  и  $R(20;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна  $90$ ,  $SA = BC = 12$ .
- а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
- б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен  $5$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

исходя из усл.  $ac = x \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$ ,  $ab = y \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$ ,  
 $bc = z \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$ , где  $x, y, z \in \mathbb{N}$ , числа  $2, 3$  и  $5$  взаимно просты)

$$\Rightarrow ac \cdot b \cdot c \cdot ab = (abc)^2 = xyz \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

$$\Rightarrow abc : 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27} \quad (\text{так } (abc)^2 : 3^{41}, \text{ то } abc : 3^{\frac{41}{2} + \frac{1}{2}}, \text{ и т.д.})$$

замечим, что  $ac : 5^{30} \Rightarrow abc : 5^{30} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow abc : 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \Rightarrow \min abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

приведем пример таких  $a, b, c$ :

$$a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{15}, \quad b = 2^2 \cdot 3^2, \quad c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$$

$$\Rightarrow abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \text{ существует.}$$

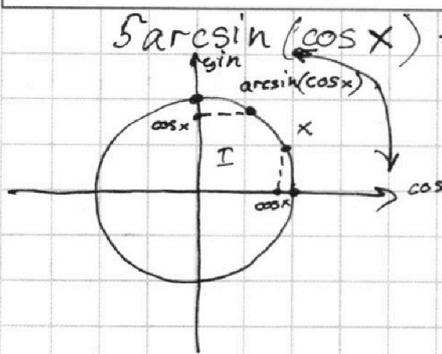
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ОДЗ: } |\arcsin(\cos x)| \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \left| x + \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x \in [-3\pi; 2\pi]$$

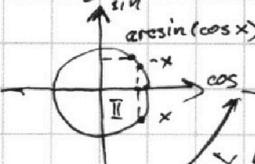
$$\Rightarrow 1.) \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - (x - 2\pi n), x \in [0 + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi n = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = 2\pi + 10\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi n}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}; 2\pi; -\frac{4\pi}{3}; -3\pi$$

но  $x \in [0 + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n] \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}; x = 2\pi$  (с ур. ОДЗ)

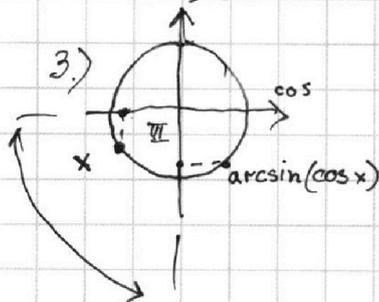
2.)   $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} + (x - 2\pi n)$ ,  $x \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 0 + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$ .

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{2} + 5x - 10\pi n = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = -2\pi + 10\pi n \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2}n$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}; 2\pi; -3\pi \text{ (с ур. ОДЗ)}$$

с ур. ограничений на  $x$  в 2.)  $x = -\frac{\pi}{2}; x = 2\pi$



$$\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} - 2\pi n, x \in [-\pi + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 5x + \frac{5\pi}{2} - 10\pi n = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = -2\pi + 10\pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{2}; 2\pi; -3\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2}; -3\pi$$

с ур. + ур. 2

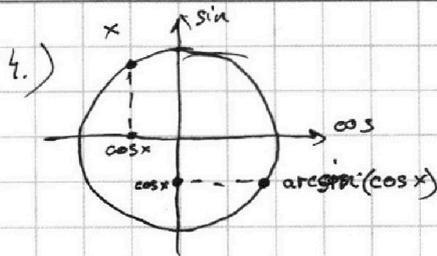
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - (x - 2\pi n);$$

$$x \in \left[ \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi n = \frac{\pi}{2} + x$$

$$6x = 2\pi + 10\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{3}; 2\pi; -\frac{4\pi}{3}; -3\pi \text{ (с уч. ОДЗ) (в к.1) это уже не решение)}$$

$$\text{с уч. на } x \text{ 4.) } x = -3\pi; -\frac{4\pi}{3}$$

в п.1.), 2.), 3.) и 4.) в общем рассмотрели все возможные значения  $x$ .  $\Rightarrow$  найдены все значения  $x$ .

$$x = 2\pi; \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{4\pi}{3}; -3\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

