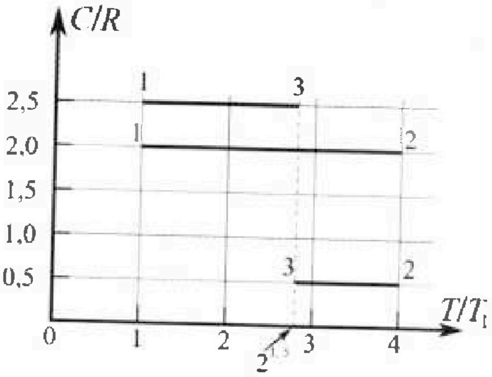
Олимпиада «Физтех» по физике, февраль 2023

Вариант 10-01

Во всех задачах, в ответах допустимы обыкновенные дроби и радикалы.

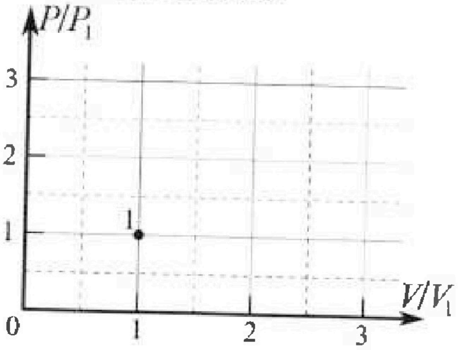


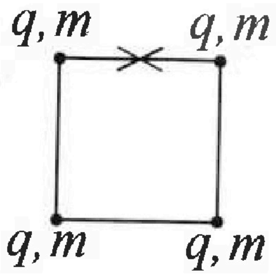
4. Тепловой двигатель работает по циклу 1-2-3-1. Рабочее вещество – один моль одноатомного идеального газа. Для вычисления КПД цикла ученик десятого класса построил график зависимости молярной теплоемкости C газа (в единицах универсальной газовой постоянной R) от температуры в процессах: 1-2, 2-3, 3-1 (см. рис.). Температура газа в состоянии 1 $T_1 = 400$ K, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·K).

1) Найдите работу A_{12} газа в процессе 1-2.

2) Найдите КПД η цикла.

3) Постройте график цикла в координатах $(P/P_1, V/V_1)$, где P_1 и V_1 давление и объём в состоянии 1. Для построения графика перенесите шаблон (см. ниже) в чистовик своей работы. Точка 1 на графике соответствует состоянию 1 газа в цикле.





5. Четыре заряженных шарика связаны легкими нерастяжимыми нитями так, что шарики находятся в вершинах квадрата со стороной b (см. рис.). Масса каждого шарика m, заряд q.

1) Найдите силу T натяжения нитей.

Одну нить пережигают.

2) Найдите скорость V любого, выбранного Вами шарика, в тот момент, когда шарики будут находиться на одной прямой.

3) На каком расс тоянии d от точки старта будет находиться в этот момент любой из двух шариков, изначально расположенных вверху (на рисунке)?

Коэффициент пропорциональности в законе Кулона k. Действие сил тяжести считайте пренебрежимо малым.

Олимпиада «Физтех» по физике, февраль 2023

Вариант 10-01

Во всех задачах, в ответах допустимы обыкновенные дроби и радикалы.

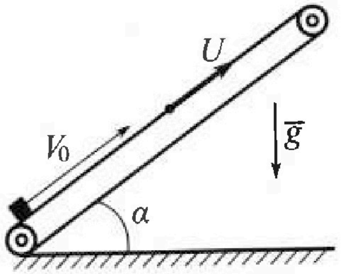
1. Мяч, посланный теннисистом вертикально вверх, поднимается на максимальную высоту за $T = 2$ с.

1) Найдите начальную скорость V_0 мяча.
2) Теннисист посылает мяч с начальной скоростью V_0 под различными углами к горизонту в направлении высокой вертикальной стенки, находящейся на расстоянии $S = 20$ м от места броска. На какой максимальной высоте мяч ударяется о стенку?

Ускорение свободного падения g =10 м/с^2. Мяч движется в плоскости перпендикулярной стенке. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым. Все высоты отсчитываются от точки старта.

2. Лента транспортера, предназначенного для подъема грузов, образует с горизонтальной плоскостью угол α такой, что $\sin\alpha = 0{,}8$ (см. рис.).

В первом опыте небольшую коробку ставят на *покоящуюся* ленту транспортера и сообщают коробке начальную скорость $V_0 = 4$ м/с. Коэффициент трения скольжения коробки по ленте $\mu = \frac{1}{3}$. Движение коробки прямолинейное.



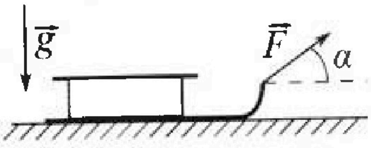
1) За какое время T после старта коробка пройдет *в первом опыте* путь $S = 1$ м?

Во втором опыте коробку ставят на ленту транспортера, *движущуюся* со скоростью $U = 2$ м/с, и сообщают коробке скорость $V_0 = 4$ м/с.

