



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 2

$$\frac{a}{b} - \text{несокр.} \Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}, \text{ наиб. } m, \text{ на которое можно сократить}$$

числ. и знаменателя соответствуют $\text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2)$,

$$\text{по алгоритму Евклида: } \text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2) = \text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2 - (a+b)(a-7b))$$

$$= \text{НОД}(a+b, -8ab), \text{ т.к. } a \text{ и } b \text{ взаимнопросты, то сумма } a+b$$

$$\text{взаимнопроста с } ab \Rightarrow \text{НОД}(a+b, -8ab) = \text{НОД}(a+b, 8) \leq 8$$

$$\Rightarrow \text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2) \leq 8 \Rightarrow m \leq 8$$

Пример $a \text{ и } b$: $a=1, b=7$, $\frac{1}{7}$ - несокр.

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{1+49-42} = \frac{8}{8} = 1, m=8, \text{ условие выполнено}$$

удов. $\Rightarrow$ пример верен.

Ответ: $m=8$

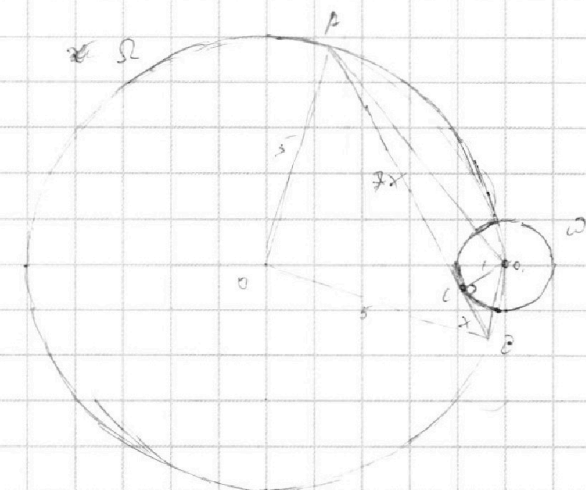
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 2x \\ CB = x \Rightarrow AB = 3x \\ O_1 - \text{центр } \omega$$

Рассм. $\triangle AOB$, по т. синусов:

$$\frac{3x}{\sin \angle AOB} = 5 \text{ т.к. } \angle \text{радиусы от центра}$$

$$\sin \angle AOB = \sin (\angle AOC + \angle COB) =$$

$$\sin \angle AOC \cos \angle COB + \cos \angle AOC \sin \angle COB$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \text{, т.к.}$$

AO - нормаль к ω , с-мента касания, т.к. $\{CO_1\} \perp AB$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\sin \beta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\cos \beta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow \sin \angle AOB = \frac{2x \cdot x}{\sqrt{4x^2+1} \sqrt{x^2+1}} + \frac{1 \cdot x}{\sqrt{4x^2+1} \sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{x(2x+1)}{\sqrt{4x^2+1} \sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{3x}{\sin \angle AOB} = 5 \Rightarrow \frac{3x}{\frac{x(2x+1)}{\sqrt{4x^2+1} \sqrt{x^2+1}}} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 \cdot \sqrt{4x^2+1} \cdot \sqrt{x^2+1} = 5(2x+1)$$

$$64 \cdot (4x^2+1) \cdot (x^2+1) = 25(4x^2+4x+1)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

Сделаем замещение с центром в точке $(0; 0)$ и
коэф. 3

$$O \rightarrow (0; 0)$$

$$P \rightarrow (-4; 8)$$

$$Q \rightarrow (1; 2)$$

$$R \rightarrow (5; 0)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2 - 7x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 2x - 2$$
$$\begin{cases} 2x - 2 \leq \frac{2}{7} \\ 2x - 2 \geq \frac{3}{7} \\ 2x^2 \end{cases}$$

$$49x^2 - 28x + 4 \leq 2x^2 + 2x + 1$$

$$S \Rightarrow 200 - 12 \cdot 47 = 200 - 564 = \underline{336}$$

$$47 \cdot 12 = 420 + 94 = 564$$

$$\frac{30 \pm \sqrt{336}}{94}$$

$$336$$

$$49x^2 - 22x - 3 = 0$$
$$\frac{30 \pm \sqrt{336}}{94}$$

$$S = 484 + 12 \cdot 47 = 484 + 410 \cdot 82 = \underline{276}$$

$$\frac{30 - \sqrt{336}}{94} \rightarrow \frac{2}{7}$$

$$7(30 - \sqrt{336}) \wedge 184$$

$$210 - 184 \wedge 7 \cdot \sqrt{336}$$

$$26 \wedge 7 \cdot \sqrt{336}$$

$$\frac{22 + \sqrt{76}}{82}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2 - 2x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 4 + 40x^2 - 28x + 2x^2 + 2x + 1 + 2(2 - 2x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$40x^2 - 21x + 2 = 2(2x - 2)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$(2x - 2)(2x + 1) = 2(2x - 2)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x - 2 = 0$$

