



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $2^{150} \cdot 3^{300}$ ?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $CF$  – биссектриса угла  $C$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $ED$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что площадь треугольника  $BCF$  в 16 раз больше площади треугольника  $DGF$ .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = x^5 + ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = -3x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения  $abc$ .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписан в окружность  $\omega$ , а на дуге  $AC$ , не содержащей точку  $B$ , взяты точки  $E$  и  $D$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $F$ . На лучах  $EA$  и  $DC$  отметили точки  $X$  и  $Y$  соответственно таким образом, что  $AX = CF$  и  $CY = AF$ . Найдите площадь четырёхугольника  $BXFY$ , если  $BF = 17$ ,  $XY = 31$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N 1 1-я стр

$$|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2+5| = |(x^3+4) - (x^2-1)|$$

↑полож      ↑полож      ↑полож      - можно возвести в квадрат

$$(x^3+4)^2 + (x^2-1)^2 + 2|x^3+4| \cdot |x^2-1| \leq ((x^3+4) - (x^2-1))^2 =$$

$$(x^3+4)^2 + (x^2-1)^2 - 2(x^3+4)(x^2-1)$$

$$2|x^3+4| \cdot |x^2-1| \leq -2(x^3+4)(x^2-1)$$

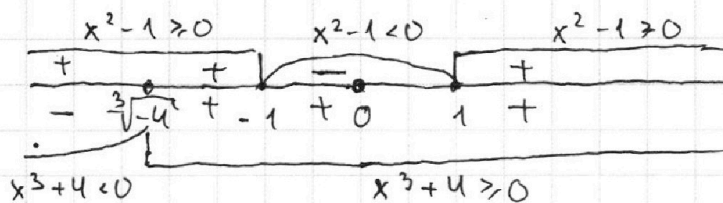
Рассмотрим случаи, когда  $x^3+4 \geq 0$  и  $x^2-1 \geq 0$  и наоборот.

$$x^3+4 \geq 0 \quad x^3 \geq -4 \quad \Rightarrow \quad x \geq \sqrt[3]{-4}$$

$$x^3+4 < 0 \quad x^3 < -4 \quad \Rightarrow \quad x < \sqrt[3]{-4}$$

$$x^2-1 \geq 0 \quad x^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

$$x^2-1 < 0 \quad x^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad x \in (-1; 1)$$



Возьмем отрезок  $(-\infty; \sqrt[3]{-4})$ . Тогда  
меньше 0 поэтому берем отрицательный знак.

$$2|x^3+4| \cdot |x^2-1| \leq -2(x^3+4)(x^2-1)$$

$$2 \cdot (-(x^3+4)) \cdot (x^2-1) \leq -2(x^3+4)(x^2-1) \quad \text{верно при любых } x$$

(x = -1)      (x = \sqrt[3]{-4})

Возьмем отрезок  $[\sqrt[3]{-4}; -1]$ . Тогда  
равно 0 при  $x^2=1$  и  $x^3=-4$

$$2|x^3+4| \cdot |x^2-1| \leq -2(x^3+4)(x^2-1)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1 2а стр

$$2(x^3+4)(x^2-1) \leq -2(x^3+4)(x^2-1)$$

отриц. произведение если  $x^2 \neq 1$  или  $x^3 \neq -4$

$$0 \leq -4(x^3+4)(x^2-1) \quad \text{не имеет решений, если } x^2 \neq 1$$

↑                      ↑  
полож. или 0            иначе имеет, или если  $x^3 \neq -4$

Возьмем отрезок  $(-1; 1)$  - нет точек когда равно 0  
полож.                      ← отриц.

$$2|x^3+4| \cdot |x^2-1| \leq -2(x^3+4)(x^2-1)$$

$$2(x^3+4) \cdot (-(x^2-1)) \leq -2(x^3+4)(x^2-1) \quad \text{верно при любых } x$$

$$-2(x^3+4) \cdot (x^2-1)$$

Возьмем отрезок  $[1; +\infty)$  - равно 0 при  $x^2=1$  ( $x=1$ )  
полож.                      положит. или равно 0

$$2|x^3+4| \cdot |x^2-1| \leq -2(x^3+4)(x^2-1)$$

$$2(x^3+4) \cdot (x^2-1) \leq -2(x^3+4)(x^2-1)$$

отриц. произв. если  $x^2 \neq 1$

$$0 \leq -4(x^3+4)(x^2-1) \quad \text{не имеет решений, если } x^2 \neq 1,$$

↑                      ↑  
полож.            полож. или 0            иначе имеет ( $x=1$ )

