



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1.

Т.к. $ac : 7^{39}$, то $abc : 7^{35}$ ~~и~~ abc

Обозначим за a_2, b_2, c_2 степени вхождения 2
в a, b и c соответственно. Тогда $ab : 2^{15} \Rightarrow a_2 + b_2 \geq 15$
 $bc : 2^{17} \Rightarrow b_2 + c_2 \geq 17$; $ac : 2^{23} \Rightarrow a_2 + c_2 \geq 23$

Произведение чисел делится на множитель в степени суммы
вхождений этого множителя в ^{числа} множители произведения $\Rightarrow$
 $\Rightarrow abc : 2^{a_2+b_2+c_2}$

Сложим 3 пер-ва, полученные выше: $2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 55$

Т.к. числа натуральные, степень вхождения тоже натуральная
или 0 $\Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 28 \Rightarrow abc : 2^{28}$

$$\begin{aligned} abc : 7^{39} & \Rightarrow abc : 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39} \\ abc : 2^{28} & \end{aligned}$$

т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$

7 и 2 взаимно просты

Приведем пример где $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$: $a = 2^{10} \cdot 7^{11}$
 $b = 2^5 \cdot 7^{13}$
 $c = 2^{13} \cdot 7^{15}$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{24} : 2^{15} \cdot 7^{24}$$

$$\Rightarrow bc = 2^{18} \cdot 7^{28} : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2. ~~а~~

$\frac{a}{b}$ - несократима $\Rightarrow \text{НОД}(a; b) = 1$

Сократить можно на $\text{НОД}(a+b; a^2-7ab+b^2) \Rightarrow$ по алгоритму Евклида $\text{НОД}(a+b; a^2-7ab+b^2) = \text{НОД}(a+b; a^2-7ab+b^2 - a(a+b)(a-b))$

$$= \text{НОД}(a+b; 9b^2)$$

$$\text{Т.к. } \text{НОД}(a; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; 9b^2) = \text{НОД}(a+b; 9) \leq 9$$

Приведём пример для $m=9$: $a=4$; $b=5$

$$\frac{4+5}{16-140+25} = -\frac{9}{99} = -\frac{1}{11}$$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

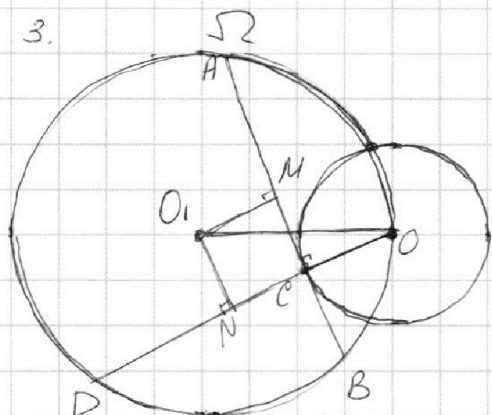
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.



Пусть $AC = 17x \Rightarrow CB = 7x$

т.к. AB - касательная $\Rightarrow OC \perp AB$

М-середина $AB \Rightarrow OM \perp AB$

$$MB = 12x \Rightarrow MC = 6x$$

D - пересечение осей и Π

M -середина $OD \Rightarrow OM \perp OD$

$$CO \cdot CD = AC \cdot BC$$
$$7 \cdot 012 = 17x \cdot 7x$$
$$CD = 17x^2$$

$$ON = \frac{17x^2 + 7}{2}$$

$QN \perp OD \Rightarrow QN \parallel MC$, аналогично $OM \parallel NC \Rightarrow OMNC$ - параллелограмм $\Rightarrow$

$$\Rightarrow O, N = MC = 5x$$

В $\triangle O_1ON$ по т. Пифагора:

$$O_1 N^2 + NO^2 = O_1 O^2$$

$$25x^2 + \left(\frac{12x^2 + 7}{2}\right)^2 = 13^2$$

$$100x^2 + 289x^4 + 2 \cdot 7 \cdot 17x^2 + 49 - 169 \cdot 4 = 0$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$(x^2 - 1)(289x^2 + 627) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -\frac{627}{289} < 0 \end{cases} \quad x^2 > 0 \text{ противоречие}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \quad \text{für } x - \text{grün} \Rightarrow > 0$$

$$x = 1$$

$$AB = 24(17+7)x = 24x = 24$$

0+bet: 24



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4.

