МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11

1. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|x^3+4\right|+\left|x^2-1\right| \leqslant \left|x^3-x^2+5\right|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{300}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y-2)-x(13y-27)+44y-94=0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC. Прямые ED и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF.

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y=x^5+ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y=-3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a, b и c не все равны между собой, и при этом

$$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения abc.

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC $(AB=BC)$ вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX=CF$ и $CY=AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF=17$, $XY=31$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1 1-я стр

$$|x^3+4| + |x^2-1| \le |x^3-x^2+5| = |(x^3+4)-(x^2-1)|$$

полот · полот · полот — можно возвести в квадрат

$$(x^3+4)^2+(x^2-1)^2+2|x^3+4|\cdot|x^2-1| \le ((x^3+4)-(x^2-1))^2 =$$

$$(x^3+4)^2+(x^2-1)^2-2(x^3+4)(x^2-1)$$

$$2|x^3+4|\cdot|x^2-1| \le -2(x^3+4)(x^2-1)$$

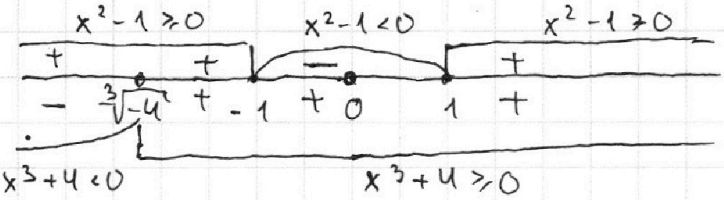
Рассмотрим случаи, когда $x^3+4 \ge 0$ и $x^2-1 \ge 0$ и наоборот.

$x^3+4 \ge 0 \quad x^3 \ge -4 \quad \Rightarrow \quad x \ge \sqrt[3]{-4}$

$x^3+4 < 0 \quad x^3 < -4 \quad \Rightarrow \quad x < \sqrt[3]{-4}$

$x^2-1 \ge 0 \quad x^2 \ge 1 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

$x^2-1 < 0 \quad x^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad x \in (-1; 1)$



Возьмем отрезок $(-\infty; \sqrt[3]{-4})$ — нет точек когда равно 0. Тогда

— меньше 0 поэтому берем отр. знач.

$$2|x^3+4|\cdot|x^2-1| \le -2(x^3+4)(x^2-1)$$

— ~~полож~~ больше ~~или равно~~ нуля так и остается

$$2\cdot(-(x^3+4))\cdot(x^2-1) \le -2(x^3+4)(x^2-1)$$ — верно при любом x

$= -2(x^3+4)\cdot(x^2-1)$

$(x=-1)$ $(x=\sqrt[3]{-4})$

— равно 0 при $x^2=1$ и $x^3=-4$

Возьмем отрезок $[\sqrt[3]{-4}; -1]$. Тогда

— полот. или 0 так и остается

$$2|x^3+4|\cdot|x^2-1| \le -2(x^3+4)(x^2-1)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1 2я стр

$2(x^3+4)(x^2-1) \le -2(x^3+4)(x^2-1)$

отриц. произведение если $x^2 \ne 1$ или $x^3 \ne -4$

$0 \le \underbrace{-4(x^3+4)(x^2-1)}$ не имеет решений, если $x^2 \ne 1$

полож или 0 иначе имеет, или если $x^3 \ne -4$

Возьмем отрезок $(-1;1)$ - нет точек когда равно 0

полож. отриц.

$2|x^3+4|\cdot|x^2-1| \le -2(x^3+4)(x^2-1)$

$2(x^3+4)\cdot(-(x^2-1)) \le -2(x^3+4)(x^2-1)$ - верно при любом x

$\shortparallel$

$-2(x^3+4)\cdot(x^2-1)$

Возьмем отрезок $[1;+\infty)$ - равно 0 при $x^2=1$ $(x=1)$

полож положит. или равно 0

$2|x^3+4|\cdot|x^2-1| \le -2(x^3+4)(x^2-1)$

$2(x^3+4)\cdot(x^2-1) \le -2(x^3+4)(x^2-1)$

отриц. произв. если $x^2 \ne 1$

$0 \le \underbrace{-4(x^3+4)(x^2-1)}$ не имеет решений, если $x^2 \ne 1$,

полож положит. или 0 иначе имеет $(x=1)$

Тогда x принадлежит (включая все верхние решения)

