



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже ~~велосипедиста~~ ^{мотоциклиста}. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = 2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Ответ: ~~3²⁵ · 7³⁸~~ $3^{25} \cdot 7^{38}$

Решение:

Предположим, что какое-то из чисел a, b или c кратно простому p , при этом $p \neq 3$ и $p \neq 7$. Поделим число a, b или c (которое кратно p) на p . Тогда, на делимость на 3 и на 7 чисел ab, bc и ac наше действие не повлияет. Будем повторять это действие до тех пор, пока ~~будет~~ найдётся такое ^{простое} число p , что $p \neq 3$ и $p \neq 7$, при этом какое-то из чисел a, b или c кратно p . Нетрудно видеть, что такими операциями мы ~~ни~~ не повлияем на делимость чисел ab, bc и ac на 3 и 7; ~~ка~~ при этом число abc мы можем только уменьшать с помощью таких операций.

По итогу, у нас останется три числа a, b, c , каждое из которых не делится простыми делителями ~~ни~~ в разложении на простые множители, отличными от 3 и 7.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Не кратны никакому простому числу, отличному от 3 и 4.

Тогда $a = 3^{a_1} \cdot 4^{b_1}$; $b = 3^{a_2} \cdot 4^{b_2}$; $c = 3^{a_3} \cdot 4^{b_3}$, где числа $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ — целые неотрицательные.

Тогда $ab = 3^{a_1+a_2} \cdot 4^{b_1+b_2}$; $ac = 3^{a_1+a_3} \cdot 4^{b_1+b_3}$; $bc = 3^{a_2+a_3} \cdot 4^{b_2+b_3}$;
 $abc = 3^{a_1+a_2+a_3} \cdot 4^{b_1+b_2+b_3}$;
 Так как $ab : (3^{11} \cdot 4^{11})$; $ac : (3^{21} \cdot 4^{38})$; $bc : (3^{18} \cdot 4^{16})$,

то получаем систему:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \geq 11 \\ a_1 + a_3 \geq 21 \\ a_2 + a_3 \geq 18 \\ b_1 + b_2 \geq 11 \\ b_1 + b_3 \geq 38 \\ b_2 + b_3 \geq 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_1 + a_3 + a_2 + a_3 \geq 11 + 21 + 18 \\ b_1 + b_2 + b_1 + b_3 + b_2 + b_3 \geq 11 + 38 + 16 \end{cases} \Rightarrow$$

Так как $abc = 3^{a_1+a_2+a_3} \cdot 4^{b_1+b_2+b_3}$ тогда

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(a_1 + a_2 + a_3) \geq 50 \\ 2(b_1 + b_2 + b_3) \geq 65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 \geq 25 \\ b_1 + b_2 + b_3 \geq 32,5 \end{cases} \Rightarrow$$

т.к. $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ — целые неотрицательные \Rightarrow

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 \geq 25 \\ b_1 + b_2 + b_3 \geq 33 \end{cases}$$

минимальное значение abc равно $3^{25} \cdot 4^{38}$

$abc \geq 3^{25} \cdot 4^{33}$. По т.к. b_1, b_2, b_3 — целые и неотрицательные, и т.к. $b_1 + b_2 + b_3 \geq 33$, то $b_1 + b_2 + b_3 \geq 38 \Rightarrow abc \geq 3^{25} \cdot 4^{38}$

Пример: $a_1 = 4, a_2 = 4, a_3 = 14, b_1 = 19, b_2 = 0, b_3 = 19$.

Как видно, ~~каждые~~ эти числа удовлетворяют системе (1) и $a_1 + a_2 + a_3 \geq 25$ и $b_1 + b_2 + b_3 \geq 38$, как видно, $a = 3^4 \cdot 4^{19}$; $b = 3^4$; $c = 3^{14} \cdot 4^{19}$ и $abc = 3^{25} \cdot 4^{38}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 продолжение

$$m \leq 10$$

Пример на $m=10$: $a=4$; $b=3$, дробь $\frac{a}{b}$ - несократима

$$\frac{a+b}{a^2-3ab+b^2} \leq \frac{10}{49-8 \cdot 21+9} \leq \frac{10}{58-168} \leq \frac{10}{-110} \Rightarrow \text{числитель}$$

и знаменатель дроби $\frac{a+b}{a^2-3ab+b^2}$ можно сократить

на $m=10$.

↓

Ответ: $m=10$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$ пусть $c:d$, если $|c|:|d|$, числа c и d - целые, $d \neq 0$

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$$

Если и числитель, и знаменатель кратны m , $m \in \mathbb{N}$,

то:

$$\begin{cases} (a+b):m \\ (a^2-8ab+b^2):m. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b):m \\ (a^2+2ab+b^2-10ab):m. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b):m \\ (a+b)^2-10ab):m \\ \text{и т.к. } (a+b):m, \text{ то } (a+b)^2:m. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b):m \\ (-10ab):m \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b):m \\ 10ab:m. \end{cases}$$

Если $\text{НОД}(a, m) = x$, причём $x \neq 1$, то т.к. $(a+b):m$ и $m:x$,

то x - натуральное, то и $a:x$, то $b:x \Rightarrow \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{x} \cdot \frac{10}{x} : \frac{m}{x}$,

x - натуральное, $x \neq 1$. \Rightarrow дробь $\frac{a}{x}$ сократима, что неверно

по условию. \Rightarrow противоречие $\Rightarrow \text{НОД}(a, m) = x$, $x = 1$.