2) На каком расст оянии L от точки старта скорость коробки во втором опыте будет равна $U = 2$ м/с?
3) На какой высоте H, отсчитанной от точки старта, скорость коробки во втором опыте станет равной нулю? Ускорение свободного падения g =10 м/с^2. Все кинематические величины измерены в лабораторной системе отсчета.

3. Санки дважды разгоняют из состояния покоя до одной и той же скорости V_0 за одинаковое время.

В первом случае санки тянут, действуя постоянной по модулю силой, направленной под углом α к горизонту (см. рис.).



Во втором случае такая же по модулю сила, приложенная к санкам, направлена горизонтально. После достижения скорости V_0 действие внешней силы прекращается.

1) Найдите коэффициент μ трения скольжения санок по горизонтальной поверхности.
2) Через какое время T после прекращения действия силы санки остановятся? Ускорение свободного падения g.

Санки находятся на горизонтальной поверхности. Движение санок прямолинейное.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

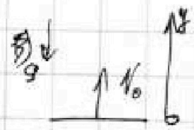
1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано:
$T = 2\,с$
$S = 20\,м$
$g = 10\,\frac{м}{с^2}$

Решение:

1) Спроецируем уравнения движения мяча на ось y:

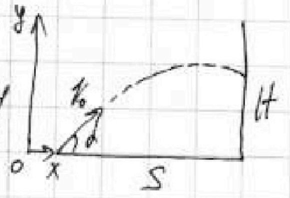


$$V_y = V_0 - gt$$
$$y = V_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Так как на максимальной высоте $V_y = 0$, иначе бы мяч продолжил свой подъём, то:

$V_y = 0 \Rightarrow V_0 - gT = 0 \Rightarrow V_0 = gT = 10\,\frac{м}{с^2}\cdot 2с = 20\,\frac{м}{с}$

2) Пусть теннисист послал мяч под углом α и он ударился об стенку на высоте H. Спроецируем движение мяча на оси x и y:



$$x = V_0 \cos\alpha\, t$$
$$y = V_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}$$

Пусть ~~за~~ через время τ мяч ударился об стенку:

$s = V_0 \cos\alpha\, \tau$ (1)
$H = V_0 \sin\alpha\, \tau - \frac{g\tau^2}{2}$ (2)
(1): $\tau = \frac{s}{V_0 \cos\alpha}$

Подставим τ в (2):

$$H = V_0 \sin\alpha \cdot \frac{s}{V_0 \cos\alpha} - \frac{g}{2}\cdot\frac{s^2}{V_0^2\cos^2\alpha} = s\,tg\alpha - \frac{gs^2}{2V_0^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} =$$
$$= s\,tg\alpha - \frac{gs^2}{2V_0^2}(tg^2\alpha + 1) = -\frac{gs^2}{2V_0^2}tg^2\alpha + s\,tg\alpha - \frac{gs^2}{2V_0^2}$$

Функция H(tgα) — квадратичная, график парабола (-1)<0, значит ветви вниз, наибольшее значение в вершине.

$$tg\alpha_0 = \frac{-s}{2\cdot\left(-\frac{gs^2}{2V_0^2}\right)} = \frac{V_0^2 s}{gs^2} = \frac{V_0^2}{gs}$$

$$H_{max} = H(tg\alpha_0) = -\frac{gs^2}{2V_0^2}\cdot\frac{V_0^4}{g^2s^2} + s\cdot\frac{V_0^2}{gs} - \frac{gs^2}{2V_0^2} = -\frac{V_0^2}{2g} + \frac{V_0^2}{g} - \frac{gs^2}{2V_0^2} = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gs^2}{2V_0^2}$$

$$H_{max} = \frac{20^2}{2\cdot 10}\,м - \frac{10\cdot 20^2}{2\cdot 20^2}\,м = 20м - 5м = 15м$$

Ответ: $V_0 = 20\,\frac{м}{с}$; $H_{max} = 15м$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

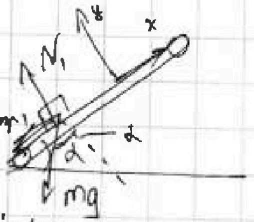
1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано:
$\sin\alpha = 0{,}8$
$V_0 = 4\frac{м}{с}$
$\mu = \frac{1}{3}$
$s = 1м$
$u = 2\frac{м}{с}$
$g = 10\frac{м}{с^2}$

Решение:

1) В первом опыте на коробку действует нормальная сила реакции опоры N_1, трения $F_{тр1}$ и сила тяжести mg, а ускорение $-a_1$.



Спроецируем второй закон Ньютона на оси x и y:

$\sin\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5}$

x: $ma_1 = -mg\sin\alpha - F_{тр1}$
y: $0 = N - mg\cos\alpha$
$N = mg\cos\alpha$

$\left.\begin{array}{l} F_{тр1} \text{ — сила трения скольжения} \Rightarrow F_{тр1} = \mu N \end{array}\right\} \Rightarrow F_{тр1} = \mu mg\cos\alpha$

Найдём ускорение a_1:

$$a_1 = \frac{-mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha}{m} = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = -g\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\right) = -g$$

Найдём время t_1, за которое коробка остановится:

$$\left.\begin{array}{l} V = V_0 + a_1 t \\ V(t_1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow V_0 - gt_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{V_0}{g} = 0{,}4с$$