Получа  $x$  принадлежит (включая все верхние решения)

$$x \in (-\infty; \sqrt[3]{-4}) \cup [\sqrt[3]{-4}] \cup [-1] \cup (-1; 1) \cup [1]$$

$$x \in (-\infty; \sqrt[3]{-4}] \cup [-1; 1]$$

$$\text{Ответ: } x \in [-\infty; \sqrt[3]{-4}] \cup [-1; 1]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2 1-я стр.

Пусть коэф-т геом. прогр. равен  $d$ . Тогда  $b = ad$ ;  $c = ad^2$

$$abc = a \cdot ad \cdot ad^2 = a^3 \cdot d^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

Пусть  $a = 2^x \cdot 3^y$ ;  $d = 2^m \cdot 3^n$ , где  $x, y, m, n$  — <sup>неотриц.</sup> целые <sup>числа</sup>

~~аналогично~~

$$a^3 \cdot d^3 = (2^x \cdot 3^y)^3 \cdot (2^m \cdot 3^n)^3 = 2^{3x} \cdot 3^{3y} \cdot 2^{3m} \cdot 3^{3n} =$$

$$2^{3(x+m)} \cdot 3^{3(y+n)} = 2^{150} \cdot 3^{300} \Rightarrow 3(x+m) = 150 \Rightarrow x+m = 50$$

$$3(y+n) = 300 \Rightarrow y+n = 100$$

Тогда  $x$  может принимать значения целых чисел от 0 до 50 (т.к.  $m$  хотя бы 0 и  $x+m=50$ ) и  $y$  может

принимать значения целых чисел от 0 до 100

(т.к.  $n$  хотя бы 0 и  $y+n=100$ ). Тогда  $a = 2^x \cdot 3^y$

может иметь такое кол-во значений:

$$(50 - 0 + 1) \cdot (100 - 0 + 1) = 51 \cdot 101 = 5151$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3 1-я стр.

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

Пусть  $y \neq 2$ . Тогда это квадратное уравнение. Найдем дискриминант.

$$D = b^2 - 4ac = (-(13y-27))^2 - 4 \cdot (y-2)(44y-94) = 169y^2 - 702y + 729 - 176y^2 + 376y + 352y - 752 = -7y^2 + 26y - 23$$

П.к. мы ищем решение этого уравнения, то пусть

$D \geq 0$  и равен  $d$ .

$$-7y^2 + 26y - 23 = d \Rightarrow -7y^2 + 26y - 23 - d = 0$$

Давайте ограничим  $d$ :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{13y-27 \pm \sqrt{d}}{2(y-2)}, \text{ т.к. } y \text{ целое и } x \text{ тоже,}$$

то  $d$  должен быть квадратом, иначе  $x$  будет нецелым.

$$-7y^2 + 26y - (23+d) = 0$$

$$D_y = 26^2 - 4 \cdot (-7) \cdot (-(23+d)) = 26^2 - 28 \cdot 23 - 28d = 676 - 644 - 28d = 32 - 28d. \text{ П.к. } d \text{ натуральный, то } d=0 \text{ или } d=1$$

иначе  $D_y < 0$  и  $y$  будет не иметь решений. При этом

$D_y$  должен быть полным квадратом, ведь иначе  $y$  будет нецелым. Тогда  $d=1$  и  $D_y=4$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 2-я стр.

$$\text{Тогда } y = \frac{-26 \pm \sqrt{Dy}}{-14} = \frac{-26 \pm \sqrt{4}}{-14} = \frac{-26 \pm 2}{-14}$$

$$\text{При } +2 \text{ } y \text{ будет нецелым. При } -2: y = \frac{-26-2}{-14} = 2,$$

но по нашему предположению  $y \neq 2$ , противоречие.

$$\text{Тогда } y = 2:$$

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$0 - x(26-27) + 88-94 = 0$$

$$x = 6$$

$$\text{Ответ: } x = 6$$

$$y = 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4 стр 2

Пусть  $DF=x$ , тогда  $BF=4x$

Пусть  $GD=y$ , тогда  $BC=4y$

По т. Пифагора  $GF = \sqrt{DF^2 + GD^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