$$2x - 1 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$x = \left(\frac{2}{2}\right) < 1$$

$$2x - 1 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 14x + 1 = 2x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$

$$4x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 40121 + 40304 = 484 + 492 = 976$$

$$x_1 = \frac{22 + \sqrt{976}}{82}$$

$$x_2 = \frac{22 - \sqrt{976}}{82} > \frac{22}{82} > \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$$

$$x_1 \approx 0.27$$

$$\frac{22 + \sqrt{976}}{82} > \frac{22 + 30}{82} > \frac{52}{82} > \frac{2}{3}$$

$$\frac{22 + \sqrt{976}}{82} > \frac{30 + \sqrt{336}}{94}$$

$$\frac{30 + \sqrt{336}}{94} < \frac{30 + 20}{94} < \frac{50}{94}$$

$$\frac{22 + \sqrt{976}}{82} > \frac{22 + 30}{82} > \frac{52}{82} \Rightarrow \text{корень}$$

не подходит

Ответ: $\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} OD3: & 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \\ & 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ & 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \\ & D < 0 \\ & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$(x - 1)(2x - 3) \geq 0$$

$$x \in [0, 1] \cup [1.5, +\infty)$$

$$0 \leq 2 - 2x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2 - 2x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0$$

$$x \leq \frac{2}{2}$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 40x^2 - 28x + 4$$

$$40x^2 - 30x + 3 \leq 0$$

$$D = 900 - 564 = 336$$

$$x \in \left[\frac{30 - \sqrt{336}}{80}, \frac{30 + \sqrt{336}}{80} \right]$$



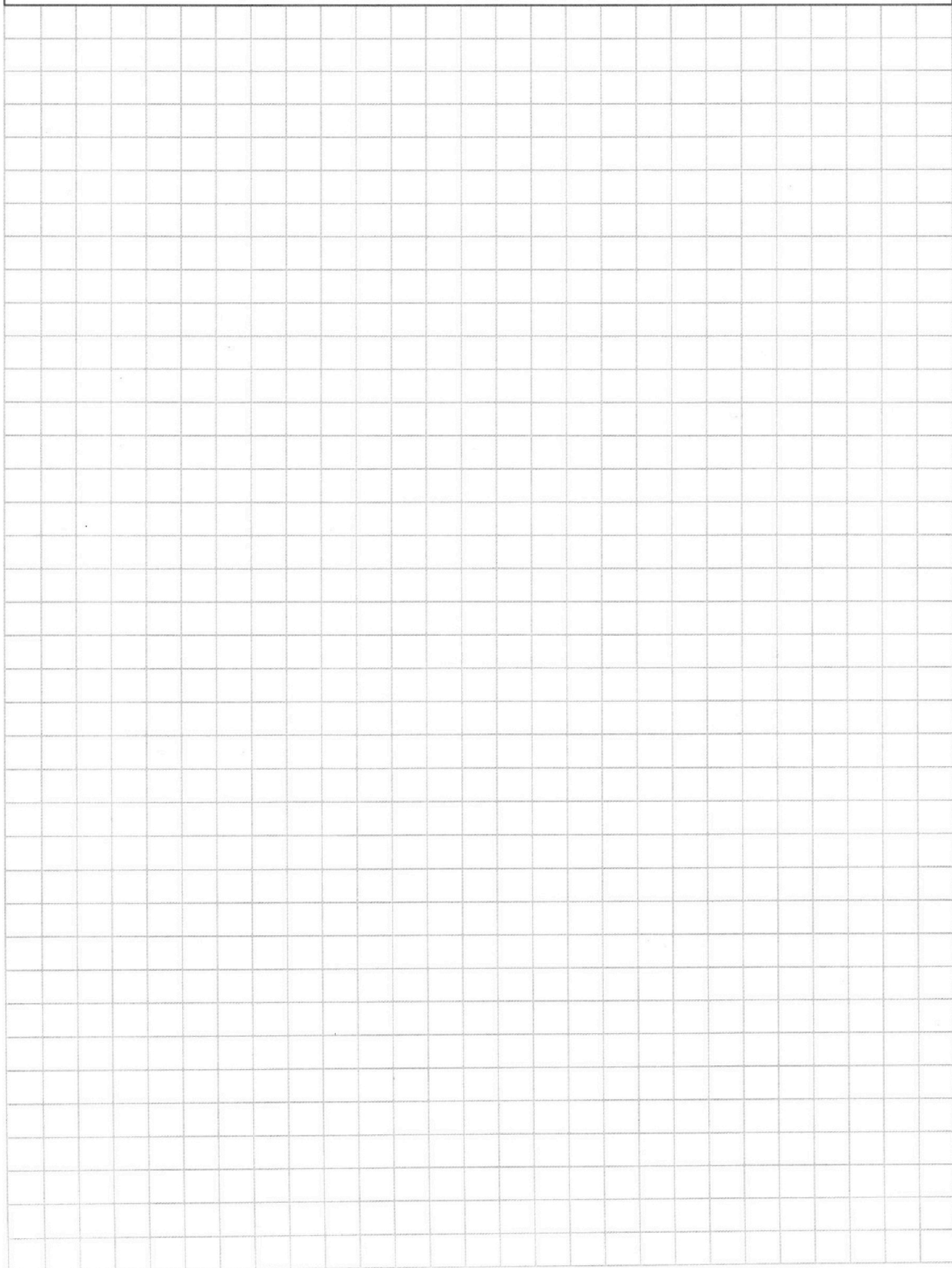
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