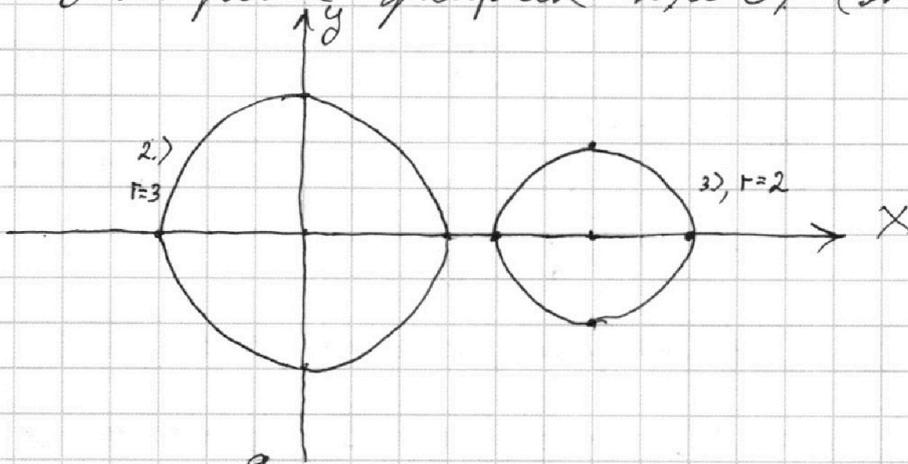
1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

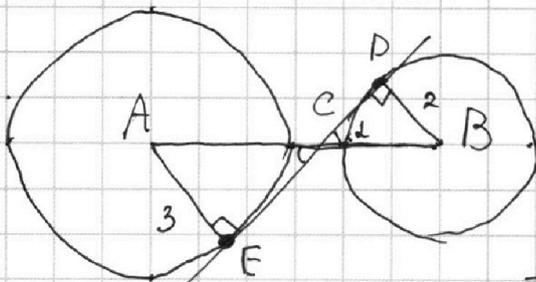
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + 2y - 36 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}6 & 1) \\ x^2 + y^2 = 9 & 2) \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 & 3) \end{cases}$$

Построим график 2) и 3) (это окружности)



пусть  $-\frac{a}{2} = a_1$ . 1.) - это прямая. нужно найти все  $-2a_1$ , где  $a_1$  - коэфф. наклона, при кот. Е прямая, пересек. график в 4 точки (это возможно лишь тогда, когда эта прямая пересек. Зокр. в 2м. и II окр в 2. точках. так как есть симметрия отн.  $x$ , то если при  $a_1$  такое есть, то и при  $-a_1$  такое есть, и наоборот - если при  $a_1$  невозможно, то и при  $-a_1$  невозможно  $\Rightarrow$  найдём все  $a_1 \geq 0$  (для удобства) пусть  $a_0$  - коэфф. общей внутренней касательной к 2 окр. тогда при  $a_1 \in [0; a_0)$  прямая существует. при  $a_1 \geq a_0$  решений максимум 2,  $\Rightarrow a_1 \in [0; a_0)$  найдём  $a_0$ :



~~как~~  $ED$  - кас.  $\Rightarrow$  углы прямые,  
 $AB = 6$  (из координат,  $A=(0,0), B=(6,0)$ )  
 $\angle DCB = \angle ACE$  (верт.)

$$a_0 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{DB}{CD}. \quad \triangle CDB \text{ и } \triangle ACE \sim \text{по 2 \angle.}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{DB} = \frac{AC}{CB} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2AC = 3CB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = 1,5CB. \quad AB = AC + CB = 2,5CB = 6$$

$$BC = 2,4. \quad \text{по т. Пифагора: } CD = \sqrt{CB^2 - DB^2}$$

$$CD = \sqrt{5,76 - 4} = 4\sqrt{0,11} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{2\sqrt{0,11}} \Rightarrow a_1 \in [0; \frac{1}{2\sqrt{0,11}})$$

$$\Rightarrow a \in (-\frac{1}{\sqrt{0,11}}; \frac{1}{\sqrt{0,11}})$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Равенства можно переписать в виде

$$1) \log_3^4 x = -\frac{7}{2} \log_x 3 - 8$$

$$2) \log_3^4(5y) = +\frac{7}{2} \log_{(5y)} 3 - 8$$

как видите,  $5y = x \Rightarrow$

надо найти всевозможные ~~решения~~ <sup>произведения 2</sup> ~~решения~~  $\cdot \frac{1}{5}$

$$\log_3^4 x = \frac{1}{\log_x 3}, \quad \log_x 3 = t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t^4} = -\frac{7}{2} \log_x 3 - 8 \quad \log_{5y} 3 = t,$$

$$\frac{7}{2} t + \frac{1}{t^4} = -8. \text{ есть лишь } \frac{1}{5} \text{ р., так при } t \geq 0$$