По т. Пифагора  $FC = \sqrt{BF^2 + BC^2} = \sqrt{16x^2 + 16y^2} = 4\sqrt{x^2 + y^2}$

~~$AB = DB =$~~

$$AD = DB = DF + BF = 5x$$

$$AF = AD + DF = 6x$$

$\angle AGF = \angle FBC = 90^\circ$  (впис. центр. дв.) }  $\Delta AGF \sim \Delta FBC \Rightarrow$   
 $\angle GFA = \angle BFC$  (верт. углы)

$$\Rightarrow \frac{GF}{BF} = \frac{AF}{FC} = \frac{AG}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{4x} = \frac{6x}{4\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{AG}{BC} \Rightarrow$$

$$4 \cdot (x^2 + y^2) = 24x^2$$

$$20x^2 = 4y^2 \Rightarrow y^2 = 5x^2 \Rightarrow y = \sqrt{5}x$$

$$BC = 4y = 4\sqrt{5}x; AB = AF + FB = 10x$$

$$\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{4\sqrt{5}x}{10x} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \angle BAC = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \angle BCA = \frac{AB}{BC} = \frac{10x}{4\sqrt{5}x} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \angle BCA = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ответ:  $\angle ABC = 90^\circ$ ;  $\angle BAC = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ;  $\angle BCA = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

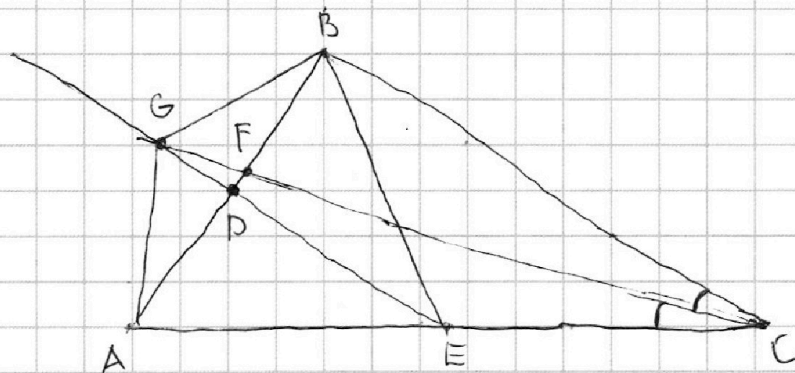
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 4 стр 1



Дано:  $\angle ACF = \angle BCF$ ;  $AE = EC$ ;  $AD = DB$ ;  $AGBC$  - вписанный четырехугольник.

$$S_{BCF} = 16 \cdot S_{DGF}$$

- 1)  $\angle GBA = \angle ACF$  (вписан. четырехугольник свой.)
  - 2)  $\angle GAB = \angle BCF$  (вписан. четырехугольник свой.)
- }  $\triangle AGB$  - р/б (углы при основании  $AB$  равны)

Т.к.  $\triangle AGB$  - р/б и  $AD = DB$ , то  $GD$  - высота, медиана, биссектриса

$$\Rightarrow \angle GDF = 90^\circ$$

$\triangle AEB$  - р/б, т.к.  $AD = DB$ ;  $\angle ADE = \angle GDF = 90^\circ$  (верт.), то есть

$DE$  - высота и медиана, тогда по признаку р/б треугольник  $\triangle AEB$  - р/б.

$\Rightarrow AE = EB = EC \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$  по обратной теореме медиан в прямоугольном треугольнике.

$$\angle GFD = \angle BFC \text{ (верт.)}; \angle GDF = \angle FBC = 90^\circ \Rightarrow \triangle DGF \sim \triangle BCF \text{ по трем углам}$$

Т.к.  $S_{BCF} = 16 \cdot S_{DGF}$ , то коэффициент подобия треугольников равен  $\sqrt{16} = 4$ ,

т.к. площади подобных треугольников имеют отношение  $k^2$ , где  $k$  -

коэффициент подобия

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 5 2-я стр.