$x \in (-\infty; \sqrt[3]{-4}) \cup [\sqrt[3]{-4}] \cup [-1] \cup (-1;1) \cup [1]$

$x \in (-\infty; \sqrt[3]{-4}] \cup [-1; 1]$

Ответ: $x \in [-\infty; \sqrt[3]{-4}] \cup [-1;1]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N2 1-я стр.

Пусть коэф. геом. прогр. равен d. Тогда $b = ad$; $c = ad^2$

$abc = a \cdot ad \cdot ad^2 = a^3 \cdot d^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$.

Пусть $a = 2^x \cdot 3^y$; $d = 2^m \cdot 3^n$, где x, y, m, n целые неотриц. числа

~~от 0 до +∞~~

$a^3 \cdot d^3 = (2^x \cdot 3^y)^3 \cdot (2^m \cdot 3^n)^3 = 2^{3x} \cdot 3^{3y} \cdot 2^{3m} \cdot 3^{3n} =$

$2^{3(x+m)} \cdot 3^{3(y+n)} = 2^{150} \cdot 3^{300} \Rightarrow 3(x+m) = 150 \Rightarrow x+m = 50$

$3(y+n) = 300 \Rightarrow y+n = 100$

Тогда x может принимать значения целых чисел от 0 до 50 (т.к. m хотя бы 0 и $x+m=50$) и y может принимать значения целых чисел от 0 до 100 (т.к. n хотя бы 0 и $y+n=100$). Тогда $a = 2^x \cdot 3^y$ может иметь такое кол-во значений:

$(50-0+1) \cdot (100-0+1) = 51 \cdot 101 = 5151$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 1-я стр.

$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$

Пусть $y \neq 2$. Тогда это квадратное уравнение. Найдем дискриминант.

$D = b^2 - 4ac = (-(13y-27))^2 - 4\cdot(y-2)(44y-94) = 169y^2 - 702y + 729 - 176y^2 + 376y + 352y - 752 = -7y^2 + 26y - 23$

Т.к. мы ищем решение этого уравнения, то пусть $D \geq 0$ и равен d.

$-7y^2 + 26y - 23 = d \Rightarrow -7y^2 + 26y - 23 - d = 0$

Давайте ограничим d:

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{13y - 27 \pm \sqrt{d}}{2(y-2)}$, т.к. y целое и x тоже, то d точный квадрат, иначе x будет нецелым.

$-7y^2 + 26y - (23 + d) = 0$

$D_y = 26^2 - 4\cdot(-7)\cdot(-(23+d)) = 26^2 - 28\cdot 23 - 28d = 676 - 644 - 28d = 32 - 28d$. Т.к. d натуральный, то $d = 0$ или $d = 1$ иначе $D_y < 0$ и y будет не иметь решений. При этом D_y должен быть точным квадратом, ведь иначе y будет нецелым. Тогда $d = 1$ и $D_y = 4$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3 2-я стр.

Тогда $y = \frac{-26 \pm \sqrt{D_y}}{-14} = \frac{-26 \pm \sqrt{4}}{-14} = \frac{-26 \pm 2}{-14}$

При $+2$ y будет нецелым. При -2: $y = \frac{-26-2}{-14} = 2$,

но по нашему предположению $y \neq 2$, противоречие.