Найдём путь, которое к этому времени прошла коробка.

$$s_1 = V_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = 4\cdot 0{,}4м - \frac{10\cdot 0{,}16}{2}м = 1{,}6м - \frac{1{,}6}{2}м = 0{,}8м < s = 1м$$

Значит, после времени t_1 пройдёт ещё время t_2 до того, как коробка проедет $s = 1м$. Теперь коробка поедет вниз, а значит $F_{тр1}$ изменит своё направление. Тогда:

$$ma_2 = -mg\sin\alpha + F_{тр1} = -mg\overset{\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}} + \mu mg\cos\alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_2 = -g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha = -g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = -g\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\right) = -\frac{3}{5}g$$

Движение равноускоренное, значит:

$$s - s_1 = \frac{|a_2|t_2^2}{2} \Rightarrow s - s_1 = \frac{3gt_2^2}{10} \Rightarrow t_2^2 = \frac{10}{3}\frac{s-s_1}{g} \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{10}{3}\frac{s-s_1}{g}} = \sqrt{\frac{10}{3}\cdot\frac{0{,}2}{10}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

Тогда время $T = t_1 + t_2 = 0{,}4 + \frac{\sqrt{15}}{15}с$

2) Перейдём в ИСО ленты. Тогда начальная скорость коробки $V_0' = V_0 - u = 2\frac{м}{с}$.

Когда скорость коробки будет u, тогда её ~~относительная~~ скость в ИСО ленты $V = u - u = 0$. То есть в данной ИСО коробка начала движение со скоростью V_0' по неподвижной ленте. Тогда до момента её остановки — рассматриваемого момента, её ускорение такое же, как и в первом опыте до остановки, то есть a_1.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Закон изменения скорости в этой ИСО:

$V = V_0' + a_1 t$

Пусть через время t_3 скорость коробки в ЛСО равна u, а в ИСО ленты 0. Тогда:

$$\left.\begin{aligned} &V_0' + a_1 t_3 = 0 \\ &V_0' = V_0 - u,\ a_1 = -g \end{aligned}\right\} \Rightarrow g t_3 = V_0 - u \Rightarrow t_3 = \frac{V_0 - u}{g} = 0{,}2 c$$

Вернёмся в исходную ЛСО и найдём расстояние L:

$$L = V_0 t_3 + \frac{a_1 t_3^2}{3} = V_0 t_3 - \frac{g t_3^2}{2} = 4 \cdot 0{,}2 м - \frac{10 \cdot 0{,}04}{2} м = 0{,}8 м - 0{,}2 м = 0{,}6 м$$

3) После времени t_3, ~~он~~ и до ~~остановки~~ того, как скорость коробки будет 0, сила трения поменяет своё направление, так как относительная скорость коробки отн-но ленты будет уже направлена вниз по ленте. Тогда, так как система ленты – ИСО, то ускорение коробки будет $a_2 = 6 \frac{м}{с}$, a_2 вниз по ленте.

Закон изменения скорости:

$V = 0 - a_2 t_4$

Пусть через время t_4 – скорость коробки в ЛСО – 0, тогда $V = 0 - u = -u$, тогда:

$-u = -a_2 t_4 \Rightarrow t_4 = \frac{u}{a_2} = \frac{1}{3} c$

Найдём путь S_2, который прошла коробка вверх, ~~вверх~~ по ленте транспортёра:

~~$S_2 = \frac{a_2 t_4^2}{2} = \frac{6 \cdot \frac{1}{9}}{2} м = \frac{1}{3} м$~~

$$S_2 = u t_4 - \frac{a_2 t_4^2}{2} = 2 \cdot \frac{1}{3} м - \frac{6 \cdot \frac{1}{9}}{2} м = \frac{1}{3} м$$

Тогда пройденное расстояние l: $l = L + S_2$.

Найдём ~~скор~~ высоту H:

$$H = l \sin\alpha = L \sin\alpha + S_2 \sin\alpha = 0{,}6 м \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} м \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{6} м + \frac{4}{15} м =$$
$$= \frac{36}{15} м + \frac{4}{15} м = \frac{40}{15} м = \frac{8}{3} м \approx 2{,}67 м$$

4) Заметим, что коробка приобретёт скорость $u = 2 \frac{м}{с}$ ещё раз: после того, как её скорость обнулилась, ~~то~~ она начнёт ехать вниз по ленте, а значит теперь $F_{тр}$ всегда вверх по ленте, а значит ускорение коробки – a_2. Найдём время t_5, ~~когда~~ после t_4, когда скорость коробки u: $u = a_2 t_5 \Rightarrow$
$\Rightarrow t_5 = \frac{u}{a_2} = \frac{1}{3} c = t_4$, но теперь коробка едет вниз и проедет $S_3 = u t_5 - \frac{a_2 t_5^2}{2} = \frac{1}{3} м$, а значит вернётся на L.

Ответ: $T = (0{,}4 + \frac{\sqrt{15}}{15}) c$; $L = 0{,}6$ м; $H \approx 2{,}67$ м.