Исходя из 1, 2, 3, 4  $\triangle AOA' = \triangle BOB' = \triangle COC' = \triangle DOD'$  (по ш-потенкузе и углу). Тогда:

$$AA' = BB' = CC' = DD' \Rightarrow -x_1 = x_3 = -y_4 = y_2 \quad (1)$$

$$A'O = B'O = C'O = D'O \Rightarrow y_1 = x_2 = -y_3 = -x_4 \quad (2)$$

Найдем коэф. прямой AD. Пусть она  $y = kx + c$

$$y_1 = kx_1 + c \quad \text{при этом} \quad y_1 = 3x_1$$

$$y_4 = kx_4 + c \quad \text{Подставим} \quad x_4 = k_1 \quad \text{при этом} \quad y_4 = \frac{x_4}{3}$$

$$(y_4 - y_1) = k(x_4 - x_1)$$

$$\left(\frac{x_4}{3} - 3x_1\right) = k(x_4 - x_1) \Rightarrow k = \frac{x_4 - 9x_1}{3(x_4 - x_1)} \quad \text{подставим (2)}$$

$$k = \frac{-y_1 - 9x_1}{3(y_1 - x_1)} = \frac{-3x_1 - 9x_1}{3(-3x_1 - x_1)} = \frac{-6x_1}{-12x_1} = 0,5$$

$$y_1 = kx_1 + c = 0,5x_1 + c \quad \text{при этом} \quad y_1 = 3x_1 \Rightarrow c = 2,5x_1$$

$$y_4 = kx_4 + c = 0,5x_4 + c \quad \text{при этом} \quad y_4 = \frac{x_4}{3} \Rightarrow c = -\frac{x_4}{6}$$

$$2,5x_1 = -\frac{x_4}{6} \Rightarrow 15x_1 = -x_4$$

Тогда:  $-x_4 = y_1 = 3x_1 \Rightarrow x_4 = 3x_1$ . П.к. вершины квадра-  
та лежат на графике фун.  $y = x^5 + ax$ , то:

$$y_1 = x_1^5 + ax_1 = -3x_1 \Rightarrow x_1^5 = x_1(-3-a)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

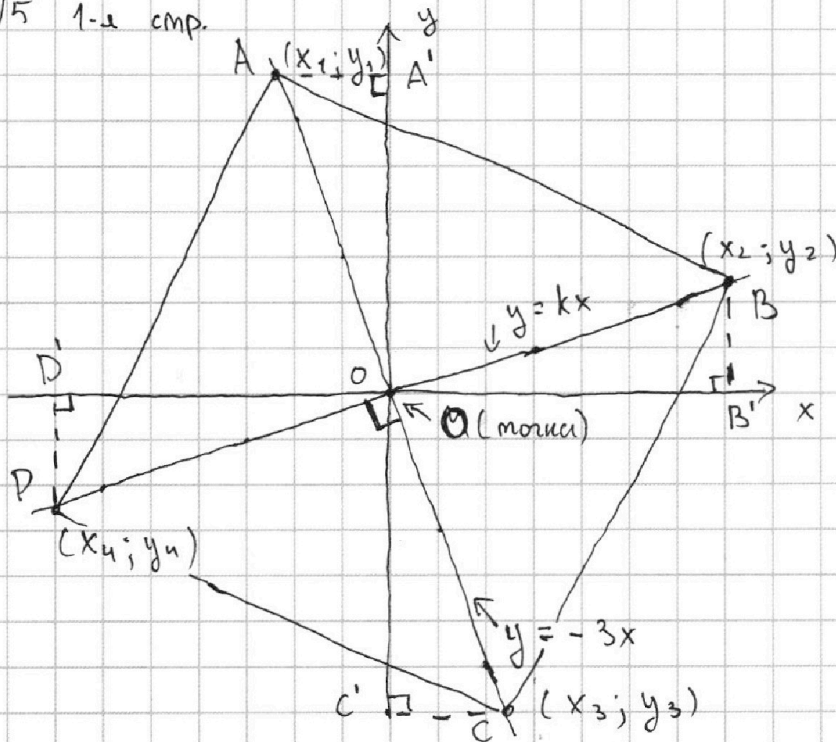
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 1-я стр.