Сделаем замену: $A = 3x^2 + 3x + 1$, $B = 1 - 9x$, тогда:

ОДЗ: $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$3(x-1)^2 - 1 \geq 0$$

$$(x-1)^2 \geq \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x-1 \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x-1 \leq -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 3 = -3 < 0$$

$$3 > 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3x + 1 > 0$$

$$\sqrt{A+B} - \sqrt{A} = B \quad | \cdot (\sqrt{A+B} + \sqrt{A})$$

$$B = B(\sqrt{A+B} + \sqrt{A})$$

$$B(1 - \sqrt{A+B} - \sqrt{A}) = 0$$

$$[B = 0 \Rightarrow 1 - 9x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9}]$$

$$[\sqrt{A+B} + \sqrt{A} = 1]$$

$$\sqrt{A+B} + \sqrt{A} = 1 \quad 1 > 0$$

$$A+B+A+2\sqrt{A(A+B)} = 1$$

$$2\sqrt{A^2+AB} = 1-A-B \quad 1-2A-B \geq 0$$

$$4(A^2+AB) = 1-4A^2+B^2-4A-2B+4AB \quad 1-6x^2-6x-2-1+12x$$

$$1+B^2-4A-2B=0$$

$$-6x^2+12x-2 \geq 0$$

$$-6(x-1)^2+4 \geq 0$$

$$4 \geq 6(x-1)^2$$

$$2 \geq 3(x-1)^2$$

$$\frac{2}{3} \geq (x-1)^2$$

$$-\frac{\sqrt{6}}{3} \leq x-1 \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$1-\frac{\sqrt{6}}{3} \leq x \leq 1+\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Обратная замена переменных:

$$1 + 1 - 18x + 81x^2 - 12x^2 - 12x - 4 - 2 + 18x = 0$$

$$81x^2 - 12x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 69 \cdot 4 =$$

$$= 144 + 1104 = 1248$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{1248}}{2 \cdot 69}$$

$$\frac{12 + \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} \vee 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$12 + \sqrt{1248} \vee 2 \cdot 69 + 2 \cdot 23\sqrt{3}$$

$$12 + 4\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 13} \vee 2 \cdot 69 + 2 \cdot 23\sqrt{3}$$

$$6 + 2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 13} \vee 69 + 23\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 13} - 23\sqrt{3} \vee 63$$

$$4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13 + 23 \cdot 23 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 23 \cdot \sqrt{2 \cdot 13} \vee 63^2$$

$$4 \cdot 2 \cdot 13 + 23 \cdot 23 - 4 \cdot 23 \sqrt{2 \cdot 13} \vee 3 \cdot 21 \cdot 21$$

$$104 + 529 - 1323 < 0 < 4 \cdot 23 \sqrt{2 \cdot 13}$$

$$\frac{12 + \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} \vee 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$12 + 4\sqrt{78} \vee 2 \cdot 69 - 2 \cdot 23\sqrt{6}$$

$$2\sqrt{78} + 23\sqrt{6} \vee 63$$

$$4 \cdot 78 + 23^2 \cdot 6 + 2 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 6 \cdot \sqrt{13} \vee 63^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение 4

$$4 \cdot 26 + 23^2 \cdot 2 + 4 \cdot 23 \cdot 2\sqrt{13} \sqrt{3 \cdot 21^2}$$

$$104 + 1058 - 1323 \sqrt{-4 \cdot 23 \cdot 2\sqrt{13}}$$

$$-161 \sqrt{-4 \cdot 23 \cdot 2\sqrt{13}}$$

$$8 \cdot 23\sqrt{13} \sqrt{161}$$

$$8\sqrt{13} \sqrt{7}$$

$$\sqrt{13} > 1 \Rightarrow 8\sqrt{13} > 8 > 7 \Rightarrow \frac{12 + \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} > 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$12 + 24 \cdot \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$6 + 2\sqrt{78} \sqrt{69 - 23\sqrt{3}}$$