реш. нет, а при  $t < 0$  ~~решения 2~~ и при  $t > -1$

реш. нет, то при  $t < -1$ ,  $\frac{7}{2} t$  умень-

шается ~~быстрее~~  $\frac{1}{t^4}$  уменьшается быстрее,  
чем  $\frac{1}{t^4}$ .  $\Rightarrow$  надо найти ~~5~~ ~~решения~~ ~~единст-~~

венно возможная пара  $5y = x, xy = \frac{1}{5} x^2$

аналогично есть лишь 1 реш.  $5y$ , придем

$$5y = -x \text{ (из симметрии)} \Rightarrow xy = -\frac{1}{5} x^2$$

$$-\frac{7}{2} \log_x 3 = \frac{7}{2} \log_{(5y)} 3 \quad (t = -t, \text{ из симметрии})$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{5y} \Rightarrow xy = \frac{1}{5}, \text{ и это } \frac{1}{5} \text{ значение.}$$



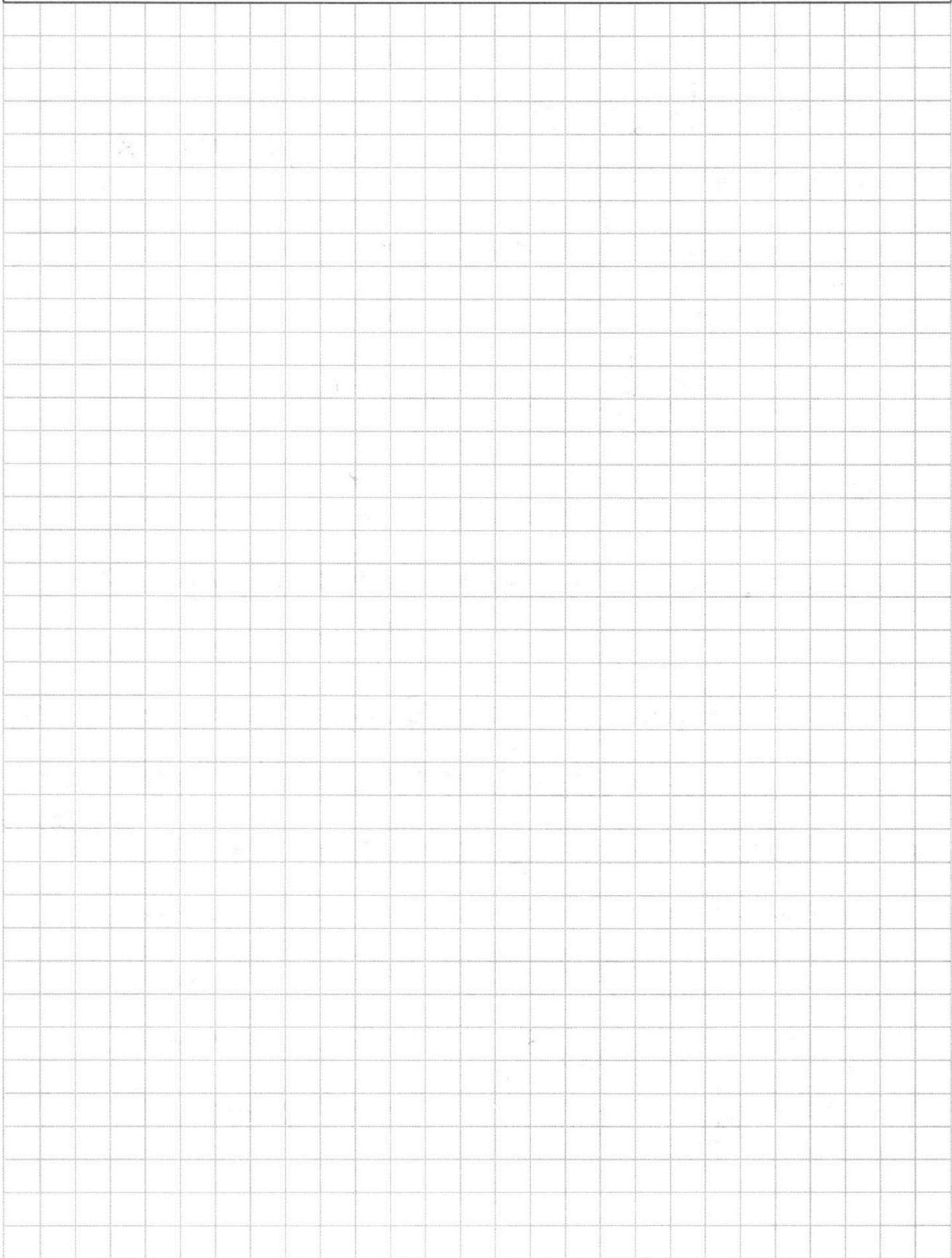
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