Аналогично $\text{НОД}(b, m) = 1$.

и т.к. $\text{НОД}(a, m) = 1$ и $\text{НОД}(b, m) = 1$ и $(10ab):m$

$$10 \cdot m$$

$$m \leq 10.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



№4. $\triangle XYZ$ - треугольник XYZ .

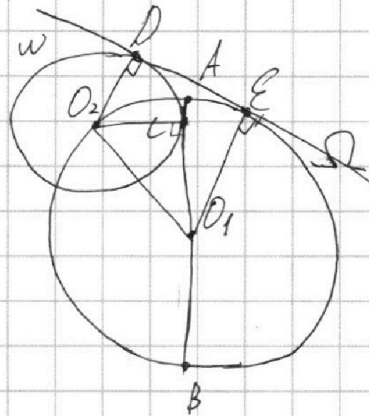
Дано:

Ω, ω ,
центр ω лежит
на Ω , AB - диаметр Ω ,
касается ω в
точке C ;

$AC = 1$, $BC = 16$,
 PE - общая касательная
к ω и Ω в
точке E .

~~$PE \perp \Omega$~~

* PE касается
 ω в точке P ,
 Ω в точке E .



Пусть R -
радиус Ω ,
 r - радиус ω ;
 O_1 - центр Ω ;
 O_2 - центр ω ,
 $O_2 \in \Omega$.

$$\begin{cases} AC = 1 \\ AB = 2R \Rightarrow AB = AC + BC = 2R = 17 \Rightarrow R = 8,5 \\ BC = 16 \end{cases}$$

т.к. AB касается ω в точке C , то $O_2 C \perp AB$.

Тогда, $\triangle O_1 O_2 C$ - прямоугольный, где $O_1 O_2 = R$ - гипотенуза,
 $O_2 C = r$ - катет и $CO_1 \perp O_1 O_2$ - катет.
 $CO_1 = O_1 A - AC = R - 1 = 7,5$.

$$O_2 C^2 + CO_1^2 = O_1 O_2^2 \text{ по Теореме Пифагора}$$

$$O_2 C = \sqrt{O_1 O_2^2 - CO_1^2}$$

$$O_2 C = \sqrt{8,5^2 - 7,5^2}$$

$$O_2 C = \sqrt{16} \Rightarrow O_2 C = 4 \Rightarrow r = 4.$$

Докажем, что если x - длина общей внешней
касательной двух окружностей с радиусами R и r
то и расстоянием между центрами, равным y , равно $\sqrt{y^2 - (R-r)^2}$:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

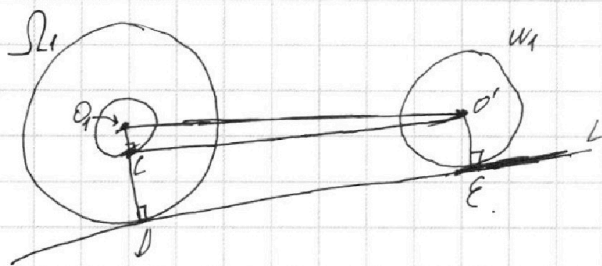
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 продолжение



Ω_1 - радиус R , Ω_2 - радиус r .

Ω_1 - центр O ,
 Ω_2 - центр O'

L - общая касательная

$L \perp \Omega_1 = \{D\}$; $L \perp \Omega_2 = \{E\}$

пусть Ω_2 - окружность с центром O_1 и радиусом $R-r$.

Проведем касательную a из O_1 к Ω_2 так, чтобы a пересекала O_1D . (см. рисунок). Пусть $\Omega_2 \cap a = \{C\} \Rightarrow O_1C = R-r$

Параллельно перенесем a на вектор $\vec{O'E}$. Тогда,

т.к. $|\vec{O'E}| = r$ и $O_1C = R-r$, то прямая a' , полученная

параллельным переносом a из O_1 на вектор $\vec{O'E}$, касается Ω_1 и Ω_2 (это следует из построения общей касательной для двух окружностей, у которых не совпадают центры). Тогда, $O_1C \parallel DE$. Также $DE = O_1C$, и $C \in O_1D$,

таким образом построение общей касательной для двух неконцентрических окружностей.

П.к. $DE \parallel O_1C$ и $DE \perp O_1D$, то $O_1C \perp O_1D$, т.к. $C \in O_1D$.

Тогда треугольник O_1CO_1 - прямоугольный с прямым углом $\angle O_1CO_1$. Тогда, по теореме Пифагора, $O_1C^2 + O_1D^2 = (O_1O_1)^2 \Rightarrow O_1C = \sqrt{(O_1O_1)^2 - O_1D^2}$, т.к. $O_1O_1 = d$ и $O_1D = R-r$, то $O_1C = \sqrt{d^2 - (R-r)^2}$. Это и требовалось доказать.