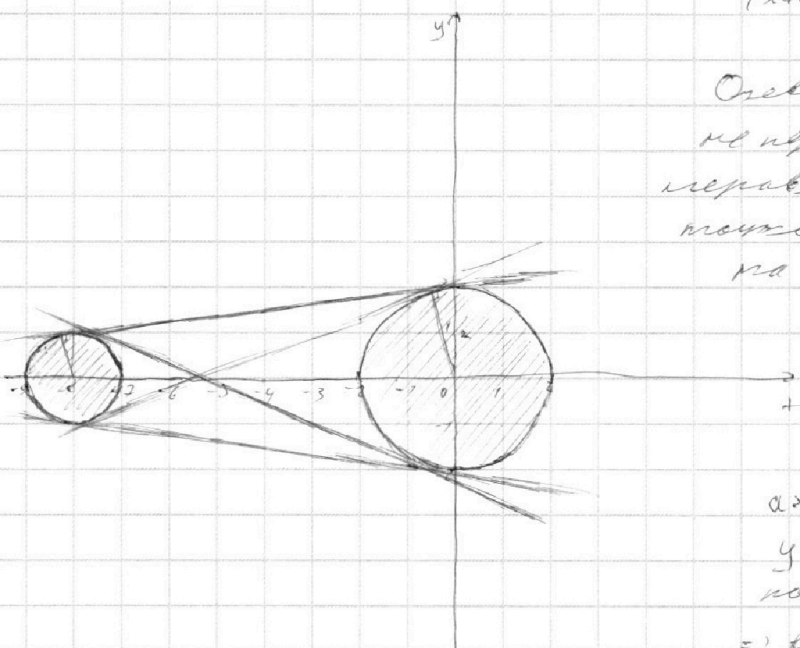
№ 6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)((x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 - 4$ — ур. окружности
с центром в $(0,0)$
и радиусом 2

$(x+8)^2 + y^2 - 1$ — ур. окр. с
центром в $(-8,0)$ и $r=1$

Очевидно окружности
не пересекаются — значит 2-е
неравенство для всех
точек принадлежит окр. 4
на их границах



$ax - y + 10b = 0$ — ур.
прямой
 $y = ax + 10b$, в момент
подбора b любое —
→ все зависит от a

$$\begin{cases} y = ax + d \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 4 - x^2 = a^2 x^2 + 2dax + d^2$$

Всего 2 значения x —
→ $y = ax + 10b$ — касательная к
окружности

$$x^2(a^2 + 1) + 2dax + d^2 - 4 = 0$$

$$\begin{cases} y = ax + d \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 - (x+8)^2 = a^2 x^2 + 2dax + d^2$$