$$2\sqrt{78} + 23\sqrt{3} \sqrt{63}$$

$$2\sqrt{26} + 23 \sqrt{21\sqrt{3}}$$

$$4 \cdot 26 + 23^2 + 4 \cdot 23\sqrt{26} \sqrt{21 \cdot 3}$$

$$104 + 529 - 1323 \sqrt{-4 \cdot 23\sqrt{26}}$$

$$4 \cdot 23\sqrt{26} \sqrt{690}$$

$$46\sqrt{26} \sqrt{345}$$

$$46 \cdot 46 \cdot 26 \sqrt{345 \cdot 345} \Rightarrow \frac{12 + \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$55016 < 119025$$

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$6 - 2\sqrt{78} \sqrt{69 - 23\sqrt{6}}$$

$$23\sqrt{6} - 2\sqrt{78} \sqrt{63}$$

$$23 \cdot 23 \cdot 6 + 2 \cdot 2 \cdot 78 - 2 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 6\sqrt{13} \sqrt{63 \cdot 63}$$

$$2 \cdot 23 \cdot 23 + 8 \cdot 13 - 8 \cdot 23\sqrt{13} \sqrt{21 \cdot 21 \cdot 3}$$

$$1058 + 104 - 1323 \sqrt{0} < 0 < 8 \cdot 23\sqrt{13} \Rightarrow \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ не подходит

Ответ: $\left\{ \frac{1}{9}; \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

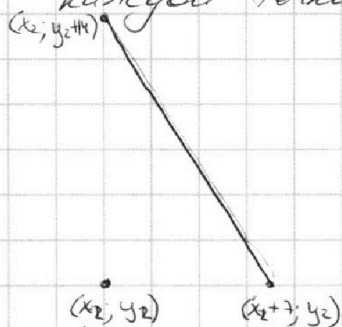
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

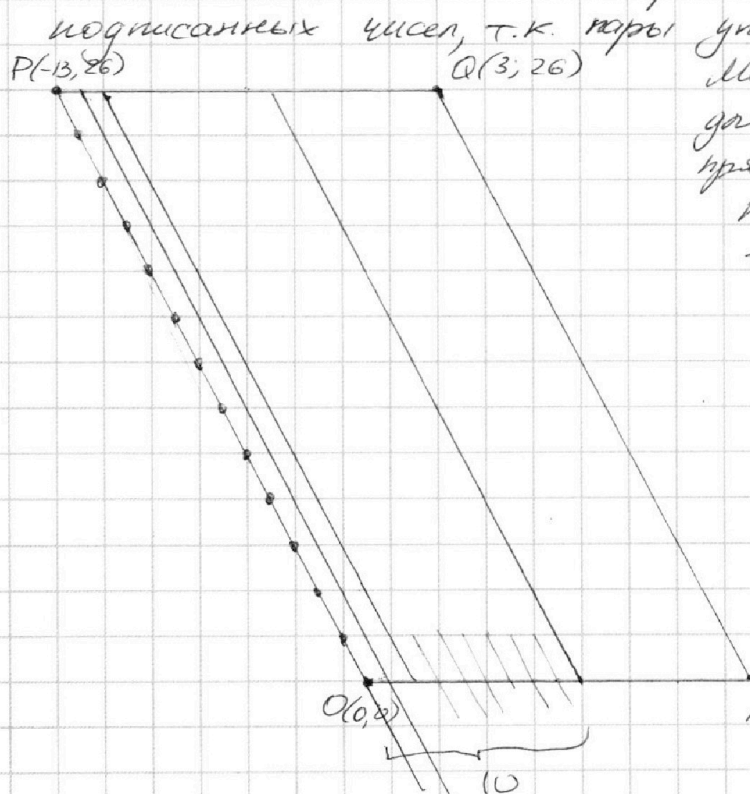


5.

Условие $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ при подстановке конкретных x_2 и y_2 даёт уравнение прямой. Также из этого можно заметить, что пары упорядочены и для каждой точки прямая располагается одинаково.