Тогда, для окружностей Ω и ω из задачи, т.к. они неконцентрические,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 продолжение 2

верно, что $DE = \sqrt{O_1O_2^2 - (R-r)^2}$.

Т.к. $R=8,5$, $r=1$, а $O_1O_2=R$, то $DE = \sqrt{8,5^2 - (8,5-1)^2}$

$$DE = \sqrt{8,5^2 - 7,5^2}$$

$$DE = \sqrt{10}$$

$$\text{B} DE = \sqrt{10}$$

$$DE = \text{B} 4$$

Ответ: 4.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 продолжение

если $y = -\frac{z}{4}$:

$$\frac{2yz}{-yz-6y^2} = \frac{-2 \cdot \frac{z^2}{4}}{\frac{z^2}{4} - 6 \cdot \frac{z^2}{16}} = \frac{-\frac{z^2}{2}}{\frac{z^2}{4} - \frac{3z^2}{8}} = \frac{-\frac{z^2}{2}}{\frac{2z^2}{8} - \frac{3z^2}{8}} = \frac{-\frac{z^2}{2}}{\frac{-z^2}{8}} = 4$$

$$= +\frac{8}{2} = 4$$

м.к. $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{2yz}{-yz - 6y^2}$ но (3) $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = 4$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = 4$$

$$3x^2 - 4y^2 - z^2 = 4(x^2 - 6y^2)$$

$$3x^2 - 4y^2 - z^2 = 4x^2 - 24y^2$$

$$-x^2 - 4y^2 - z^2 = -24y^2$$

$$-x^2 - z^2 = -20y^2$$

$$x^2 + z^2 = 20y^2$$

Очевидно тогда, что наибольшим возможным значением выражения $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$ является 4.

Пример: $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=4 \end{cases}$

Тогда $3x+2y=z$, м.к. $3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 6 - 2 = 4$ м.е. $3x+2y=z$.

Получим, $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{z}{2}$ $\frac{3}{x} = \frac{3}{2}; \frac{2}{y} = -1; \frac{z}{2} = \frac{4}{2}$. Для этого выполняется равенство $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{z}{2}$ (м.к. $\frac{3}{2} + (-1) = \frac{1}{2}$).

Этот пример $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=4 \end{cases}$ $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3 \cdot 2^2 - 4 \cdot (-1)^2 - 4^2}{2^2 - 6 \cdot (-1)^2} = \frac{12 - 4 - 16}{4 - 6} = \frac{-8}{-2} = 4$

$= \frac{12 - 20}{4 - 6} = \frac{-8}{-2} = 4$, \Rightarrow пример верен, м.к. числа 2, -1, 4 - ненулевые действительные, равенства $3x+2y=z$ и $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{z}{2}$ выполняются. Ответ: 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5.

$3x + 2y = z$ (1) и $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$ (2) Обозначим: $a \stackrel{\text{no (1)}}{=} z$ - означает, что $a = z$ по утверждению (1).

$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{2}{z} - \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{2y - z}{yz}$
 $\Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{-z}{yz} \Rightarrow -x^2 = yz$ (3)

$3x + 2y = z \Rightarrow 3x = z - 2y$

из (1): $x = \frac{z - 2y}{3} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{z - 2y}{3}\right)^2$ (4)

~~из (3) и (4):~~

из (3) и (4): $-\left(\frac{z - 2y}{3}\right)^2 = yz$

$-\frac{(4y^2 + z^2 - 4yz)}{9} = yz$

$-4y^2 - z^2 + 4yz = 9yz$

$-4y^2 - z^2 = 5yz$ (5)

$4y^2 + z^2 + 5yz = 0$

$(4y + z)(y + z) = 0$

$\begin{cases} y = -z \\ y = -\frac{z}{4} \end{cases}$ (6)

$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} \stackrel{\text{no (5) и (6)}}{=} \frac{-3yz + 5yz}{x^2 - 6y^2} \stackrel{\text{no (3)}}{=} \frac{2yz}{-yz - 6y^2}$ (7)

по (6) $\begin{cases} y = -z \\ y = -\frac{z}{4} \end{cases}$

если $y = -z$:

$\frac{2yz}{-yz - 6y^2} \stackrel{\text{no (6)}}{=} \frac{-2y^2}{y^2 - 6y^2} = \frac{-2}{1 - 6} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5} = 0,4$

т.к. $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} \stackrel{\text{no (6)}}{=} \frac{2yz}{-yz - 6y^2}$ по (7), то $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = 0,4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 продолжение

$$\begin{aligned} \text{из (8) и (6):} \quad & \begin{cases} v_1 v_2 = 540 \\ v_1 + v_2 = 48 \end{cases} \\ & \begin{cases} v_1 = 48 - v_2 \\ (48 - v_2) v_2 = 540 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 48 - v_2 \\ -v_2^2 + 48v_2 - 540 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 48 - v_2 \\ v_2^2 - 48v_2 + 540 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 48 - v_2 \\ v_2^2 - 48v_2 + 540 = 0 \end{cases}$$