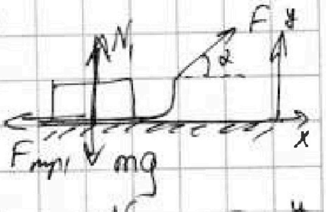
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

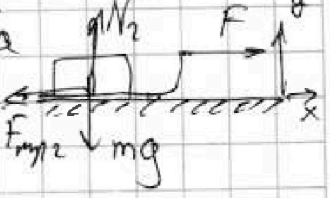
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано: Решение:

V_0, α, g 1) Пусть m - масса саней, N_1 и N_2 - Ⓘ силы нормальных реакций опор, F - сила, с которой тянут, a_1 и a_2 - ускорения саней в двух случаях, ~~τ~~ τ - время разгона до V_0, $F_{тр1}$ и $F_{тр2}$ - силы трения в обоих случаях.





Запишем второй закон Ньютона в проекции на оси x и y:

x: $ma_1 = F\cos\alpha - F_{тр1}$

$ma_2 = F - F_{тр2}$

y: $0 = N_1 + F\sin\alpha - mg$

$0 = N_2 - mg$

Так как сани едут, то силы трения скольжения а значит $F_{тр1} = \mu N_1$; $F_{тр2} = \mu N_2$. Тогда:

~~$ma_1 = F$~~ $N_1 = mg - F\sin\alpha$ => $F_{тр1} = \mu mg - \mu F\sin\alpha$

$N_2 = mg$ $F_{тр2} = \mu mg$

Найдём ускорения:

$ma_1 = F\cos\alpha - (\mu mg - \mu F\sin\alpha) \Rightarrow a_1 = \frac{F}{m}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g$

$ma_2 = F - \mu mg \Rightarrow a_2 = \frac{F}{m} - \mu g$

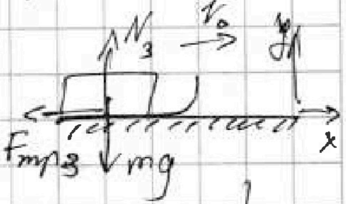
По условию:

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= a_2 \tau \\ V_0 &= a_1 \tau \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow \cancel{\frac{F}{m}} - \cancel{\mu g} = \cancel{\frac{F}{m}}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \cancel{\mu g}$$

$1 = \cos\alpha + \mu\sin\alpha$

$\mu\sin\alpha = 1 - \cos\alpha \Rightarrow \mu = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

2) После исчезновения силы F санки начнут равнозамедленное движение.



Найдём ускорение a_3, спроецировав второй закон Ньютона на оси x и y:

$$\left.\begin{aligned} &x:\ ma_3 = -F_{тр3} \\ &y:\ 0 = N_3 - mg \Rightarrow N_3 = mg \\ &F_{тр3} \text{ - сила трения скольжения} \Rightarrow F_{тр3} = \mu mg = \mu N_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow ma_3 = -\mu mg \Rightarrow a_3 = -\mu g$

Закон изменения скорости:

$$\left.\begin{aligned} &V = V_0 + a_3 t \\ &\text{При } T\ V = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_0 + a_3 T = 0 \Rightarrow T = -\frac{V_0}{a_3} = -\frac{V_0}{-\mu g} = \frac{V_0}{\mu g} =$$

$$= \frac{V_0}{\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} g} = \frac{V_0 \sin\alpha}{(1-\cos\alpha)g}$$

Ответ: $\mu = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $T = \frac{V_0\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)g}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано: $i=3$, $\nu = 1$ моль
$T_1 = 400K$
$R = 8,31 \frac{Дж}{моль \cdot К}$

Решение:

1) Пусть ΔU_{12} − изменение энергии газа в процессе $1 \to 2$, Q_{12} − теплота, полученная газом, ΔT_{12} − изменение температуры. Тогда:

$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} \Rightarrow A_{12} = Q_{12} - \Delta U_{12}$

$Q_{12} = C_{12} \nu \Delta T_{12} = \cancel{2,5}\, 2R\nu(4T_1 - T_1) = 6\nu RT_1$

$\Delta U_{12} = \frac{i}{2} \nu R \Delta T_{12} = \frac{3}{2} \nu R (4T_1 - T_1) = 4,5 \nu RT_1$

Найдём работу газа A_{12}:

$A_{12} = Q_{12} - \Delta U_{12} = 6\nu RT_1 - 4,5 \nu RT_1 = 1,5 \nu RT_1 = 1,5 \cdot 1 \cdot 8,31 \cdot 400 Дж =$
$= 4986$ Дж

2) Так как $Q = C\nu\Delta T$, а у всех 3 процессов $C>0$, а ΔT_{23} и ΔT_{31} меньше 0, то $Q_{12} > 0$, $Q_{23} < 0$, $Q_{31} < 0$. Пусть Q_H − теплота нагревателя, Q_x − теплота холодильника. Тогда

$Q_H = Q_{12}$

$Q_x = Q_{23} + Q_{31}$

Найдём Q_{23} и Q_{31}:

$Q_{23} = \cancel{\Delta U_{23} + A_{23}}\ C_{23} \nu \Delta T_{23}$, где C_{23} − теплоёмкость процесса 2−3, ΔT_{23} − изменение температуры

$Q_{23} = C_{23} \nu \Delta T_{23} = 0,5 R \nu (2\sqrt{2} - 4) T_1 = (\sqrt{2} - 2)\nu RT_1$

$Q_{31} = C_{31} \nu \Delta T_{31}$, где C_{31} − теплоёмкость газа в процессе 3−1, ΔT_{31} − изменение его температуры.