Пусть  $(x_1; y_1), \dots, (x_4; y_4)$  - это вершины квадрата

Найдем уравнение второй прямой, на которой лежит вторая диагональ. Т.к. диагонали квадрата перпендикулярны, то  $-3 \cdot k = -1$  (свой. перпендикулярности двух прямых)  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow k = \frac{1}{3}$ . Тогда  $y_1 = -3x_1$ ;  $y_2 = \frac{x_2}{3}$ ;  $y_3 = -3x_3$ ;  $y_4 = \frac{x_4}{3}$

Т.к. диагонали в точке пересечения делятся пополам, то:

1) ~~AB~~  $\Rightarrow$  ~~AM~~  $\neq$  ~~MC~~  $\neq$  ~~BM~~  $\neq$  ~~MD~~.  $AO = CO = BO = DO$

2)  $\angle AOA' = \angle COC'$  (верт. углы);  $\angle BOB' = \angle DOD'$  (верт. углы)

3)  $\angle AA'O = \angle BB'O = \angle CC'O = \angle DD'O = 90^\circ$

4)  $\angle AOA' = \angle DOD'$  (т.к.  $\angle A'OD' = 90^\circ$ ,  $\angle AOD = 90^\circ$ , поворот на угол  $\angle AOA'$ )  
 аналогично с другими

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5 3-я стр.

$$y_1 = x_4^5 + ax_1 = (3x_1)^5 + 3ax_1 \quad \text{подставим} \quad (1)$$

$$x_1 = y_1 = (3x_1)^5 + 3ax_1 \Rightarrow 3^5 \cdot x_1^5 = x_1(1 - 3a)$$

$$x_1^5 = x_1(-3 - a) \quad / \times 3^5 \quad 3^5 \cdot x_1^5 = x_1(-3 - a) \cdot 3^5 \quad \leftarrow \text{отнимем}$$

$$0 = x_1(1 - 3a) - x_1(-3 - a) \cdot 3^5$$

$$0 = x_1(1 - 3a + 3^6 + 3^5 a), \quad \text{т.к. } x_1 \neq 0, \text{ то:}$$

$$1 - 3a + 3^6 + 3^5 a = 0$$

$$1 - 3a + 729 + 243a = 0$$

$$240a = -730 \Rightarrow a = \frac{-730}{240} = -\frac{73}{24}$$

$$\text{Тогда} \quad y_1 = x_1^5 - \frac{73}{24} x_1 = -3x_1$$

$$x_1^5 = x_1 \left( -3 + \frac{73}{24} \right) = x_1 \cdot \frac{1}{24} \quad / x_1, \quad \text{т.к. } x_1 \neq 0$$

$$x_1^4 = \frac{1}{24} \Rightarrow x_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{24}} \Rightarrow y_1 = -3x_1 = -3 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{24}}$$

$$x_4 = 3x_1 = 3 \sqrt[4]{\frac{1}{24}} \Rightarrow y_4 = \frac{x_4}{3} = \sqrt[4]{\frac{1}{24}}$$

Тогда сторона квадрата:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2} &= \sqrt{\left(\sqrt[4]{\frac{1}{24}} - 3\sqrt[4]{\frac{1}{24}}\right)^2 + \left(-3\sqrt[4]{\frac{1}{24}} - \sqrt[4]{\frac{1}{24}}\right)^2} \\ &= \sqrt{4\sqrt{\frac{1}{24}} + 16\sqrt{\frac{1}{24}}} = 2\sqrt{5}\sqrt[4]{\frac{1}{24}} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N6 1a cmp

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$a = b + \frac{5}{c} - \frac{5}{b} = \frac{b^2c + 5b - 5c}{bc}$$

$$\frac{5}{a} = b + \frac{5}{c} - c = \frac{bc + 5 - c^2}{c}$$

$$a = \frac{bc + 5 - c^2}{5c}$$

$$\frac{b^2c + 5b - 5c}{bc} = \frac{bc + 5 - c^2}{5c}$$

$$\frac{5b^2c + 25b - 25c}{5bc} = \frac{b^2c + 5b - 5c^2}{5bc}, \text{ т.к. } b, c \neq 0$$