Нарисуем параллелограмм из условия с коэффициентом стороны, клеточный равной 2 ед. отрезкам и для каждой точки поднимем количество целочисленных точек, лежащих внутри или на границе параллелограмма, также лежащих на прямой. Тогда количество пар точек будет сумма всех подписанных чисел, т.к. пары упорядочены.



Можно заметить, что для точек лежащих на прямой, параллельной парной будет одинаковое кол-во точек, будем считать по прямой.

Наклон прямой равен наклону боковых граней ребер сторон 4-угольника.

На каждой прямой 14 целочисленных точек, значит прямых, для которых парная прямая

проходит через параллелограмм 10 штук, значит всего пар $10 \cdot 14 \cdot 14 = 1960$
 Ответ: 1960



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

Второе неравенство не зависит от a и b , найдём графически его область решений:

(x^2+y^2-1) - окружность с центром в $(0;0)$ и радиусом 1.

$(x^2+(y-12)^2-16)$ - окружность с центром $(0;12)$ и радиусом 4.

Каждая скобка меньше или равна 0 внутри или на границе окружности, а т.к. окружности не пересекаются ($12 > 1+4$), то решением неравенства будут области внутри окружностей и их граница.

Первое уравнение это уравнение прямой. Т.к. надо 2 решения, то прямая и 2 круга имеют 2 общие точки, такое может быть только при общих касательных, их всего 4.

Из простых соотношений можно найти точки пересечения оси Oy с касательными, т.к. картинка симметрична отн-во Oy .

$$\text{Подобие } \Delta \Rightarrow \frac{k}{1} = \frac{k+12}{4} \Rightarrow k=4 \Rightarrow A(0; -4)$$

$$BH - \text{высота прямоугольного } \Delta \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по т. Пифагора

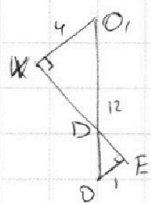
$$OH = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16-15}{16}} = \frac{1}{4} \Rightarrow B\left(\frac{\sqrt{15}}{4}; -\frac{1}{4}\right)$$

$$\text{и } C\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}; -\frac{1}{4}\right)$$

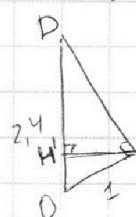
$$\begin{cases} a \cdot 0 - 4 - 8b = 0 \Rightarrow b = -0,5 \\ a \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{4} + 4 = 0 \Rightarrow a \sqrt{15} = -15 \\ a = -\sqrt{15} \end{cases}$$

для A и C : $a = -\sqrt{15}$; $b = -0,5$

Аналогично для внутренних общих касательных:



$$\frac{O_1D}{DO} = \frac{4}{1} \Rightarrow D(0; 2,4)$$



$$\begin{aligned} DE &= \sqrt{4^2 - 1} = 2\sqrt{15} \Rightarrow \\ &\Rightarrow EH' = \frac{2\sqrt{15}}{2} = \sqrt{15} = \frac{2,4}{1,2} = \frac{\sqrt{15}}{12} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение В

$$OH' = \sqrt{OE^2 - H'E^2} = \sqrt{1 - \frac{119}{144}} = \frac{5}{12} \Rightarrow E\left(-\frac{\sqrt{119}}{12}, \frac{5}{12}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F\left(-\frac{\sqrt{119}}{12}, \frac{5}{12}\right)$$

гм Е и D:

$$\begin{cases} a \cdot 0 + 2,4 - 8b = 0 \Rightarrow b = 0,3 \\ a \frac{\sqrt{119}}{12} + \frac{5}{12} - 2,4 = 0 \Rightarrow a = \end{cases}$$

$$a\sqrt{119} + 5 - 28,8 = 0$$

$$a\sqrt{119} = 23,8$$

$$a = 0,2\sqrt{119}$$

гм F и D: $a = -0,2\sqrt{119}$

скажи

$$0 + \text{вет. } \{0,2\sqrt{119}; -0,2\sqrt{119}; \sqrt{15}; -\sqrt{15}\}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