решим уравнение $v_2^2 - 48v_2 + 540 = 0$ (Δ -дискриминант)

$$\Delta = 48^2 - 540 \cdot 4 = 2304 - 2160 = 144 = 12^2$$

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{12 + 48}{2} \\ v_2 &= \frac{-12 + 48}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} v_2 = \frac{12 + 48}{2} \\ v_2 = \frac{-12 + 48}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 = 30 \\ v_2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} v_2 = 30 \\ v_1 = 48 - v_2 \\ v_2 = 18 \\ v_1 = 48 - v_2 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} v_2 = 30 \\ v_1 = 18 \end{cases} \\ \begin{cases} v_2 = 18 \\ v_1 = 30 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Плюс как мотоциклист изначально примет равные скорости, а стартовал от двигателя, но $v_1 > v_2$

$$\begin{cases} v_1 = 30 \\ v_2 = 18 \end{cases}$$

$$\text{по (5), } 2 = S \cdot \frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2} \Rightarrow S = \frac{2 v_1 v_2}{v_1 - v_2} \text{ км} \Rightarrow S = \frac{2 \cdot 30 \cdot 18}{30 - 18} \text{ км} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{2 \cdot 540 \text{ км}}{18} \Rightarrow S = \frac{540 \text{ км}}{6} \Rightarrow S = \frac{270}{3} \text{ км} \Rightarrow S = 90 \text{ км.}$$

Ответ: 90 км.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

р. - час, км/ч - километр в час; км. - километр.
 №. Пусть S км. - путь из А в В, V_1 км/ч - скорость

мотоциклиста, V_2 км/ч - скорость велосипедиста. (зна-
 чимые)

Тогда мотоциклист ехал $\frac{S}{V_1}$ часов, а велосипедист - $\frac{S}{V_2}$.

Тогда, по условию, $\frac{S}{V_1} = \frac{S}{V_2} - 2$ (всё в часах)

Если мотоциклист ехал бы время, за которое велосипедист проехал весь путь S , то мотоциклист проехал бы $\frac{S}{V_2} \cdot V_1$ км. Если бы велосипедист ехал время, затраченное мотоциклистом на путь S , то велосипедист бы проехал бы $\frac{S}{V_1} \cdot V_2$ км. Тогда, по условию, $\frac{S}{V_1} \cdot V_2 + 96 = \frac{S}{V_2} \cdot V_1$ (всё км.)

Если бы каждый увеличил скорость на 6 км/ч, то мотоциклист бы ехал $\frac{S}{V_1+6}$ часов, а велосипедист - $\frac{S}{V_2+6}$ ч. По условию, $\frac{S}{V_1+6} = \frac{S}{V_2+6} - 1,25$ (всё в ч.).

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{S}{V_1} = \frac{S}{V_2} - 2 & (1) \\ \frac{S}{V_1+6} = \frac{S}{V_2+6} - 1,25 & (2) \\ \frac{S}{V_2} \cdot V_1 = \frac{S}{V_1} \cdot V_2 + 96. & (3) \end{cases}$$

из (3) следует, что $96 = S \cdot \frac{V_1^2 - V_2^2}{V_1 V_2}$ (4)

из (1) следует, что $2 = S \cdot \frac{V_1 - V_2}{V_1 V_2}$ (5)

из (4) и (5) следует, что $V_1 + V_2 = 48$. (м.к. $S \cdot \frac{V_1^2 - V_2^2}{V_1 V_2} = S \cdot \frac{(V_1 + V_2)(V_1 - V_2)}{V_1 V_2}$) (6)

из (2) следует, что $1,25 = \frac{S}{V_2+6} - \frac{S}{V_1+6}$, м.к. $S \cdot \frac{V_1 - V_2}{(V_2+6)(V_1+6)} = 1,25$. (7)

из (5) и (7) следует, что $S \cdot \frac{V_1 - V_2}{V_1 V_2} = \left(\frac{V_1 V_2}{(V_1+6)(V_2+6)} \right)^{-1} \cdot \frac{2}{1,25} = \frac{2}{\frac{5}{4}} = \frac{8}{5} = \frac{16}{5}$

$$\left(\frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{(V_1+6)(V_2+6)} \right)^{-1} = 1,6 \Rightarrow \frac{(V_1+6)(V_2+6)}{V_1 V_2} = 1,6 \cdot \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{V_1 V_2 + 6(V_1+V_2) + 36}{V_1 V_2} = \frac{5}{8} \cdot 1,6 \Rightarrow$$

м.к. $V_1+V_2=48$
 $\Rightarrow \frac{V_1 V_2}{V_1+V_2} + \frac{6 \cdot 48 + 36}{V_1 V_2} = \frac{5}{8} \cdot 1,6 \Rightarrow 1 + \frac{324}{V_1 V_2} = 1,6 \Rightarrow \frac{324}{V_1 V_2} = 0,6 \Rightarrow \frac{V_1 V_2}{324} = \frac{5}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_1 V_2 = \frac{324 \cdot 5}{3} \Rightarrow V_1 V_2 = 108 \cdot 5 \Rightarrow V_1 V_2 = 540. \quad (8)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7 продолжение