$Q_{31} = C_{31} \nu \Delta T_{31} = 2,5 R \nu (1 - 2\sqrt{2}) T_1 = (2,5 - 5\sqrt{2}) \nu RT_1$

Тогда $Q_x = \theta(\sqrt{2} - 2 + 2,5 - 5\sqrt{2}) \nu RT_1 = (0,5 - 4\sqrt{2}) \nu RT_1$

Найдём $Q_{12} = C_{12} \nu \Delta T_{12} = 2R\nu(4T_1 - T_1) = 6\nu RT_1 = Q_H$

Найдём КПД цикла:

$$\eta = \frac{Q_H - |Q_x|}{Q_H} = \frac{6\nu RT_1 - (4\sqrt{2} - 0,5)\nu RT_1}{6\nu RT_1} = \frac{6,5 - 4\sqrt{2}}{6} = \frac{13 - 8\sqrt{2}}{12} \approx 14,3\%$$

3) Рассмотрим ~~изохорный~~ изобарный процесс с одноатомным газом. Пусть V_1 и V_2 − его ~~давления~~ объёмы, p − давление, T_1 и T_2 − температуры.

Уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$\left.\begin{array}{l} pV_1 = \nu RT_1 \\ pV_2 = \nu RT_2 \Rightarrow p\Delta V = \nu R\Delta T \\ Q = C\nu\Delta T = \Delta E + A = \frac{3}{2}\nu R\Delta T + p\Delta V \end{array}\right\} \Rightarrow C\nu\Delta T = \frac{5}{2}\nu R\Delta T \Rightarrow C = \frac{5}{2}R.$$

Заметим, что в процессе 1−3 $C = 2,5R$, а значит процесс 1−3 − изобарный, либо изотерм, но $\Delta T \neq 0$, поэтому изобарный.
Тогда пусть p_1, p_2, p_3 − давления газа, V_1, V_2, V_3 − его объёмы, T_1, T_2, T_3 − температура.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

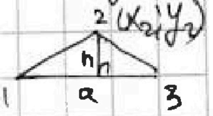
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Уравнение Менделеева-Клайперона:

$$\left.\begin{aligned} p_1V_1 &= \nu RT_1 \\ p_3V_3 &= \nu RT_3' = \nu R 2\sqrt{2} T_1 \\ p_1 &= p_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} p_1 &= p_3 \\ V_3 &= 2\sqrt{2}V_1 \approx 2{,}82V_1 \end{aligned}$$

Так как для всех процессов в каждом из них молярная теплоёмкость не зависит от температуры, то это значит что работа газа ~~линейно~~ зависит от T в первой степени, а значит и от pV в первой степени, а значит графики процессов в координатах (P/P₁; V/V₁) – прямые. Тогда цикл – треугольник, а его площадь – работа газа за весь цикл



A': $A = Q_н - |Q_х| = 6{,}5\nu RT_1 - 4\sqrt{2})RT_1 =$ ~~$=(6{,}5-4\sqrt{2})$~~, а $A' = \frac{A}{p_1V_1} = \frac{(6{,}5-4\sqrt{2})\nu RT_1}{p_1V_1} = 6{,}5-4\sqrt{2}$

Найдём длину отрезка a-3:

$a = 2\sqrt{2}-1$

$A' = \frac{1}{2}ha \Rightarrow h = \frac{2A'}{a} = \frac{13-8\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1} = \frac{18\sqrt{2}-19}{7}$

Уравнения Менделеева-Клайперона:

$$\left.\begin{aligned} p_1V_1 &= \nu RT_1 \\ p_2V_2 &= \nu RT_2 = 4T_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{p_2V_2}{p_1V_1} = x_2y_2 = \frac{4T_1}{T_1} = 4 \Rightarrow x_2 = \frac{4}{y_2}$$

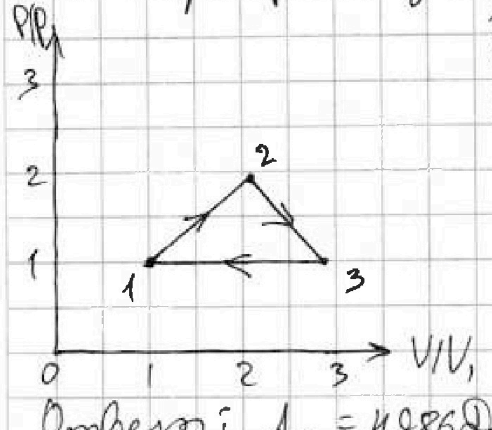
Найдём y_2, зная h:

$y_2 = h+1 = \frac{18\sqrt{2}-12}{7} \approx 1{,}9$

$x_2 = \frac{4}{y_2} = \frac{28}{18\sqrt{2}-12} = \frac{14}{9\sqrt{2}-6} \approx 2{,}1$

Теперь, зная координаты всех вершин, построим график цикла.

