



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{300}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXYF$, если $BF = 17$, $XY = 31$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|$$

$$\begin{aligned} a &= x^3 + 4 \\ b &= x^2 - 1 \end{aligned} \Rightarrow |a| + |b| \leq |a - b|$$

Для действительных чисел a, b справедливо $|a \pm b| \leq |a| + |b|$

в частности $|a| + |b| \geq a - b, b - a$ т.е. $|a| + |b| \geq |a - b|$

$$\text{тогда } |a - b| \leq |a| + |b| \leq |a - b| \Rightarrow |a| + |b| = |a - b|$$

Числа a и $-b$ не должны быть нулем и отриц.

также т.к. в противном случае $|a - b| < |a| + |b|$.

Это условие необходимо и достаточное.

тогда у нас 2 варианта.

I.

$$\begin{cases} x^3 + 4 \geq 0 \\ x^2 - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 4 \geq 0 \\ x \in [-1; 1] \end{cases} \text{ все } x \in [-1; 1] \text{滿足する } x^3 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$$

II

$$\begin{cases} x^3 + 4 \leq 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \leq -4 \\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \sqrt[3]{-4} \\ x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; \sqrt[3]{-4}] \cup [1; \infty)$$

Ответ: $x \in (-\infty; \sqrt[3]{-4}] \cup [-1; 1]$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда q — ~~одно~~ знаменатель прогрессии.

$$b = aq \quad c = aq^2 \quad ac = a^2 q^2 = b^2 \Rightarrow abc = b^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$b = 2^{50} \cdot 3^{100} \quad b^2 = 2^{100} \cdot 3^{200} \quad ac = 2^{100} \cdot 3^{200} \quad a, c \in \mathbb{N}$$

помножу $a = 2^{\lambda} \cdot 3^{\beta}$ (других множителей нет)

$$c = 2^{100-\lambda} \cdot 3^{200-\beta} \quad \lambda \in \{0, 1, 2, \dots, 100\}, \quad \beta \in \{0, 1, 2, \dots, 200\}$$

И при любых λ и β числа a, b, c будут обр.

геом. прогрессию + . k . $q = \frac{b}{a} = \frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{2^{\lambda} \cdot 3^{\beta}} = 2^{50-\lambda} \cdot 3^{100-\beta}$

$$\text{и } q = \frac{c}{b} = \frac{2^{100-\lambda} \cdot 3^{200-\beta}}{2^{50} \cdot 3^{100}} = 2^{50-\lambda} \cdot 3^{100-\beta}. \quad \text{У} \quad \cancel{\text{запись при } (\lambda, \beta)}$$

~~*)~~ $(\lambda_1, \beta_1) / 2^{50} / 3^{100} / 2^{50} / 3^{100}$, потому что 2^{50} -ки разумерены
Заметим, что если вместо λ брать $100-\lambda$, а вместо β
брать $200-\beta$, то тройки чисел получаются одинаковыми.

Но тогда если нас рассматривают все $101 \cdot 201$ тройки
тих же трех чисел a, b, c (кроме $a=b=c=2^{50} \cdot 3^{100}$) нахождение 3-ки
 c, b, a .

Итога кол-во различных 3-к: $\frac{101 \cdot 201 - 1}{2} =$

$$= 10150$$

Ответ: 10150

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0$$

$$x^2(y-2) - x((y-2)13 - 1) + (y-2)44 - 6 = 0 \quad y-2 = a \in \mathbb{Z}$$

$$a x^2 - (13a - 1)x + 44a - 6 = 0$$

$$\Delta = 169a^2 - 26a + 1 - 4a(44a - 6) = -7a^2 - 2a + 1 \quad \Delta \geq 0$$

$$-7a^2 - 2a - 1 \leq 0 \quad a = \frac{-2 \pm \sqrt{32}}{14} \quad a \in \left[\frac{-2 - \sqrt{32}}{14}; \frac{-2 + \sqrt{32}}{14} \right]$$

$$\frac{-2 - \sqrt{32}}{14} > \frac{-2 - \sqrt{36}}{14} = \frac{-8}{14} = \frac{-4}{7}$$

$$\frac{-2 + \sqrt{32}}{14} < \frac{-2 + \sqrt{36}}{14} = \frac{4}{7} \quad \text{Тогда } -\frac{4}{7} < a < \frac{4}{7} \quad \text{и } a - \text{целое}$$

$$\Rightarrow a = 0 \quad y = 2 \quad \Rightarrow x^2(2-2) - x(26-27) + 88 - 94 = 0$$

$$x - 6 = 0 \quad \Rightarrow x = 6$$

Ответ: $x = 6$; $y = 2$.