→
у а 4 значения
→ 4 значения
поэтому 4 значения
для b

Ответ: у а 4 знач. ~~для всех значений~~

~~значения~~ + эти а соответствуют координатам

там где касательная к окружности

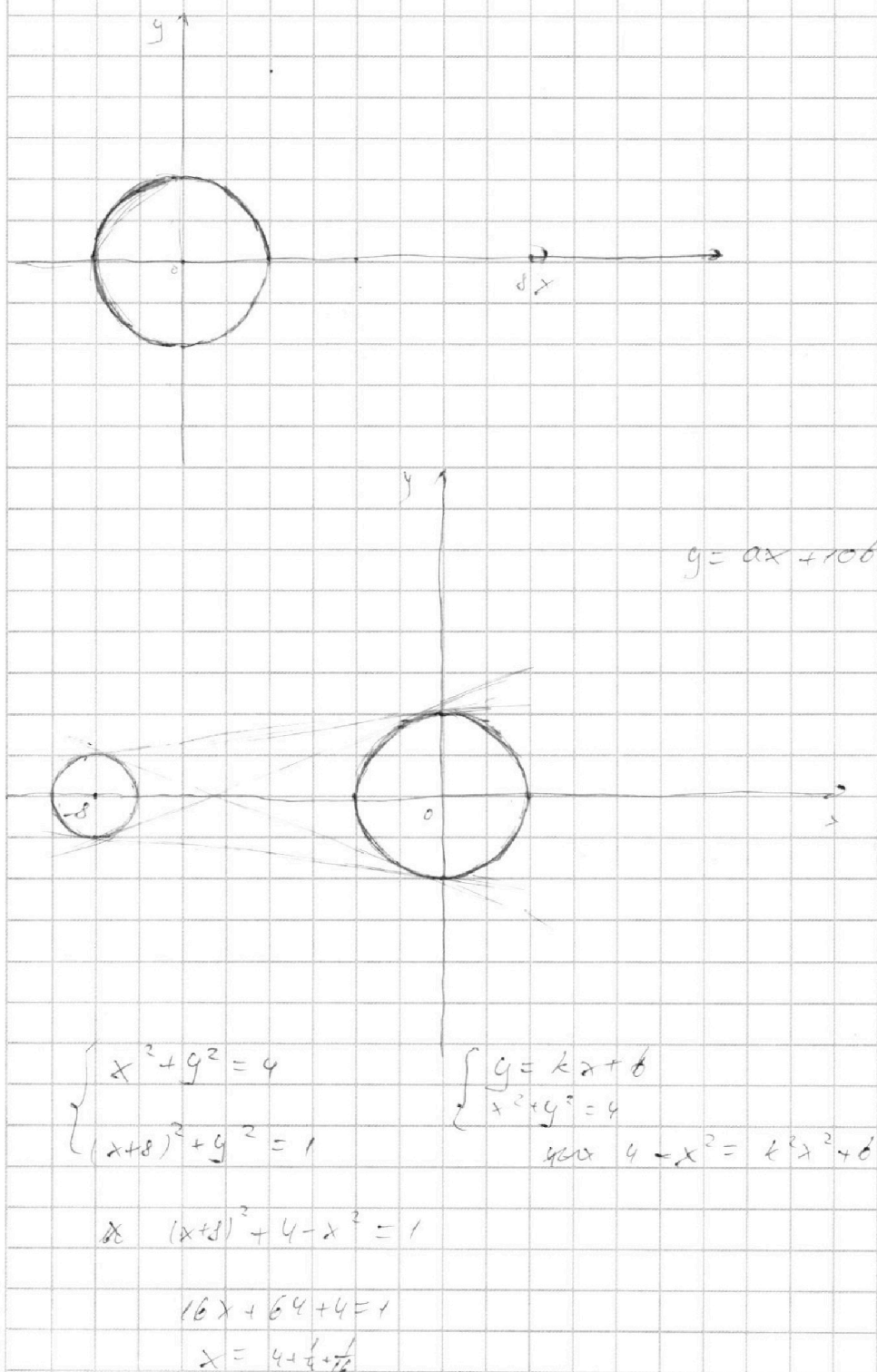
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a+b=$$