Поскольку $BF = BE$ (см. выше обоснование), то $\triangle BFE$ — равнобедренный с основанием FE . П.к. $\angle FBE = \angle CAB = 90^\circ$, то $\angle BFE = \angle BEF = 45^\circ$ — по сумме углов $\triangle BFE$.

$$\begin{cases} \angle BFE = 45^\circ \\ \angle CFY = 45^\circ \text{ (см. выше обоснование)} \end{cases} \Rightarrow \angle EFY = 90^\circ, \text{ п.к.}$$

Угол $\angle BFE$, $\angle CFY$, $\angle EFY$ в сумме дают 180° .

$\angle EFY = \angle EFY$, п.к. $Y \in FY$. ~~К.к. $Y \in FY$, п.к.~~

~~П.к. X, Y, F лежат на одной прямой.~~

$$\angle EFY = 90^\circ \text{ (п.к. } \angle EFY = \angle EFX = 90^\circ)$$

п.к. точки E, F, X — лежат на w , то $\angle EFY$ опирается на диаметр $w \Rightarrow EX$ — диаметр w .

и $\angle EDX = 90^\circ$, п.к. точка D тоже лежит на w

$$\angle XPY = 90^\circ, \text{ как угол, смежный с } \angle EPX = 90^\circ.$$

п.к. $\angle EPX = 90^\circ$ и $\angle XPY = 90^\circ$, то $\triangle EPD$ — п/у с $\angle EPD = 90^\circ$ и $\triangle XPY$ — п/у с $\angle XPY = 90^\circ$.

по теореме Пифагора

$$\begin{cases} EX^2 = ED^2 + XD^2 \\ XY^2 = PY^2 + XD^2 \end{cases}$$

п.к. $EX = 2\sqrt{2}XY$

$$\begin{cases} EX^2 = 8XY^2 \\ XY^2 = PY^2 + XD^2 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7. $\triangle ABC$ - равнобедренный $\triangle ABC$; $\triangle ABC$ - равнобедренный
 $\triangle ABC$ - равнобедренный.

Дано: $\triangle ABC$;

ω - вписанная

окружность $\triangle ABC$;

$\omega \cap AC = D$; $\omega \cap AB = E$;

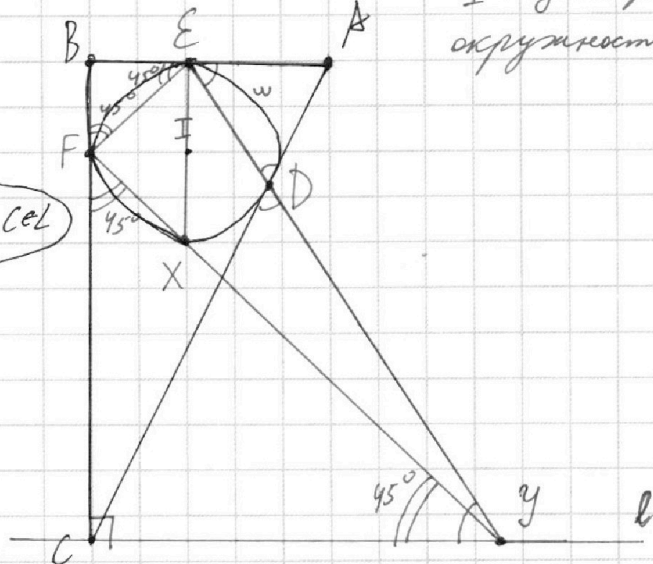
$\omega \cap BC = F$; $l \perp BC$ в точке Y ; $l \perp BC$, $CE \perp l$;

лучи ED пересекают l

в точке Z ; $FZ \cap \omega = \{F, X\}$;

$EX = 2\sqrt{2} XZ$

$AD/DC = ?$



I - центр
окружности ω

Заметим, что т.к. отрезки касательных из
 одной точки к одной окружности, равны, то
 $AE = AD$, $BE = BF$ и $CF = CD$.

Тогда $\triangle AED$ - $\triangle AED$ - $\triangle AED$ с основанием ED , $\triangle BEF$ - $\triangle BEF$ с осно-
 ванием EF и $\triangle FDC$ - $\triangle FDC$ с основанием FD .

Тогда, углы $\angle AED$ и $\angle ADE$ равны ($\angle AED = \angle ADE$).

Так как $l \perp BC$, т.е. $YC \perp BC$, то $YC \parallel AB \Rightarrow \angle CYD = \angle AED$.

т.к. $\angle AED = \angle ADE$, и $\angle ADE = \angle CBZ$ (как вертикальные
 углы), то $\angle AED = \angle ADE = \angle CYD = \angle ZDC \Rightarrow \triangle CDZ$ - $\triangle CDZ$ - $\triangle CDZ$ с основа-
 нием $DZ \Rightarrow CZ = CD$

т.к. $CF = CD$ (см. выше, почему) и $CZ = CD$, то $CF = CZ \Rightarrow \triangle FCZ$ - $\triangle FCZ$ - $\triangle FCZ$
 с основанием $FZ \Rightarrow$ т.к. $\angle FCZ = 90^\circ$ (т.к. $CZ \perp BC$), то $\angle CFZ = \angle CZF = 45^\circ$,
 по сумме углов $\triangle FCZ$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 продолжение 2.