1(1; 1)
2(1,9; 2,1)
3(2,82; 1)



Ответ: $A_{12} = 4986$ Дж, $\eta \approx 14{,}3\%$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

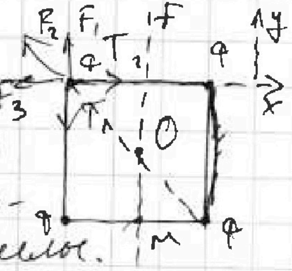
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Дано:
b, m, q, k

Решение:



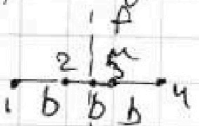
1) Рассмотрим левый верхний шарик. Из-за симметрии относительно центра квадрата O силы $T_1 = T_2$ — натяжения нитей, а на другие шарики действуют такие же силы.

Так как шарики в равновесии, то в проекции на ось x:

$$T = 0 + 2F_2\cos 45° + F_3 = k\frac{q^2}{2b^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + k\frac{q^2}{b^2} = k\frac{q^2}{b^2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \approx$$
$$\approx 1,35\,k\frac{q^2}{b^2}$$

2) Нить перерезают.

Так как нить нерастяжима, то когда шарики на одной прямой, то для выполнения условия нерастяжимости проекции их скоростей на нить равны. A так как все силы направлены по прямой, проекции равные и из-за симметрии относительно A получаем, что все скорости равны V.



Так как все действовавшие силы — внутренние для системы шаров, то выполняется З.С.Э.:

$$E_1 = E_2 + \frac{4mV^2}{2}$$

Найдём энергии E_1 и E_2 взаимодействия шаров:

$$E_1 = 4kq^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{\sqrt{2}b}\right) = \frac{kq^2}{b}(8+2\sqrt{2})$$

$$E_2 = kq^2\left(\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3b}\right)\cdot 2 + 2\cdot\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{2b}\right)\right) = \frac{2kq^2}{b}\left(3+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right) =$$
$$= \frac{kq^2}{b}\left(8+\frac{2}{3}\right)$$

Тогда:

$$\frac{kq^2}{b}(8+2\sqrt{2}) = \frac{kq^2}{b}\left(8+\frac{2}{3}\right) + 2mV^2$$

$$\frac{kq^2}{b}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right) = mV^2 \Rightarrow V^2 = \frac{kq^2}{bm}\left(\frac{3\sqrt{2}-1}{3} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}-1}{3}\cdot\frac{k}{bm}}\,q\right.$$

3) Так как изначально положение шаров симметрично относительно оси A, как и действие сил, а значит и ускорений, то и через малое время $\Delta t \ll 1$ симметрия сохранится, а значит положение шаров и в движении было симметрично

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

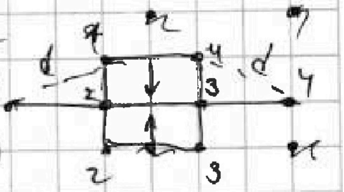
относительно f. Так как f проходит через середину нити 2-3, а нить нерастяжима, то шарики 2-3 из-за симметрии до выравнивания всех шаров в прямую, не имели горизонтальных перемещений (по оси x), а только по вертикали.

А так как силы, действующие по вертикали на верхние и нижние шары равны, то за время dt ускорения шариков 1 и 2 равные a, тогда:

$dV_1 = dV_2 = a\,dt$

$dS_1 = dS_2 \Rightarrow S_1 = S_2$

То есть из-за этого расстояния, которые они прошли по вертикали равны, а значит они "выпрямились" напротив изначальной середины 1-2, как на рисунке справа.



Найдём расстояние d по теореме Пифагора:

$$d = \sqrt{b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5b^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}b.$$

Ответ: $T = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\frac{kq^2}{b^2} \approx 1{,}35\,\frac{kq^2}{b^2}$; $V = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}-1}{3}\,\frac{kq^2}{bm}}$; $d = \frac{\sqrt{5}}{2}b$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$Q = \Delta E + A$

$C_{12}\Delta T_{12} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T_{12} + A_{12}$

$A_{12} = 2R(4T_1 - T_1) - \frac{3}{2}\cdot 1\cdot R\cdot(4T_1 - T_1) = 2R\cdot 3T_1 - \frac{3}{2}R\,3T_1 = 6RT_1 - 4{,}5RT_1 = 1{,}5RT_1 =$

$= 1{,}5\cdot 8{,}31\cdot 400$ Дж $= 600\cdot 8{,}31$ Дж $= 4986$ Дж

$8{,}31 \cdot 600 = 4986{,}00$ $\quad 1{,}5 \cdot 400 = 600{,}0$ $\quad 831 \cdot 6 = 4986$

$1 \to 2 \to 3 \to 1$
$+ \quad - \quad -$

$Q_н = Q_{12} = C_{12}\Delta T_{12} = 2R\cdot 3T_1 = 6RT_1$

$|Q_х| = |Q_{23}| + |Q_{31}| = 0{,}5R\cdot(4 - 2\sqrt{2})T_1 + 2{,}5R\cdot(2\sqrt{2} - 1)T_1 = 2RT_1 - \sqrt{2}RT_1 + 5\sqrt{2}RT_1 - 2{,}5RT_1$