Тогда $y = 2$:

$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$

$0 - x(26-27) + 88 - 94 = 0$

$x = 6$

Ответ: $x = 6$

$y = 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 стр 2

Пусть $DF = x$, тогда $BF = 4x$

Пусть $GD = y$, тогда $BC = 4y$

По т. Пифагора $GF = \sqrt{DF^2 + GD^2} = \sqrt{x^2+y^2}$

По т. Пифагора $FC = \sqrt{BF^2 + BC^2} = \sqrt{16x^2 + 16y^2} = 4\sqrt{x^2+y^2}$

~~Т.к. AD = DB =~~

$AD = DB = DF + BF = 5x$

$AF = AD + DF = 6x$

$\left.\begin{array}{l}\angle AGF = \angle FBC = 90^\circ \text{ (вписс. четыр. свой.)} \\ \angle GFA = \angle BFC \text{ (верт. углы)}\end{array}\right\} \triangle AGF \sim \triangle FBC \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{GF}{BF} = \dfrac{AF}{FC} = \dfrac{AG}{BC} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{4x} = \dfrac{6x}{4\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{AG}{BC} \Rightarrow$

$4 \cdot (x^2 + y^2) = 24x^2$

$20x^2 = 4y^2 \Rightarrow y^2 = 5x^2 \Rightarrow y = \sqrt{5}x$

$BC = 4y = 4\sqrt{5}x$; $AB = AF + FB = 10x$

$tg \angle BAC = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{4\sqrt{5}x}{10x} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \angle BAC = arctg \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$tg \angle BCA = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{10x}{4\sqrt{5}x} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \angle BCA = arctg \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

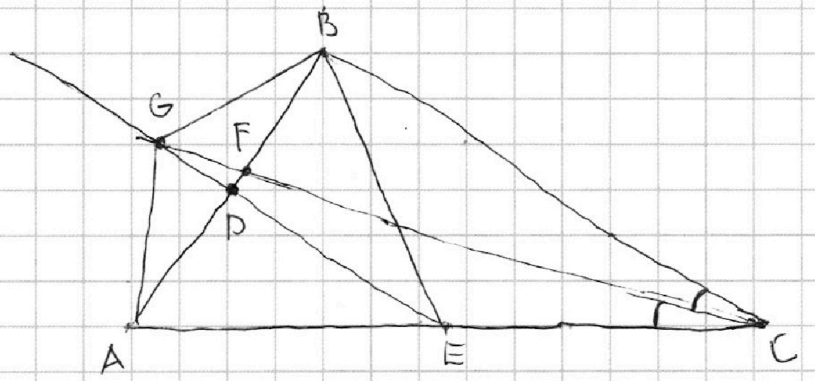
Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$; $\angle BAC = arctg \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$; $\angle BCA = arctg \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 стр 1



Дано: $\angle ACF = \angle BCF$; $AE = EC$; ~~AB~~ $AD = DB$; $AGBC$ - вписанный четр.

$S_{BCF} = 16 \cdot S_{DGF}$

1) $\angle GBA = \angle ACF$ (вписан. четр. свой.)
2) $\angle GAB = \angle BCF$ (вписан. четр. свой.)

$\Rightarrow$ $\triangle AGB$ - р/б (углы при основании AB равны)

Т.к. $\triangle AGB$ - р/б и $AD = DB$, то GD - высота, медиана, бисс-са

$\Rightarrow \angle GDF = 90°$

$\triangle AEB$ - р/б, т.к. $AD = DB$; $\angle ADE = \angle GDF = 90°$ (верт.), то есть DE - высота и медиана, тогда по призн. р/б треуг $\triangle AEB$ - р/б.

$\Rightarrow AE = EB = EC \Rightarrow \angle ABC = 90°$ по обратной теореме медиан в прямоугольном треугольнике.

$\angle GFD = \angle BFC$ (верт.); $\angle GDF = \angle FBC = 90° \Rightarrow \triangle DGF \sim \triangle BCF$ по трем углам

Т.к. $S_{BCF} = 16 \cdot S_{DGF}$, то коэф. подобия треуг. равен $\sqrt{16} = 4$, т.к. площади подобных треуг. имеют отношение k^2, где k - коэффициент подобия

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 2-я стр.