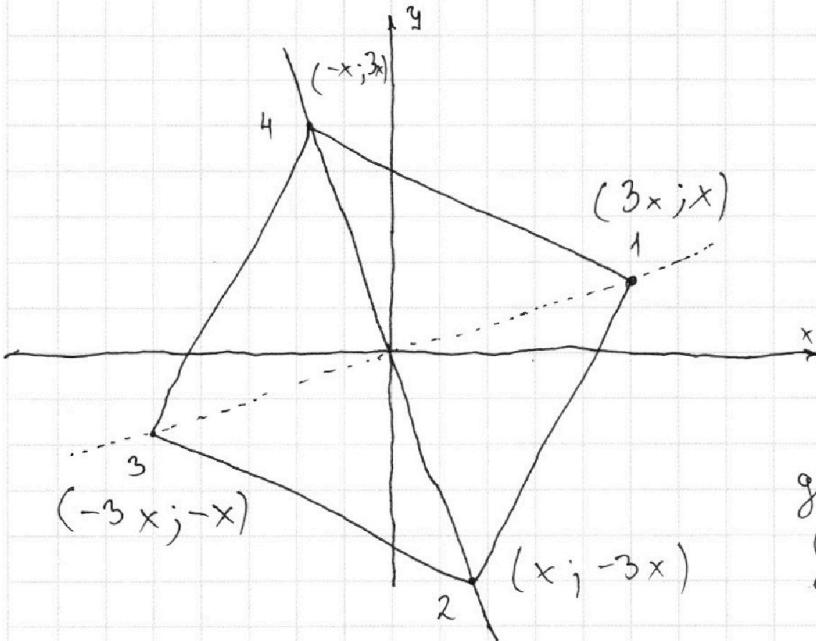
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Начнем прямую $y = -3x$

Нач 1 $y = -3x$
помощью можно
представить что
мы повернули ОУ и ОХ
на $\arg + g \frac{1}{3}$ градус.

Нач 2-ая
диагональ линия имеет
(всё +. на один расстоя
единица, т.к. четное квадрат)

Начиная с вершины. Начиная с 1 координаты $(3x; x)$ ($x > 0$)
Нач 2 $(x; -3x)$. $y 3 (-3x; -x)$. $y 4 (-x; 3x)$

Начиная с $y = x^5 + ax$. Тогда:

$$1) x = 243x^5 + 3ax \quad 1 = 243x^4 + 3a$$

$$2) -3x = x^5 + ax \quad -3 = x^4 + a \quad x^4 = -3 - a$$

$$0 = -1 + 243(-3 - a) + 3a = -730 - 240a \quad 73 + 24a = 0$$

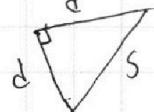
$$a = \frac{-73}{24} = -3 - \frac{1}{24} \quad x^4 = -3 - 3 + \frac{1}{24} = \frac{1}{24}$$

$$\text{Т.к. } x > 0 \quad x = \sqrt[4]{\frac{1}{24}}$$

$$d = \sqrt{\frac{9}{24} + \frac{1}{24}} = \sqrt{\frac{10}{24}} = \sqrt{\frac{5}{12}}$$

$$S = \sqrt{\frac{5}{12} + \frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{-73}{24}; \text{ площадь} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