$$d = 2x_2 + y_2$$

$$2x + \Delta y = 64$$

$$2x_1 - y_1 = 12 - d$$

$$y_1 = 2x_1 + 12 + d$$

22

22

13

$$S = 22^2 + 40 \cdot 30 \cdot 41 =$$

$$12 \cdot 41 = 492$$

$$12 \cdot 41 = 410 + 82 = 492$$

$$22 \cdot 3$$

$$\frac{22 \pm \sqrt{973}}{82}$$

$$2 - 2x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0$$

22

$$x \leq \frac{2}{3}$$

$$40x^2 + 4 - 28 \leq 2x + 2x + 1$$

$$42x^2 - 2x + 3 \leq 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$$

$$O(0,0)$$

$$P(-12, 24) \rightarrow P(-4, 6)$$

$$Q(1, 6)$$

$$R(5, 0)$$

$$2x_1 - 2x_2 + y_1 - y_2 = 64$$

$$\frac{5}{x} = \frac{30}{\sqrt{61}}$$

$$\frac{5}{x} = \frac{30}{\sqrt{61}}$$

$$\sqrt{61} \cdot 1 \cdot 2.5$$

$$4244 \cdot 225$$



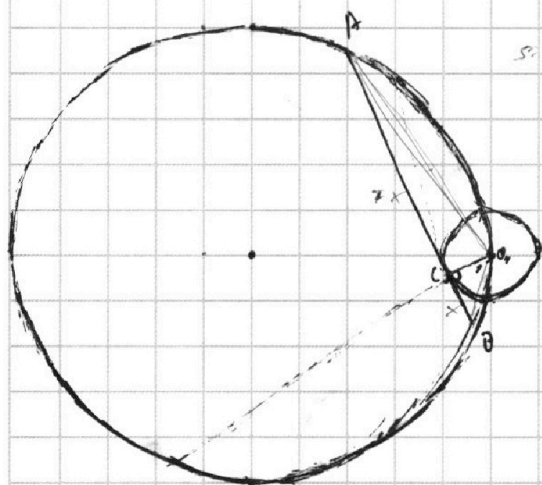
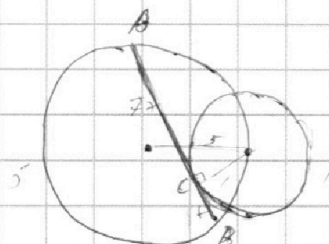
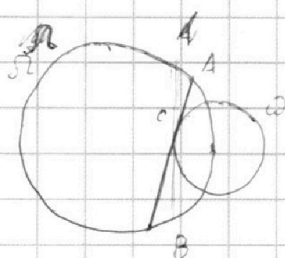
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$8x = 5 \sin 2\alpha =$$

$$\sin 2\alpha = \frac{8x}{5} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{8x}{5}$$

$$\frac{49x^2 - 21x + 2}{49x^2 - 14x} \cdot \frac{2x-2}{2x-1}$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha$$

$$360 - 2\alpha$$

$$\sin(360^\circ - 2\alpha)$$

$$\sin(-2\alpha) =$$



$$\frac{8x}{\sin 4\alpha} = 5$$

$$\sin 2\alpha =$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x$$

$$D3: \frac{2x^2 - 5x + 3}{2x^2 + 2x + 1} = 0$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$x \in [1, 1.5]$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 49x^2 + 4 - 28x + 2x^2 + 2x + 1 + (2 \cdot (2 - 2x) \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$49x^2 - 21x + 2 = 2(2x - 2)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x - 2 = 0$$

$$2x - 1 = 2 \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$\frac{a}{b} = 10$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{12}$$

$$ab \geq 2^{12}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$bc: 17$$

$$ac:$$

$$\begin{cases} x+y \geq 10 \\ y+z \geq 17 \\ z+x \geq 37 \end{cases} \quad \begin{matrix} 20+20 \\ 40 \\ 20 \end{matrix}$$

$$x+y \geq 10 \quad x-y \leq 10$$

$$\sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} \geq abc \geq \sqrt{2^{51} \cdot 7^{69}} \geq 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x+y=14 \\ y+z=18 \\ z+x=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z-x=6 \\ x=8 \\ y=6 \end{cases}$$

$$x+y \geq 10$$

$$y-x \geq -10$$

$$2y \geq 0$$

$$(a+b; a^2 - 6ab + b^2)$$

$$(a+b; -8ab)$$

$$+8ab \mid a+b$$

$$+8ab \mid a+b$$

$$a=1$$

$$b=2$$

$$\frac{8}{1+49-6 \cdot 7} = \frac{8}{2} = 1$$

$$y = ax + b$$

$$\begin{cases} x+y=10 \\ y+z=17 \\ x+z=37 \end{cases} \quad \begin{matrix} x=20 \\ z-x=7 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} z-y=20 \\ x+y=10 \\ x+y=20 \end{cases} \quad \begin{matrix} z=21 \\ y=1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x+y=20 \\ y+z=17 \\ z+x=37 \end{cases} \quad \begin{matrix} x=20 \\ y=0 \\ z=17 \end{matrix}$$

$$x+z \geq 37$$

$$\begin{cases} x \in 37-2 \\ y \leq \end{cases}$$