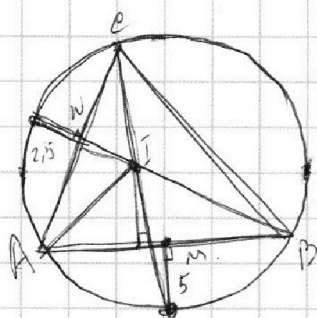
5
☐

6
☐

7
☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \times 13 \\ 8 \\ \hline 104 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 21 \\ 42 \\ \hline 441 \\ \times 3 \\ 1323 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 1058 \\ 104 \\ \hline 1162 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1323 \\ - 1162 \\ \hline 161 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 529 \\ 104 \\ \hline 633 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1323 \\ - 633 \\ \hline 690 \end{array}$$

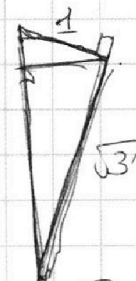
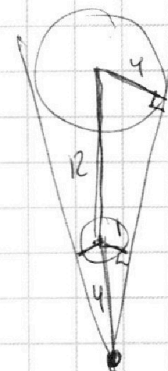
$$\begin{array}{r} 161 + 23 \\ 161 \overline{) 7} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 46 \\ 46 \\ 276 \\ 184 \\ \hline 2116 \\ \times 26 \\ 26 \\ 12696 \\ + 4232 \\ \hline 55016 \end{array}$$

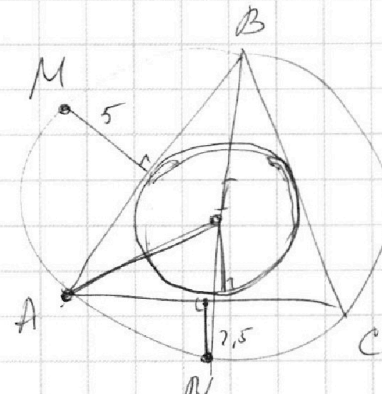
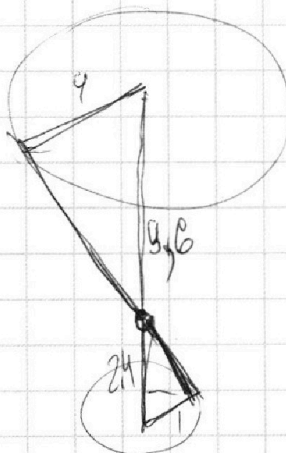
$$\begin{array}{r} \times 345 \\ 345 \\ 1725 \\ 1380 \\ \hline 1035 \\ 119025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 14 \\ \hline 68 \\ 17 \\ \hline 238 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ 4 \\ \hline 676 \\ - 49 \\ \hline 627 \end{array}$$



$$\sqrt{3} = h \cdot 4 \\ h = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



$$\begin{array}{r} 2424 \\ \times 24 \\ 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\sqrt{4,76}$$

$$\begin{array}{r} 476 \overline{) 4} \\ 4 \\ \hline 119 \\ 36 \\ \hline 119 \end{array}$$

$$1,19$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ - 119 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$D(0, 2,4)$$

$$\begin{array}{r} 28,8 \\ - 5 \\ \hline 23,8 \end{array}$$

$$\frac{5}{12} - \frac{12}{5} = \frac{25-144}{60} =$$

$$119 \cdot 2 \cdot 0,01$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} ab &: 2^{15} 7^{11} \\ bc &: 2^{17} 7^{18} \\ ac &: 2^{23} 7^{39} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 + b_2 &\geq 15 \\ b_2 + c_2 &\geq 17 \\ c_2 + a_2 &\geq 23 \\ 2(a_2 + b_2 + c_2) &\geq 55 \\ a_2 + b_2 + c_2 &\geq 28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 + b_2 &\geq 11 \\ b_2 + c_2 &\geq 18 \\ a_2 + c_2 &\geq 39 \\ 2(a_2 + b_2 + c_2) &\geq 68 \\ a_2 + b_2 + c_2 &\geq 34 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 240 \overline{) 7} \\ -21 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$a = 2^{15} b + a + c = 23$$

$$a + b + c \geq 28$$

$$a = 2^{10}$$

$$b = 2^5$$

$$c = 2^{13}$$

$$a = 7$$

$$b = 1$$

$$c = 7^{28}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 16 \\ \hline 414 \\ + 690 \\ \hline 1104 \end{array}$$