↓ м.к. $EX = 2\sqrt{2}XY$

$$\begin{cases} 8XY^2 = EP^2 + XD^2 \\ XY^2 = DY^2 + XD^2 \end{cases}$$

$$(EP^2 + XD^2) - (DY^2 + XD^2) = 7XY^2$$

$$EP^2 - DY^2 = 7XY^2$$

Заметим, что $\triangle EDA \sim \triangle DYC$ (по $\angle AED = \angle DYC$ и $\angle EDA = \angle YDC$).
⇓ м.к. $CD = CY$ и $EA = AD$.

$$\frac{AD}{CD} = \frac{EP}{DY}$$



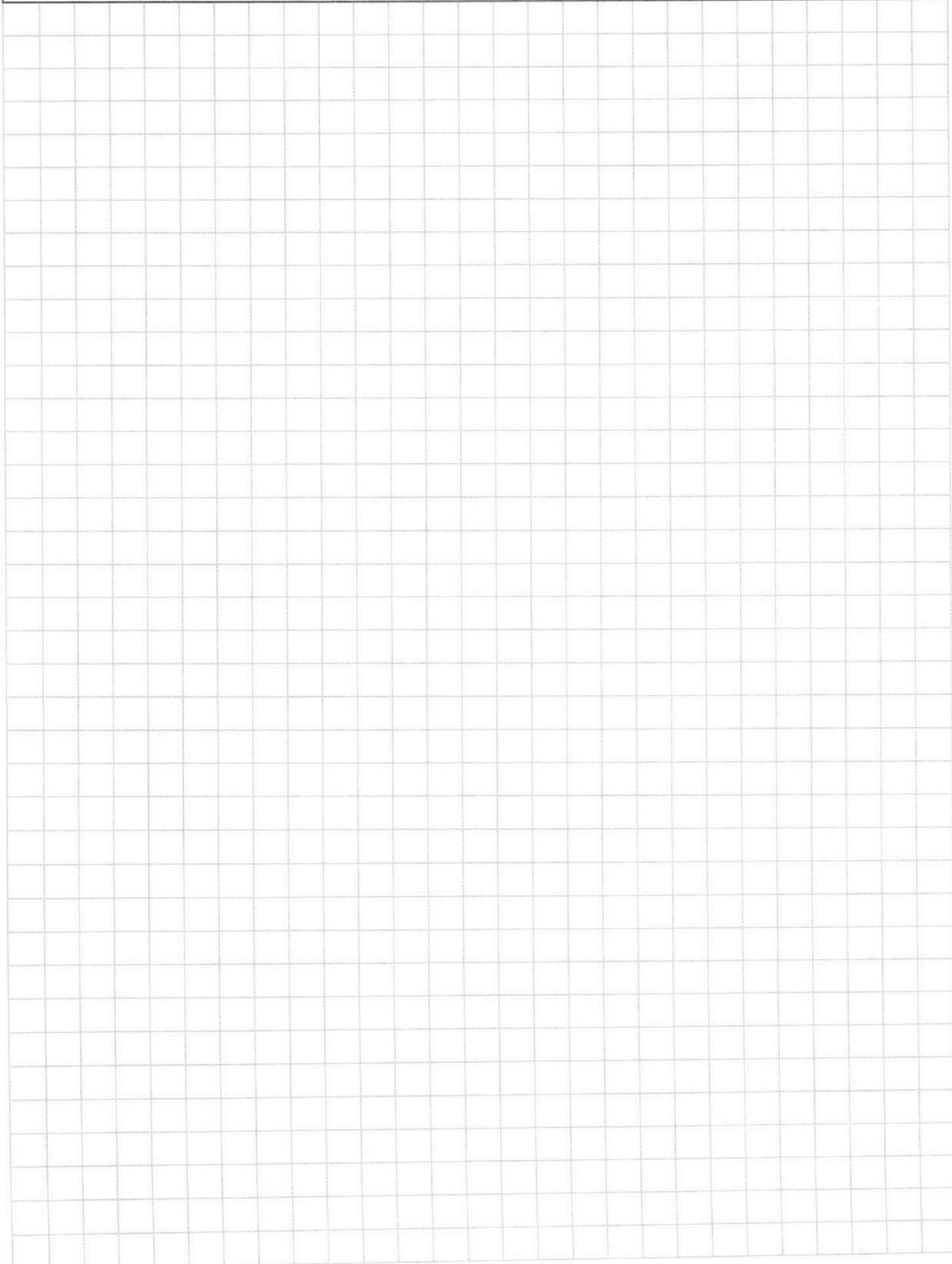
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 ^{Черновик.}

$$ab : (3^{11} \cdot 4^{11}); \quad bc : 3^{18} \cdot 4^{16}; \quad ac : 3^{21} \cdot 4^{38}$$