Исходя из 1, 2, 3, 4 $\triangle AOA' = \triangle BOB' = \triangle COC' = \triangle DOD'$ (по гипотенузе и углу). Тогда:

$AA' = BB' = CC' = DD' \Rightarrow -x_1 = x_3 = -y_4 = y_2$ (1)

$A'O = B'O = C'O = D'O \Rightarrow y_1 = x_2 = -y_3 = -x_4$ (2)

Найдем коорд. прямой AD. Пусть она $y = kx + c$

$y_1 = kx_1 + c$ при этом $y_1 = 3x_1$

$y_4 = kx_4 + c$. Подставим (1) $x_1 = k$ при этом $y_4 = \frac{x_4}{3}$

$(y_4 - y_1) = k(x_4 - x_1)$

$(\frac{x_4}{3} - 3x_1) = k(x_4 - x_1) \Rightarrow k = \frac{x_4 - 9x_1}{3(x_4 - x_1)}$ подставим (2)

$k = \frac{-y_1 - 9x_1}{3(-y_1 - x_1)} = \frac{+3x_1 - 9x_1}{3(-3x_1 - x_1)} = \frac{-6x_1}{-12x_1} = 0,5$

$y_1 = kx_1 + c = 0,5x_1 + c$ при этом $y_1 = 3x_1 \Rightarrow c = 2,5x_1$

$y_4 = kx_4 + c = 0,5x_4 + c$ при этом $y_4 = \frac{x_4}{3} \Rightarrow c = -\frac{x_4}{6}$

$2,5x_1 = \frac{-x_4}{6} \Rightarrow 15x_1 = -x_4$

Тогда: $-x_4 = y_1 = -3x_1 \Rightarrow x_4 = 3x_1$. Т.к. вершины квадрата лежат на графике фун. $y = x^5 + ax$, то:

$y_1 = x_1^5 + ax_1 = -3x_1 \Rightarrow x_1^5 = x_1(-3-a)$

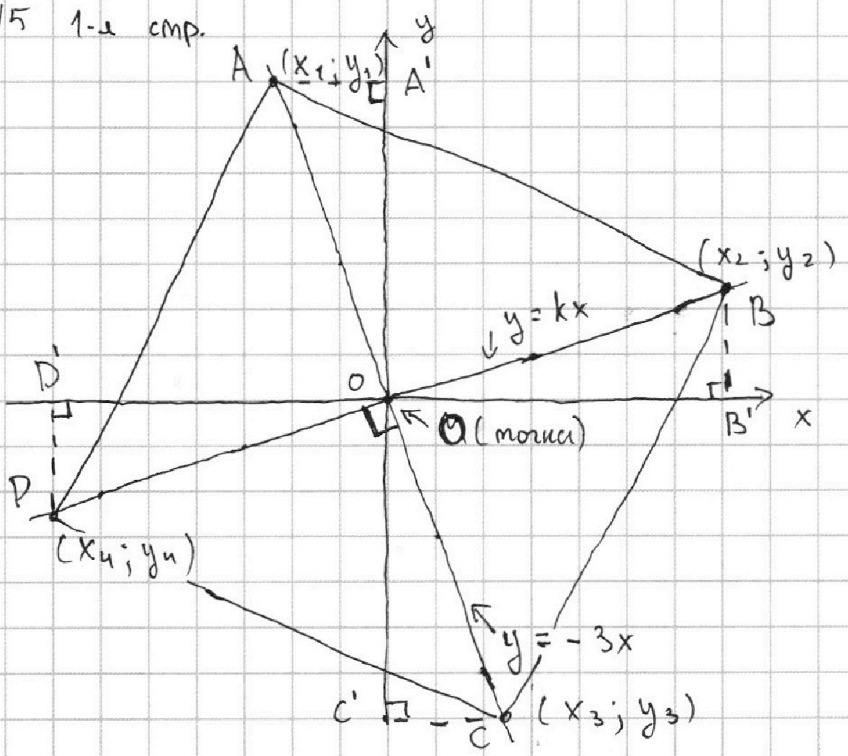
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5 1-я стр.