$= -0{,}5RT_1 + 4\sqrt{2}RT_1$

$\eta = \frac{Q_н - Q_х}{Q_н} = \frac{6RT_1 + 0{,}5RT_1 - 4\sqrt{2}RT_1}{6RT_1} = \frac{6{,}5 - 4\sqrt{2}}{6} = \frac{13 - 8\sqrt{2}}{12}$

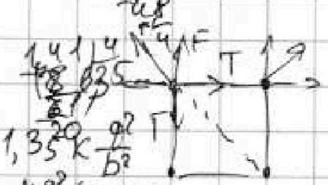
$13{,}00 - 11{,}28 = 1{,}72 \quad 1{,}41 \cdot 8 = 11{,}28$

$13 - 8\sqrt{2} \approx 13 - 8\cdot 1{,}41 = 13 - 11{,}28 = 1{,}72$

$1{,}72 : 12 = 14$

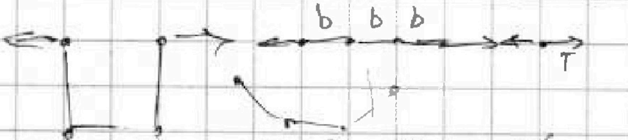
$\eta = 14{,}3\cdot\frac{1}{100} \approx 14{,}3\%$

$\Delta E_{32} = \frac{3}{2}(p_1V_1 - p_2V_2)$



$T = F + F'\cos 45^\circ = k\frac{q^2}{b^2} + k\frac{q^2}{2b^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = k\frac{q^2}{b^2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

$1{,}35\, k\frac{q^2}{b^2}$



~~$E = 4k\frac{q^2}{b}\left(\frac{1}{b} + \frac{b^2}{2b}\right)$~~

~~$E = kq^2\left(\frac{8}{b} + \frac{2\sqrt{2}}{b}\right) = \frac{kq^2}{b}(8 + 2\sqrt{2})$~~

$172 : 12 = 14$

$\nu RT_1 = p_1V_1$ $\quad$ ~~$Q = \frac{3}{2}\Delta pV + \Delta pV$~~

$\nu RT_2 = p_2V_2$ $\quad$ $Q = \frac{3}{2}p\Delta V + p\Delta V = \frac{5}{2}\nu R\Delta T$ — изохора

$\frac{p_2V_2}{p_1V_1} = 4$ $\quad$ $x_2y_2 = 4x_1y_1 = 4$ $\quad$ $x_2y_2 = 4$ $\quad$ $\frac{4}{2{,}5} = \frac{4}{\frac{5}{2}} = \frac{8}{5} = 1{,}6$

$\frac{p_3V_3}{p_1V_1} = 2\sqrt{2}$ $\quad$ $x_2y_2 = \sqrt{2}x_3y_3$ $\quad$ $y_2 = \frac{4}{x_2}$

$S = 6{,}5 - 4\sqrt{2}$

$A = Q_н - Q_х = (6{,}5 - 4\sqrt{2})\nu RT_1$ $\quad$ $\frac{1}{2}h(2\sqrt{2} - 1) = 6{,}5 - 4\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}\nu RT_1$ $\quad$ $C(T)$ — ~~сп~~ прямые → $P(V)$ — прямые $\quad h = \frac{13 - 8\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 1} =$

$= \frac{(13 - 8\sqrt{2})(2\sqrt{2} + 1)}{8 - 1} = \frac{26\sqrt{2} + 13 - 32 - 8\sqrt{2}}{7} = \frac{18\sqrt{2} - 19}{7}$ $\quad 1{,}4$

$669 \cdot 2 = 1338$

$y_2 = \frac{18\sqrt{2} - 12}{7}$

$x_2 = \frac{28}{18\sqrt{2} - 12} = \frac{14}{9\sqrt{2} - 6} = \frac{14(9\sqrt{2} + 6)}{81\cdot 2 - 36} = \frac{14}{6{,}69} = \frac{1400}{669} \approx 2$

$1{,}41 \cdot 18 = 25{,}38$ (1128, 141) $\quad 25{,}38 - 12 = 13{,}38$

$1338 : 7 = 191$ (-7, 63, -63, 08, -7, 1)

$1{,}41 \cdot 9 = 12{,}69$ $\quad 12{,}69 - 6 = 6{,}69$

$1400 : 669 = 2$ $\quad 1400 - 1338 = 62$ $\quad \frac{62}{669}$

$\frac{4}{1{,}9}$ $\quad 18\sqrt{2} \vee 26$

$1{,}41 \cdot 8 = 11{,}28$ $\quad 1{,}72$

$1{,}9 \cdot 2{,}1 = 3{,}99$ (19, 38)

$1{,}91 \cdot 2{,}1 = 4{,}011$ (191, 382)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x = V_0 \cos\alpha t$

$y = V_0 \sin\alpha t - \frac{g}{2}t^2$ $\qquad 4k\frac{q^2}{\sqrt{2}b}$

$V_y = V_0\sin\alpha - gt = 0 \Rightarrow V_0\sin\alpha = gT \Rightarrow V_0 = \frac{gT}{\sin\alpha} = gT = 2\,10\,\frac{м}{с^2} = 20\frac{м}{с}$ $\qquad 4k\frac{q^2}{b}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{\sqrt{2}b}\right)$