Очевидно, что если какие-то из чисел a, b, c кратны каким-то простым числам, ^{кроме 3 и 4,} то можно число, делящееся на простое число, разделить на это простое число столько раз,

$$a = 3^{a_1} \cdot 4^{b_1}$$

$$b = 3^{a_2} \cdot 4^{b_2}$$

$$c = 3^{a_3} \cdot 4^{b_3}$$

25	33
8 4	4 4
16 4	8 4
32 16	16 8

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \geq 11 \\ b_1 + b_2 \geq 11 \\ b_2 + b_3 \geq 16 \\ a_2 + a_3 \geq 18 \\ a_1 + a_3 \geq 21 \\ b_1 + b_3 \geq 38 \end{cases}$$

$$abc = 3^{a_1 + a_2 + a_3} \cdot 4^{b_1 + b_2 + b_3}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 \geq (11 + 18 + 21)/3 = 7 + 6 + 3 \frac{2}{3} = 16 \frac{2}{3}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 \geq (11 + 16 + 38)/3 = (27 + 38)/3 = 65/3 = 32 \frac{2}{3}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 \geq 17$$

$$b_1 + b_2 + b_3 \geq 33$$

Пример верен решать!

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик.

№5

$$3x + 2y = z$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{2}{z} - \frac{1}{y} = \frac{2y - z}{yz}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{-3x}{yz} \Rightarrow -x^2 = yz \Rightarrow y \text{ и } z \text{ — разная по знаку}$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3(x^2 - 6y^2) + 14y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = 3 + \frac{14y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$$

Если $z > 0$, $y < 0$.

$$3x + 2y > 0, \quad x > 0.$$

$$-(2y - z)^2 = 4yz$$

$$\frac{2y}{z} + \frac{3x}{z} = \frac{2y}{z} + \frac{3x}{z}$$

$$\frac{3y + x}{xy} = \frac{2}{z}$$

$$3y + x = \frac{2}{z} \cdot xy$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} > 0$$

$$\frac{3y + x}{xy} > 0$$

$$\begin{cases} 3y + x < 0 \\ 3x + 2y > 0 \end{cases}$$

$$y = -\frac{z}{4}$$

$$-x^2 = yz = -\frac{z^2}{4}$$

$$-x^2 = \frac{-z^2}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{z^2}{4}$$

пусть $z = 4$, тогда $y = -1$.

$$3x + z = 4 \Rightarrow 3x + 4 = 4 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{3 \cdot 4 - 4 - 16}{4 - 6} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$\frac{3x - z}{2} = \frac{xz}{2x - 3z}$$

$$x = \frac{z - 2y}{3}$$

$$-\left(\frac{z - 2y}{3}\right)^2 = yz$$

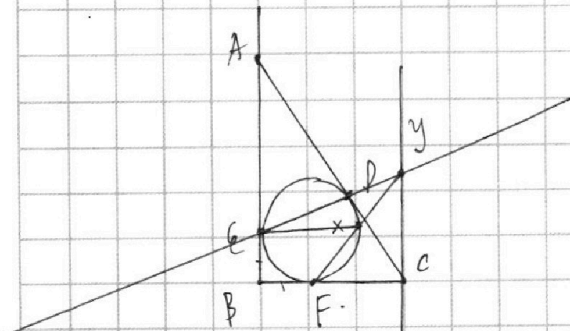
$$-4y^2 - z^2 + 4yz = 9yz$$

$$-4y^2 - z^2 = 5yz$$

$$-(2y + z)^2 = yz$$

$$4y^2 + 5yz + z^2 = 0$$

$$(4y + z)(y + z) = 0 \Rightarrow \text{либо } y = -z, \text{ либо } y = -\frac{z}{4}$$



$$\frac{2yz}{x^2 - 6y^2} = \frac{2yz}{(x - 3y)(x + 3y)} = \frac{2yz \cdot 2}{(x - 3y) \cdot 2xy} = \frac{2z^2}{(x - 3y)2x} = \frac{z^2}{x(x - 3y)}$$

$$-3yz + 6yz = 2yz$$

~~$$\frac{2yz}{x^2 - 6y^2}$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

~~2x^2 - 2x + 7 - 2\sqrt{\dots} = 16x^2~~
 $3x + 2y = z$

$\sqrt{2}$

$\frac{a}{b}$ - несократима, т.е. $(a, b) = 1$.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 48 \\ \times 48 \\ \hline 1440 \\ + 384 \\ \hline 182 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2}$$