Пусть $(x_1; y_1), \dots, (x_4; y_4)$ – это вершины квадрата

Найдем уравнение второй прямой, на которой лежит вторая диагональ. Т.к. диагонали квадрата перпендикулярны, то $-3 \cdot k = -1$ (свой. перпендикулярности двух прямых) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $k = \frac{1}{3}$. Тогда $y_1 = -3x_1$; $y_2 = \frac{x_2}{3}$; $y_3 = -3x_3$; $y_4 = \frac{x_4}{3}$

Т.к. диагонали в точке пересечения делятся пополам, то:

1) ~~AB => AM = MC = BM = MD~~. $AO = CO = BO = DO$

2) $\angle AOA' = \angle COC'$ (верт. углы); $\angle BOB' = \angle DOD'$ (верт. углы)

3) $\angle AA'O = \angle BB'O = \angle CC'O = \angle DD'O = 90^\circ$

4) $\angle AOA' = \angle DOD'$ (т.к. $\angle A'OD' = 90$, $\angle AOD = 90^\circ$, поворот на угол $\angle AOA'$)
аналогично с другими

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 3-я стр.

$y_4 = x_4^5 + a x_4 = (3x_1)^5 + 3ax_1$. подставим ①

$x_1 = y_4 = (3x_1)^5 + 3ax_1 \Rightarrow 3^5 \cdot x_1^5 = x_1(1-3a)$

$x_1^5 = x_1(-3-a) \quad / \times 3^5 \quad 3^5 \cdot x_1^5 = x_1(-3-a)\cdot 3^5$ отнимем

$0 = x_1(1-3a) - x_1(-3-a)\cdot 3^5$

$0 = x_1(1-3a+3^6+3^5a)$, т.к. $x_1 \neq 0$, то:

$1-3a+3^6+3^5a=0$

$1-3a+729+243a=0$

$240a = -730 \Rightarrow a = \frac{-730}{240} = \frac{-73}{24}$

Тогда $y_1 = x_1^5 - \frac{73}{24}x_1 = -3x_1$

$x_1^5 = x_1\left(-3+\frac{73}{24}\right) = x_1 \cdot \frac{1}{24} \quad / x_1$, т.к. $x_1 \neq 0$

$x_1^4 = \frac{1}{24} \Rightarrow x_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{24}} \Rightarrow y_1 = -3x_1 = -3\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{24}}$

$x_4 = 3x_1 = 3\sqrt[4]{\frac{1}{24}} \Rightarrow y_4 = \frac{x_4}{3} = \sqrt[3]{\frac{1}{24}}$

Тогда сторона квадрата:

$\sqrt{(x_1-x_4)^2+(y_1-y_4)^2} = \sqrt{\left(\sqrt[4]{\frac{1}{24}} - 3\sqrt[4]{\frac{1}{24}}\right)^2 + \left(-3\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{24}} - \sqrt[4]{\frac{1}{24}}\right)^2}$

$= \sqrt{4\sqrt{\frac{1}{24}} + 16\sqrt{\frac{1}{24}}} = 2\sqrt{5}\sqrt[4]{\frac{1}{24}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 1я стр

$$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}$$

$$a=b+\frac{5}{c}-\frac{5}{b}=\frac{b^2c+5b-5c}{bc}$$

$$\frac{5}{a}=b+\frac{5}{c}-c=\frac{bc+5-c^2}{c}$$

$$a=\frac{bc+5-c^2}{5c}$$

$$\frac{b^2c+5b-5c}{bc}^{(5}=\frac{bc+5-c^2}{5c}^{(b}$$

$$\frac{5b^2c+25b-25c}{5bc}=\frac{b^2c+5b-5c^2}{5bc}$$, т.к. $b, c \neq 0$

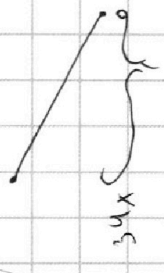
$$5b^2c+25b-25c=b^2c+5b-5c^2$$

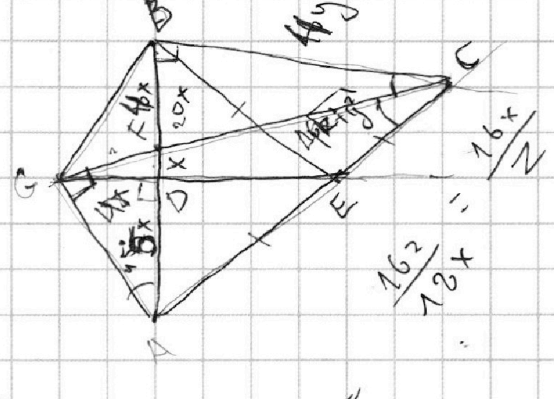
$$4b^2c+20b+5c^2-25c=0 \qquad c(4b^2+5c)+\cancel{425b}-5(4b-5c)=0$$