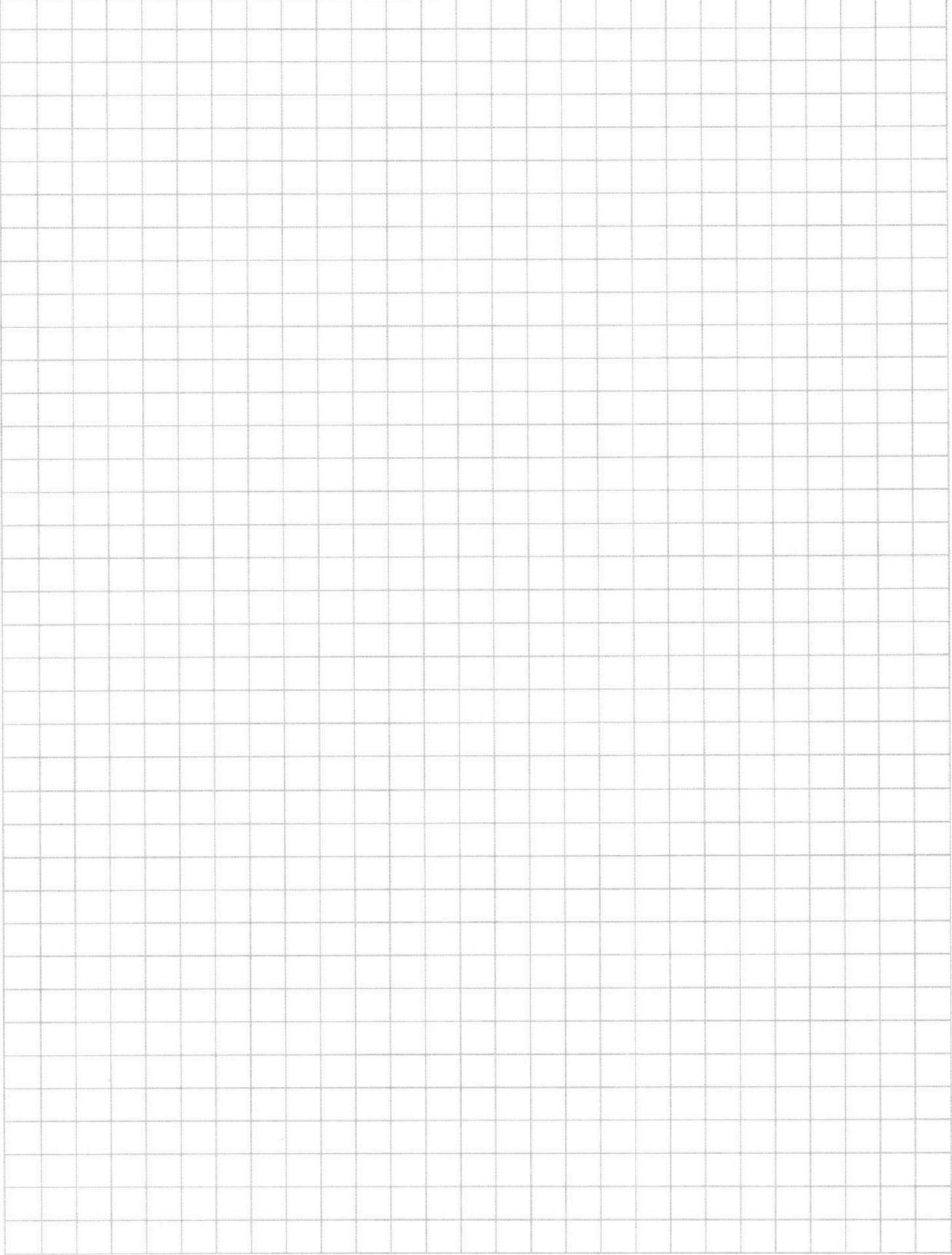
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