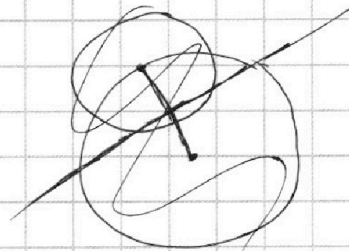
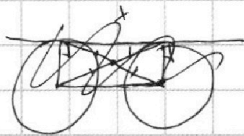
$$a+b : m$$

$$(a-b)^2 + 6ab : m$$

$$\frac{R^2 - r^2}{2}$$

$$a+b : m$$

$$(a+b)^2 - 10ab : m$$



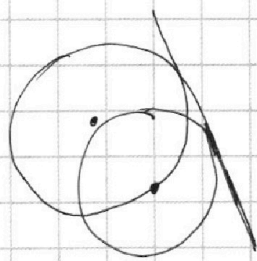
$$\begin{cases} 10ab : m \\ a+b : m \end{cases}$$

$$a : m \text{ и } b : m$$

$$a^2 - b^2$$

если $(a, m) = x$, то $a = x \cdot a'$ и $x \neq 1$, то $b = x \cdot b'$, это проблема

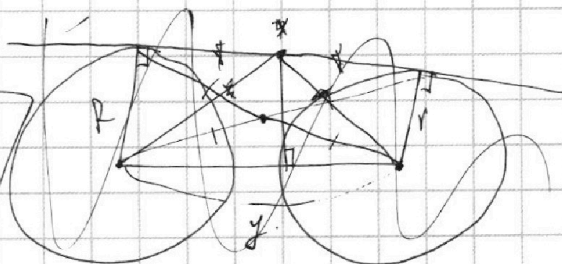
$$\begin{cases} (a', m) = 1 \\ (b', m) = 1 \end{cases}$$



$$10 : m$$

$$m \leq 10$$

$$48^2 - 540 \cdot 4 = 2304 - 2160 = 144 = 12^2$$



$$S = x \cdot \frac{a+b}{2}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 6 \\ \hline 288 \end{array}$$

$$288 + 36^2 = 288 + 1296 = 1584$$

Пример: $a = 7, b = 3$

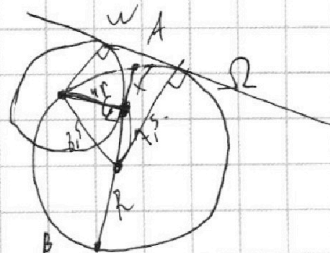
$$S =$$

$$\frac{10}{49 + 9 - 8 \cdot 21} \leq \frac{10}{58 - 168} \leq \frac{10}{-110}$$

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 215 \\ - 160 \cdot 85 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$\frac{324}{5} = 64.8$$

№3.



$$2R - x = 16$$

$$x = 1$$

$$R = 8.5$$

$$r = \sqrt{8.5^2 - 4.5^2}$$

$$r = \sqrt{1.16}$$

$$r = 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4 черновик.

$$3x + 2y = z.$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{z}{z}.$$

$$\frac{3}{x} = \frac{z}{z} - \frac{1}{y}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{zy - z}{yz}.$$

$$\frac{3}{x} = \frac{-zx}{yz}.$$

$$-x^2 = yz.$$

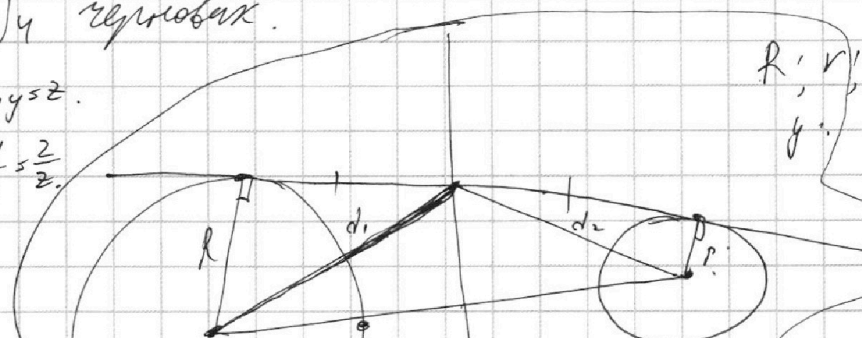
$$2\sqrt{R^2 + d_1^2}$$

$$(d_1^2 - R^2)(d_2^2 - R^2)$$

$$(d_1^2 - R^2) /$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} \neq \neq$$

$$\sqrt{y^2 - (R+r)^2}$$



м. $\sqrt{1}$ и $\sqrt{2}$ в км/ч.

$$\frac{S}{\sqrt{1}} = \frac{S}{\sqrt{2}} - z.$$

$$\frac{S}{\sqrt{1}} \cdot \sqrt{2} + 36 = \frac{S}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1}$$

$$\frac{S}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{2}} = \frac{S}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} - 1,25$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} S + 36 = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} S.$$

$$36 = S \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{\sqrt{1}\sqrt{2}} \right).$$

$$z = \frac{S}{\sqrt{2}} - \frac{S}{\sqrt{1}}$$

$$z = S \cdot \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{\sqrt{1}\sqrt{2}}$$

$$48 = \frac{S}{\sqrt{1}\sqrt{2}}$$

$$R^2 - d_1^2 = r^2 - d_2^2$$

$$-R^2 + d_1^2 = r^2 - d_2^2$$

$$R^2 - r^2 = d_1^2 - d_2^2$$

$$d_1^2 - R^2 = d_2^2 - r^2 \quad 1,25 =$$

$$d_1^2 - d_2^2 = R^2 - r^2$$