$$4b(bc+5)+5c(c-5)=0$$

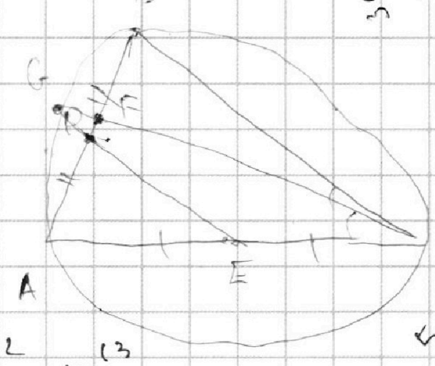
$x_4 = -y_1 = 3x_1$

$x_1 = x_1$





$\frac{16z}{12x} = \frac{16x}{z}$



$S_{BCF} =$

$C = \frac{x_4}{3} - \frac{x_4}{2} = -\frac{x_1}{6}$

$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{4x} = \frac{5x}{4\sqrt{x^2+y^2}}$

$4x^2+4y^2 = 20x^2$

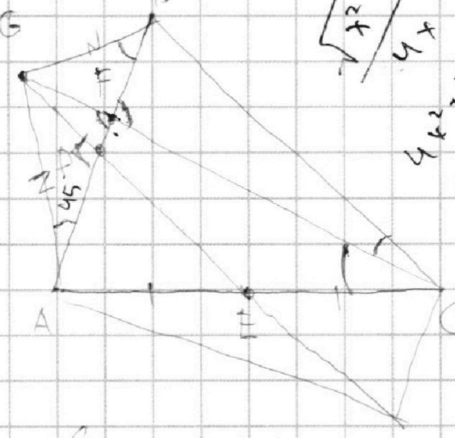
$y^2 = 4x^2$

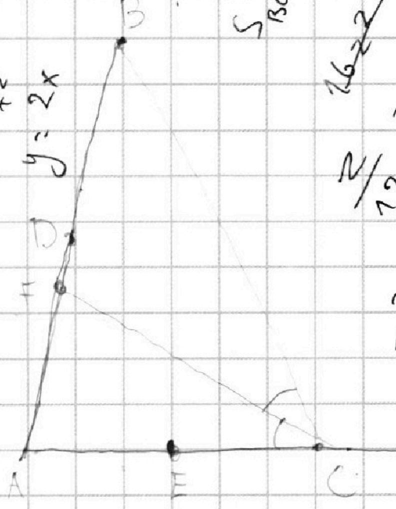
$y = 2x$

$\frac{16z}{2} = \frac{x}{z}$

$\frac{z}{12x} =$

$z^2 = 18x^2$





$x^2 + y^2 = 18x^2$

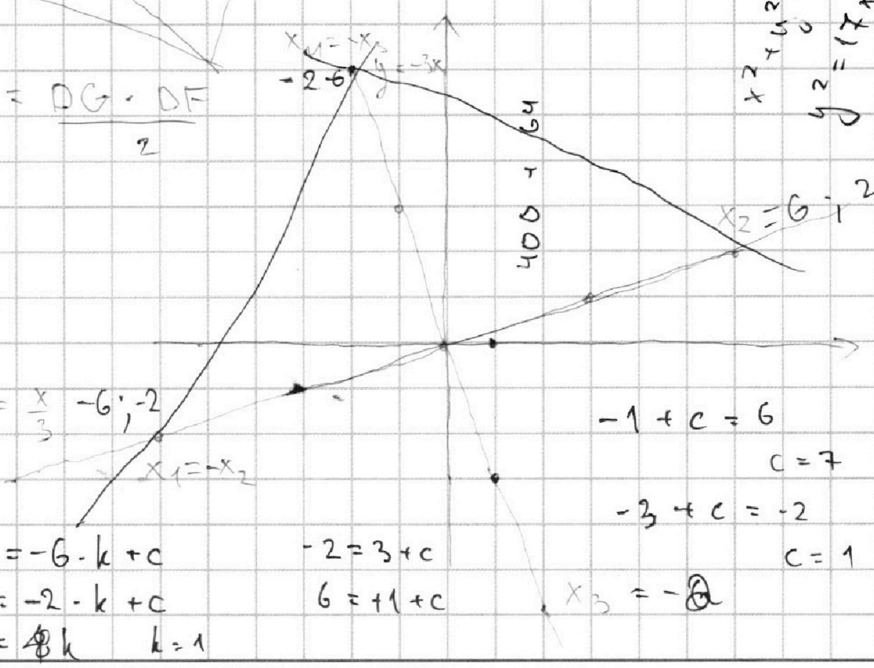
$y^2 = 17x^2$

$S_{DGF} = \frac{DG \cdot DF}{2}$

$-3x_3 = x_3^5 + ax_3$

$3x_3 = -x_3^5 - ax_3$

$\frac{x_2}{3} = x_2^5 + ax_2$



$-1 + c = 6$

$c = 7$

$-3 + c = -2$

$c = 1$

$-2 = -3 + c$

$6 = -1 + c$

$-2 = -6 \cdot k + c$

$6 = -2 \cdot k + c$

$8 = 4k \quad k = 1$

$-2 = 3 + c$

$6 = +1 + c$

$x_3 = -2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a = 2^x \cdot 3^y$

$ad = 2^{x+m} \cdot 3^{y+n}$

$ad^2 = 2^{x+2m} \cdot 3^{y+2n}$

$a \quad b = ad \quad c = ad^2$