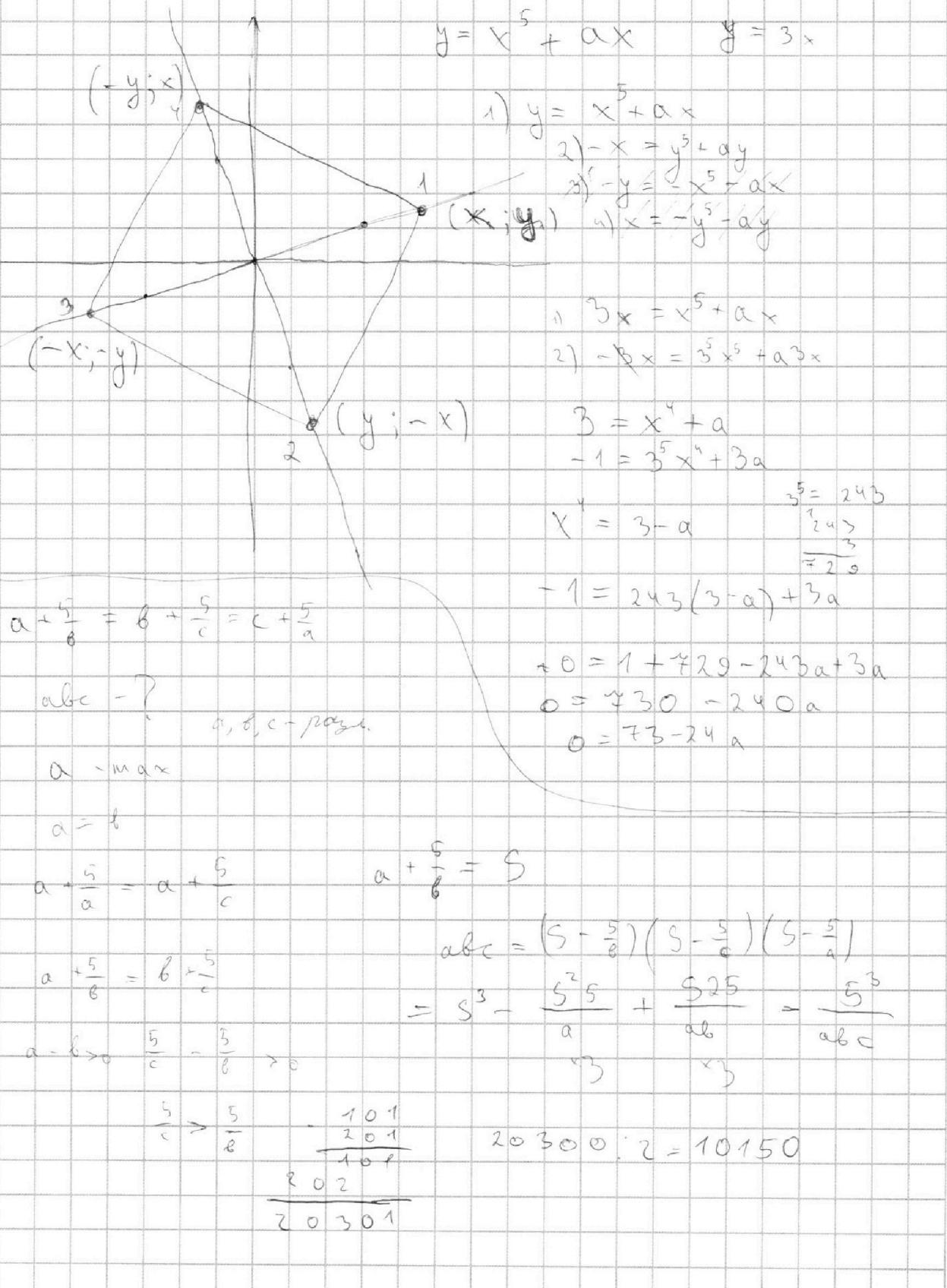
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

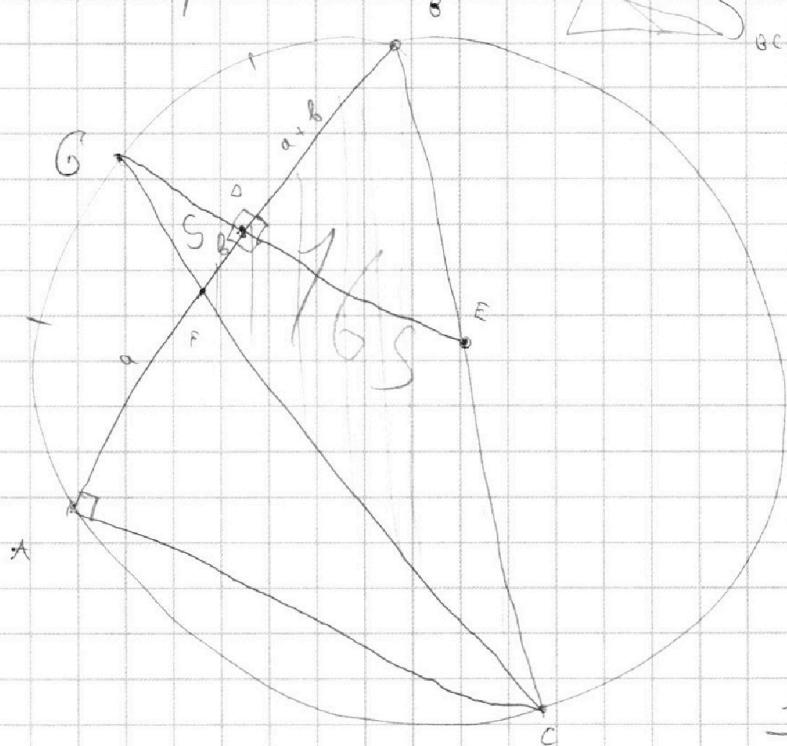


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 8



$$S_{BCF} = 16$$

$$S_{PGF}$$

$$\frac{16S}{2b+a} = \underline{\underline{S_{AFC}}}$$

$$\frac{S}{S_{AFC}} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

$$S_{AFC} = \frac{16S \cdot a}{2b+a}$$

$$\frac{b^2}{a^2} S$$

$$\frac{16a}{2b+a} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$16a^3 = (2b+a)b^2$$

$$16\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{2b+a}{a}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{h}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{h}{8}$$

$$(2a+b)h = 16 \cdot \frac{a^2 h}{b}$$

$$2a+b = 16 \cdot \frac{a^2}{b}$$

$$2ab + b^2 = 16a^2$$

$$\frac{\frac{a^2 h}{b}}{b} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{(a+b)^2 + h^2}{b} = \frac{(2ah+h^2)^2}{b^2}$$

$$\frac{a^2 h^2}{b^2} = \frac{a^2 h^2}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