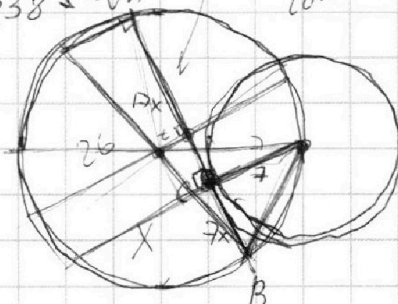
$$\begin{aligned} \sqrt{3 \cdot 26} & 0.36 \\ \sqrt{2 \cdot 52} & 0.02 \\ \sqrt{2 \cdot 18} & \\ \sqrt{1 \cdot 44} & \\ \sqrt{1 \cdot 10} & \end{aligned}$$

$$\frac{a}{b} \frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

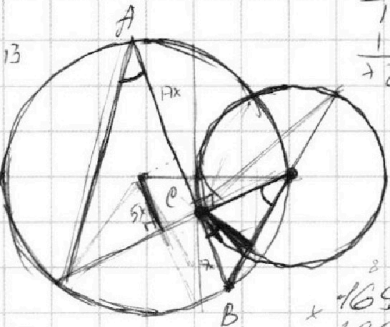
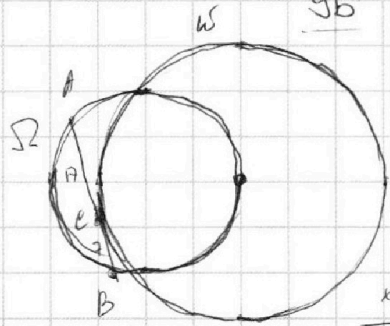
$$\begin{aligned} \text{НОД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) &= \text{НОД}(a+b, 9b^2) = \\ &= \text{НОД}(a+b, 9) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} a^2 - 7ab + b^2 \overline{) a+b} \\ -a^2 + ab \\ \hline b^2 - 8ab \\ -8b^2 - 8ab \\ \hline 9b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 119 \\ \hline 2 \end{array}$$



$$\begin{aligned} 17x^2 - 7 &= 169 \\ 17x^2 - 7 &= 169 \\ 17x^2 - 7 &= 169 \end{aligned}$$



$$\begin{array}{r} 338 \overline{) 2} \\ -2 \\ \hline 13 \\ -12 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ 169 \\ \hline 1521 \\ 1014 \\ -169 \\ \hline 28568 \\ + 34680 \\ \hline 63241 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 289 \\ 120 \\ \hline 5780 \\ 289 \\ \hline 34680 \end{array}$$

$$(5x)^2 + \left(\frac{17x^2 + 7}{2}\right)^2 = 169$$

$$\begin{aligned} 100x^2 + 289x^4 + 238x^2 + 49 &= 169 \\ 388x^2 + 289x^4 + 338x^2 - 120 &= 0 \\ D &= 338^2 + 4 \cdot 289 \cdot 120 = \\ &= 4(13^4 + 17^2 \cdot 120) = \end{aligned}$$

$$x^2 = \frac{-338 \pm \sqrt{63241}}{2 \cdot 17^2}$$

$$\begin{array}{r} 1248 \overline{) 16} \\ 112 \\ \hline 128 \\ -128 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$78 = 2 \cdot 39 = 2 \cdot 3 \cdot 13$$