$abc = a^3d^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$

3
9
27
81
243
729

$a = 2^x \cdot 3^y$

$d = 2^m \cdot 3^n$

$a^3 = (2^x 3^y)^3 = 2^{3x} \cdot 3^{3y}$

$d^3 = 2^{3m} 3^{3n}$

$a^3d^3 = 2^{3x} \cdot 3^{3y} \cdot 2^{3m} \cdot 3^{3n} = 2^{3x+3m} \cdot 3^{3y+3n} = 2^{150} \cdot 3^{300}$

$2^0 \cdot 3^0 = 1$

$101 \times 51 = 5151$

$d = 2^{50} \cdot 3^{100}$

$3x + 3m = 150$

$3y + 3n = 300$

$x + m = 50$

$y + n = 100$

$x = 0 ... 50$

$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$

$D =$

$(13y-27)^2 - 4(y-2)(44y-94)$

$169y^2 - 702y + 729 - 176y^2 + 376y$

$+ 352y - 752$

$-7y^2 + 26y - 23 \geq 0$

$x = \dfrac{27 - 13y \pm \sqrt{D}}{2y-4}$

$376 + 352 = 728$

$27 \times 26 = 162,\ 54,\ 702$

$27 \times 27 = 189,\ 54,\ 729$

$(4y-8)(44y-94)$

$752 - 729 = 23$

$94 \times 8 = 752$

$44 \times 8 = 352$

$44 \times 4 = 176$

$94 \times 4 = 376$

$176 - 169 = 7$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3 - x^2 + 5|$ $\uparrow^2$

При $x^2 - 1 \geqslant 0$ $x^2 \geqslant 1$ $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$