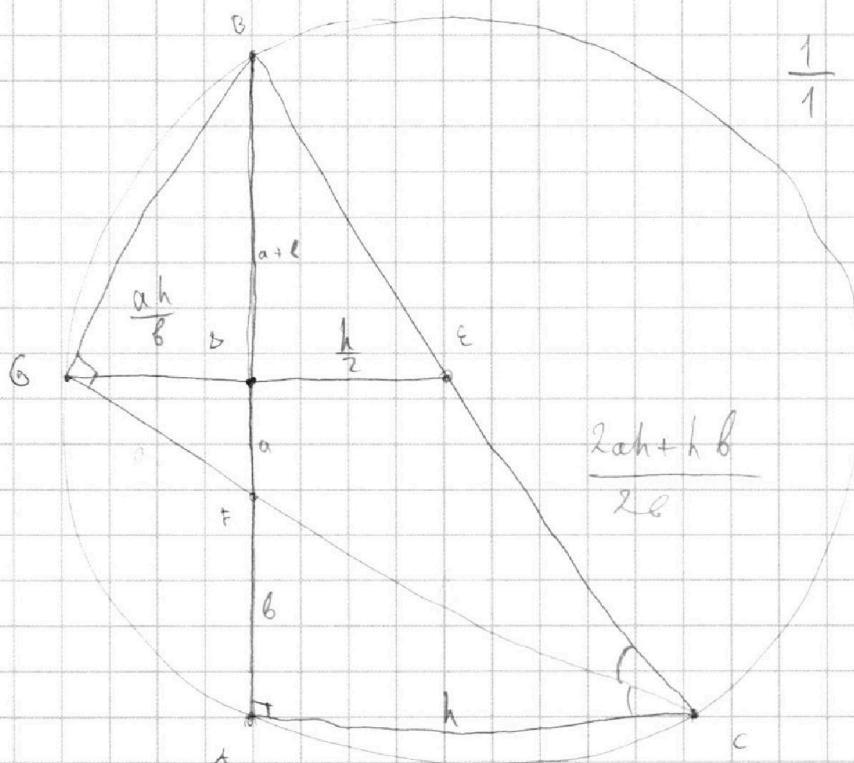
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{CFB} = 16 S_{DGF}$$

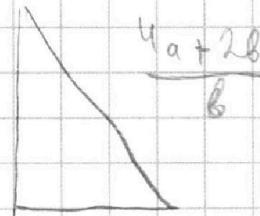
$$\frac{1}{1} \frac{a+b}{a} \frac{GF}{GF+FC} = 1$$

$$(a+b) GF = a GF + a FC$$

$$\frac{b}{a} \frac{\frac{a}{8}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{2ah + hb}{2a}$$

$$2a + b$$



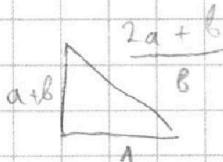
$$(2a+b)h = 16 \frac{a^2 h}{b}$$

$$2a + b = \frac{16a^2}{b}$$

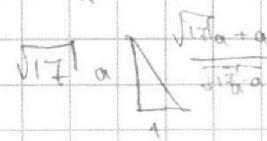
$$a^2 + 2ab + b^2 = 16a^2 + a^2$$

$$(a+b)^2 = (\sqrt{17}a)^2$$

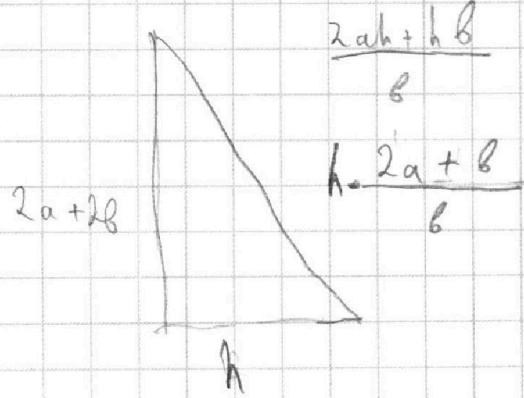
$$a+b = \sqrt{17}a$$



$$b = \sqrt{17}a - a$$



$$17a^2 + 1 = \frac{17a^2}{a^2}$$



$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$2a + 2a\sqrt{17}$$

$$\frac{17a^2 + 1}{a^2}$$

$$17 + \frac{1}{a^2} = \frac{17 + 2\sqrt{17} + 1}{17 - 2\sqrt{17} + 1}$$