$t = \frac{x}{V_0\cos\alpha}$

$y = V_0\sin\alpha\cdot\frac{x}{V_0\cos\alpha} - \frac{g}{2}\cdot\frac{x^2}{V_0^2\cos^2\alpha} = x\,tg\alpha - \frac{g}{2}\frac{x^2}{V_0^2\cos^2\alpha} = x\,tg\alpha - \frac{g}{2}\frac{x^2}{V_0^2}(tg^2\alpha+1)$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$y = -\frac{g}{2}\frac{S^2}{V_0^2}tg^2\alpha + S\,tg\alpha - \frac{g}{2}\frac{S^2}{V_0^2}$ $\qquad V^2 \quad u$

$tg\alpha_0 = \frac{S}{2\frac{g}{2}\frac{S^2}{V_0^2}} = \frac{\cancel{S}}{\frac{gS^2}{V_0^2}} = \frac{V_0^2}{gS}$ $\qquad E = \frac{kq^2}{b}(8+2\sqrt{2}) = \frac{4mV^2}{2} + kq^2\Big(\frac{1}{b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3b}\Big)$

$H_{max} = -\frac{g}{2}\frac{S^2}{V_0^2}\cdot\frac{V_0^4}{g^2S^2} + S\cdot\frac{V_0^2}{gS} - \frac{g}{2}\cdot\frac{S^2}{V_0^2} = -\frac{V_0^2}{2g} + \frac{V_0^2}{g} - \frac{g}{2}\frac{S^2}{V_0^2} = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gS^2}{2V_0^2}$

$= \frac{400}{2\cdot10} - \frac{10\cdot400}{2\cdot400} = \frac{400}{20} - \frac{10}{2} = 20 - 5 = 15\,м$

$\frac{mV_0^2}{2}$ $\qquad N = mg\cos\alpha$ $\qquad E_n = \frac{kq^2}{b}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+2+\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) =$

$ma = mg\sin\alpha + \mu N = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha$

$a = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ $\qquad \sin\alpha = \frac{4}{5}$

$S = V_0T - \frac{aT^2}{2} \Rightarrow 1 = 4T - \frac{g(\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5})T^2}{2}$ $\qquad \cos\alpha = \frac{3}{5}$ $\quad = \frac{kq^2}{b}\left(6+2+\frac{2}{3}\right) =$

$1 = 4T - \frac{10T^2}{2} \Rightarrow 5T^2 - 4T + 1 = 0$ $\qquad = \frac{kq^2}{b}\left(8+\frac{2}{3}\right)$

$0 = V_0 - gt \Rightarrow t = \frac{V_0}{g} = \frac{4}{10} = 0,4$ $\qquad \frac{4mV^2}{2} = \frac{kq^2}{b}\left(2\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow mV^2 = kq^2\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)$

$S = 4\cdot0,4 - \frac{10\cdot0,16}{2} = 1,6 - \frac{10\cdot0,16}{2} = 1,6 - \frac{1,6}{2} = 0,8$ м – до остановки

$N = mg\cos\alpha$

$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \Rightarrow a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = g\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{5}\right) = \frac{3g}{5} = 6\frac{м}{с^2}$

$S = \frac{at^2}{2} \Rightarrow 0,2 = \frac{6\cdot t^2}{2} \Rightarrow 0,4 = 6t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2}{30} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{15}}{15}$

СО ленты: $V_{отн} = V_0 - u = 2\frac{м}{с}$ $\qquad T = \frac{\sqrt{15}}{15} + 0,4$?

$a = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 10\frac{м}{с^2}$ $\quad V_{отн} = 0 \Rightarrow at = V_0 - u \Rightarrow t = \frac{V_0 - u}{a} = \frac{2\frac{м}{с}}{10\frac{м}{с^2}} = 0,2с$

$L = V_0t - \frac{at^2}{2} = 4\cdot0,2 - \frac{10\cdot0,04}{2} = 0,8 - \frac{0,4}{2} = 0,8 - 0,2 = 0,6\,м$

~~$V_{отн}$ … mgt~~ $V_{отн} = |u - V_0| = 4 - 2\frac{м}{с}$

$V_{отн} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t \Rightarrow t = \frac{2\frac{м}{с}}{6\frac{м}{с^2}} = \frac{1}{3}с$

!

$ma_1 = F\cos\alpha - F_{тр} = F\cos\alpha - \mu N_1$

$N_1 = mg - F\sin\alpha$ $\Big\} \Rightarrow ma_1 = F\cos\alpha - \mu mg + \mu F\sin\alpha$

$ma_2 = F - F_{тр}$

$N_2 = mg$ $\Big\} \Rightarrow ma_2 = F - \mu mg$ $\qquad a_1 = a_2$

$\cancel{F} - \cancel{\mu mg} = \cancel{F}\cos\alpha - \cancel{\mu mg} + \mu F\sin\alpha$

$1 = \cos\alpha + \mu\sin\alpha$

$\mu = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$ma_3 = F_{тр} = \mu N = \mu mg \Rightarrow a_3 = \mu g$ $\qquad V_0 = \mu gT \Rightarrow T = \frac{V_0}{\mu g} = \frac{V_0}{\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}g} = \frac{V_0\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)g}$