$|x^2-1| \leq |x^3 - x^2 + 5| - |x^3+4|$

$x^3 - x^2 + 5 - x^3 - 4$

$x^2 - 1 \leq -x^2 + 1$

$x^3 + 4 \geqslant 0$

$x^3 \geqslant -4$

$x \in [\sqrt[3]{-4}; +\infty)$

$x^3 - x^2 + 5 \geqslant 0$ $x \in (-\infty; \sqrt[3]{-4})$

$x^2-1 \geqslant 0$ $x^2-1 \geqslant 0$

-2 $\sqrt[3]{-4}$ -1 0 1

$x^3+4 \geqslant 0$

$|x^3+4| + |x^2-1|$

$-3m = m^5 + am$ $-x^3 - 4 + x^2 - 1|$

$m^5 + m(a+3) = 0$ $-x^3 + x^2 - 5 \leq |x^3 - x^2 + 5|$

$3m = -m^5 - am$ $|-(x^2-1) + x^3 + 4|$

$(x^3+4)^2 + (x^2-1)^2 + 2 \cdot |x^3-4||x^2-1| \leq$ $-(4-1) + 8 + 4$

$((x^3+4) - (x^2-1))^2$

$(x^3+4)^2 + (x^2-1)^2 - 2(x^3+4)(x^2-1)$

x

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$-7y^2+26y-23=0$ $\quad -7y^2+26y-23=1$ $\quad D=4$

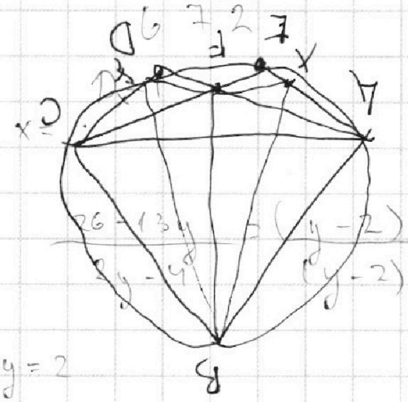
$D=26^2-4\cdot7\cdot23=676-644=32$

$\times\begin{array}{r}23\\23\\\hline 84\\56\;\\\hline 644\\128\\\hline 672\end{array}$ $\quad \times\begin{array}{r}26\\26\\\hline 156\\52\;\\\hline 676\\-644\\\hline 32\end{array}$

$y=\dfrac{-26-\sqrt{4}}{-14}=2$

при $y\neq2$

дискрим.



$\dfrac{26-13y}{2y-4}=\dfrac{(y-2)\cdot(-13)}{(y-2)}$

9
27
$\times\begin{array}{r}81\\3\\\hline 243\end{array}$

$y=2$

$-x(13\cdot2-27)$

$x+82-94=0$

$x=6$
$y=2$

$y=x^5+ax$

$y_1=x_1^5+ax_1$

$-3x_1=x_1^5+ax_1$

$\times\begin{array}{r}243\\3\\\hline 729\end{array}$

$y_4=x_4^5+ax_4$

$x_1=3^5\cdot x_1^5+3ax_1$

$3x_1=y_1=x_1^5+\dfrac{73}{24}x_1$

$x_1(-3-a)=x_1^5$ $\quad \times3^5$

$x_1^5=-3x_1+\dfrac{73}{24}x_1$

$x_1(1-3a)=3^5\cdot x_1^5$

$x_1^5=\dfrac{1}{24}x_1$

$x_1(1-3a)-243x_1(-3-a)=0$

т.к. $x_1\neq0$

$x_1^4=\dfrac{1}{24}$

$x_1(1-3a-243(-3-a))=0$

$x_1=\sqrt[4]{\dfrac{1}{24}}$

$1-3a+729+243a=0$
$730=-240a$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a} \qquad b=a+\frac{5}{b}$$

$$abc=a\left(a+\frac{5}{b}\right)\left(a+\frac{5}{b}-\frac{5}{a}\right)$$

$$\frac{ab+5}{b}=\frac{bc+5}{c}=\frac{ac+5}{a}$$

$$a=b+\frac{5}{c}-\frac{5}{b}$$

$$a^3+$$

$$\frac{ab+5}{b}=\frac{bc+5}{c} \qquad \frac{5}{a}=b+\frac{5}{c}-c$$

$$\frac{5}{a}=\frac{bc+5-c^2}{c}$$

$$abc+5c=b^2c+5b$$

$$abc=b^2c+5b-5c=b(bc+5)-5c$$

$$-a-\frac{5}{b} \qquad a\geq b\geq c \qquad a=\frac{bc+5-c^2}{5c}$$

$$a\geq c\geq b$$

$$\| $$

$$\frac{b^2c+5b-5c}{bc}$$

$$\frac{b^2c+5b-c^2}{5bc}=$$