$$5b^2c + 25b - 25c = b^2c + 5b - 5c^2$$

$$4b^2c + 20b + 5c^2 - 25c = 0 \quad c(4b^2 + 5c) + 4b^2c - 5(4b - 5c) = 0$$

$$4b(bc + 5) + 5c(c - 5) = 0$$



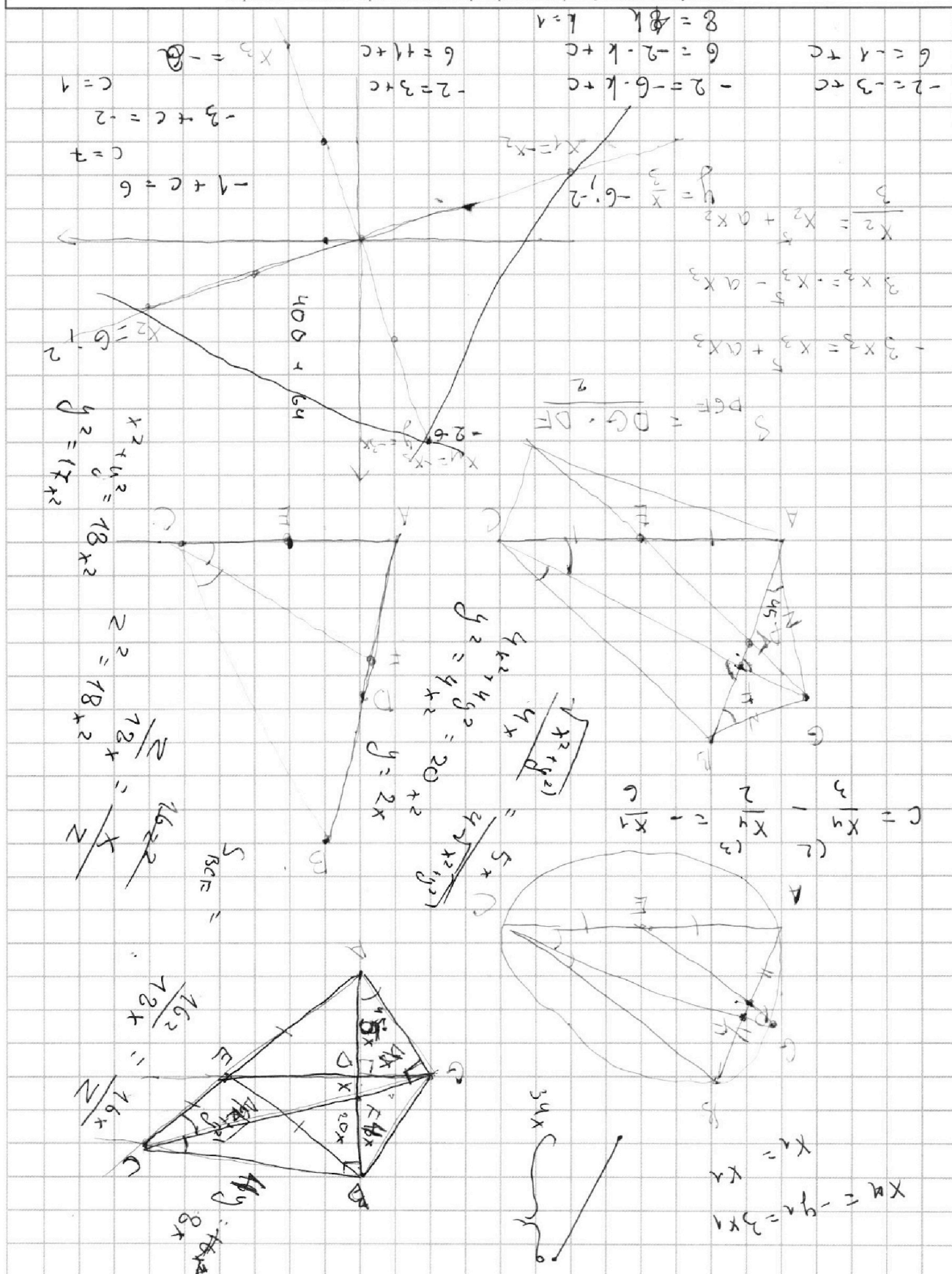
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a \quad b=ad \quad c=ad^2$$

$$abc = a^2 d^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

3

9

27

81

243

729

$$a = 2^x \cdot 3^y$$

$$d = 2^m \cdot 3^n$$

$$a^3 = (2^x \cdot 3^y)^3 = 2^{3x} \cdot 3^{3y}$$

$$d^3 = 2^{3m} \cdot 3^{3n}$$

$$a^3 d^3 = 2^{3x} \cdot 3^{3y} \cdot 2^{3m} \cdot 3^{3n} = 2^{3x+3m} \cdot 3^{3y+3n} = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$a = 2^x \cdot 3^y$$