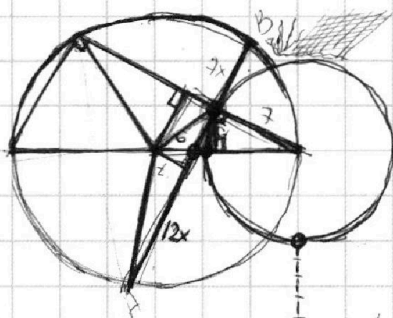
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 + 3x + 1 = A$$

$$1 - 9x = B$$

$$\sqrt{A+B} - \sqrt{A} = B$$

$$(\sqrt{A+B} - \sqrt{A})(\sqrt{A+B} + \sqrt{A}) = B(\sqrt{A+B} + \sqrt{A})$$

$$(A+B-A) = B(\sqrt{A+B} + \sqrt{A})$$

$$B(1 - \sqrt{A+B} - \sqrt{A}) = 0$$

$$B = 0 \vee x = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{A+B} + \sqrt{A} = 1$$

$$A+B+A+2\sqrt{AB}\sqrt{A} = 1$$

$$2\sqrt{(A+B)A} = 1 - 2A - B$$

$$4(A+B)A = 1 + 4A^2 + B^2 - 4A - 2B + 4AB$$

$$4A^2 + 4AB = 1 + 4A^2 + B^2 - 4A - 2B + 4AB$$

$$B^2 - 4A - 2B + 1 = 0$$

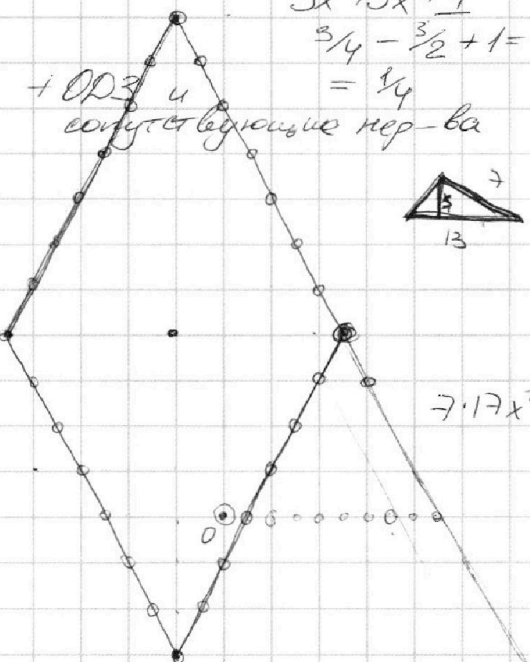
$$1 - 18x + 4x^2 - 12x^2 - 12x - 4 - 2 + 18x + 1 = 0$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$144 + 4 \cdot 69 \cdot 4 = 16(9 + 69) = 16 \cdot 78 \dots$$

$$7 \cdot 17x^2 = 13^2 - 1^2$$

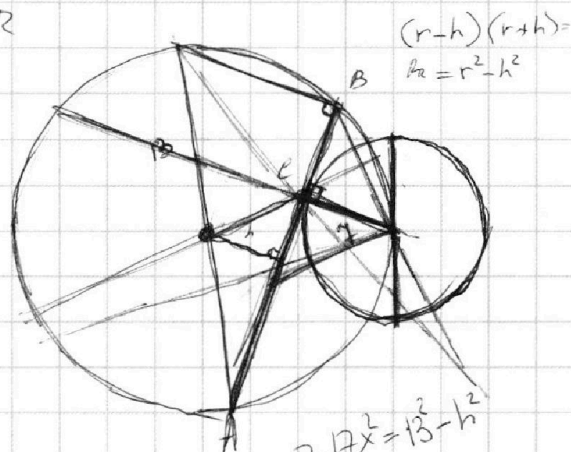
$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$



$$4 \cdot 7 \cdot 17x^2 = 4 \cdot 13^2 - (17x^2 - 7)^2 - 100x^2$$

$$17^2x^4 + 6 \cdot 7 \cdot 17x^2 + 100x^2 - 4 \cdot 13^2 = 0$$

$$36 \cdot 49 \cdot 17^2 + 10^4 + 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 100 + 4 \cdot 17^2 \cdot 4 \cdot 13^2$$



$$7 \cdot 17x^2 = 13^2 - h^2$$

$$\left(\frac{17x^2 - 7}{2}\right)^2 + 25x^2 = h^2$$

$$7 \cdot 17x^2 = 13^2 - \left(\frac{17x^2 - 7}{2}\right)^2 - 25x^2$$