$$ad = 2^{x+m} \cdot 3^{y+n}$$

$$ad^2 = 2^{x+2m} \cdot 3^{y+2n}$$

$$2^0 \cdot 3^0 = 1$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 51 \\ \hline 5151 \end{array}$$

$$d = 2^{50} \cdot 3^{100}$$

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$D = 0$$

$$(13y-27)^2 - 4(y-2)(44y-94)$$

$$169y^2 - 702y + 729 - 176y^2 + 376y$$

$$+ 352y - 752$$

$$- 7y^2 + 26y - 23 \geq 0$$

$$x = \frac{27-13y \pm \sqrt{D}}{2y-4}$$

$$\begin{array}{r} 752 \\ - 226 \\ \hline 23 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 176 \\ - 169 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 94 \\ \times 8 \\ \hline 752 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 376 \\ \times 352 \\ \hline 728 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 94 \\ \times 8 \\ \hline 352 \end{array}$$

$$(4y-8)(44y-94)$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 44 \\ \times 4 \\ \hline 176 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 94 \\ \times 4 \\ \hline 376 \end{array}$$

$$3x + 3m = 150$$

$$3y + 3n = 300$$

$$x + m = 50$$

$$x = 0 \text{ или } 50$$

$$y + n = 100$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 27 \\ \times 27 \\ \hline 102 \\ 54 \\ \hline 402 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 27 \\ \times 27 \\ \hline 189 \\ 54 \\ \hline 729 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2+5| \quad \uparrow^2$$

При  $x^2-1 \geq 0 \quad x^2 \geq 1 \quad x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$

$$|x^2-1| \leq |x^3-x^2+5| - |x^3+4|$$

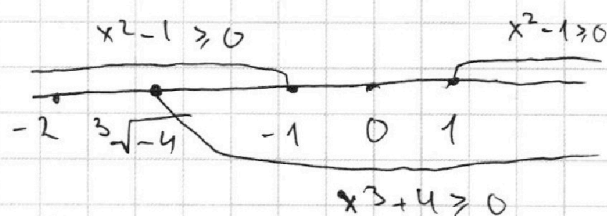
$$x^3-x^2+5 - x^3-4$$

$$x^2-1 \leq -x^2+1$$

$$x^3+4 \geq 0$$

$$x^3 \geq -4$$

$$x \in \left[ \sqrt[3]{-4}; +\infty \right)$$



$$x^3-x^2+5 \geq 0 \quad x \in (-\infty; \sqrt[3]{-4})$$

$$|x^3+4| + |x^2-1|$$

$$-3m = m^5 + am$$

$$-x^3-4 + x^2-1$$

$$m^5 + m(a+3) = 0$$

$$-x^3+x^2-5 \leq |x^3-x^2+5|$$

$$3m = -m^5 - am$$

$$|x^2-1| + x^3+4$$

$$(x^3+4)^2 + (x^2-1)^2 + 2 \cdot |x^3-4| |x^2-1| \leq -(4-1) + 8+4$$

$$\frac{((x^3+4)-(x^2-1))^2}{x}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$b = a + \frac{5}{b}$$

$$abc = a \left( a + \frac{5}{b} \right) \left( a + \frac{5}{b} - \frac{5}{a} \right)$$

$$\frac{ab+5}{b} = \frac{bc+5}{c} = \frac{ac+5}{a}$$

$$a^3 +$$

$$a = b + \frac{5}{c} - \frac{5}{b}$$

$$\frac{ab+5}{b} = \frac{bc+5}{c}$$

$$\frac{5}{a} = b + \frac{5}{c} - c$$

$$\frac{5}{a} = \frac{bc+5-c^2}{c}$$

$$abc+5c = b^2c+5b$$

$$abc = b^2c+5b-5c = b(bc+5)-5c$$

$$-a - \frac{5}{b}$$

$$a \geq b \geq c$$

$$a \geq c \geq b$$

$$a = \frac{bc+5-c^2}{5c}$$

$$\frac{b^2c+5b-5c}{bc}$$

$$\frac{b^2c+5b-c^2}{5bc} =$$