



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\left\{ \begin{array}{l} ab : 2^{15} \cdot 7^{21} \quad (1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} bc : 2^{17} \cdot 7^{18} \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ac : 2^{23} \cdot 7^{39} \quad (3) \end{array} \right.$$

Перемножим (1) и (2):

$$ab^2c : 2^{32} \cdot 7^{29}$$

С другой стороны, $ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$ ~~и~~

~~$$ab^2c : 2^{23} \cdot 7^{39}$$~~

$7^{39} > 7^{29}$, значит ac -то произведение

должно казаться 7^{10} . Поскольку мы

минимизируем значение произведения,

~~также~~ 7^{10} может взяться здесь как угодно.

Пусть, например, в (1):

$$\left\{ \begin{array}{l} ab = 2^{15} \cdot 7^{21} \quad (4) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \quad (5) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \quad (6) \end{array} \right.$$

В данном случае мы получили минимальное

произведение, которое может быть. Од-

нако нужно проверить, a, b и c на натуральность.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Перемножим (4), (5) и (6)

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{55} \cdot 7^{78}$$

$a b c = \sqrt{2} \cdot 2^{27} \cdot 7^{39}$. Очевидно, что при перемножении натуральных чисел иррациональности появиться не могло. Значит где-то не хватило двойки. Пусть, скажем все, в (4). (Кстати где-то т.е. мы минимизируем произведение).

$$\begin{cases} ab = 2^{16} \cdot 7^{21} & (7) \\ bc = 2^{17} \cdot 7^{18} & (8) \\ ac = 2^{23} \cdot 7^{39} & (9) \end{cases}$$

$$(7) : (8) : \frac{a}{c} = \frac{7^3}{2}, \Rightarrow a = \frac{7^3}{2} \cdot c$$

$$(9) \quad c^2 \cdot \frac{7^3}{2} = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$c^2 = 2^{24} \cdot 7^{36}$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{18}, \Rightarrow a = 2^{11} \cdot 7^{21}, b = 2^5$$

Все числа натуральные, значит они подходят.

$$a \cdot b \cdot c = 2^{11+5+12} \cdot 7^{18+21} = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2. $\text{НОД}(a, b) = 1$

$$\text{НОД}(a+b, a^2-7ab+b^2) = m.$$

По алгоритму Евклида $\text{НОД}(a+b, a^2-7ab+b^2) = \text{НОД}(a+b, a^2-7ab+b^2 - (a+b)^2) = \text{НОД}(a+b, -9ab) = m.$

Рассмотрим ~~в~~ число m . Если $a:m$, то $b:m$ по условию, и наоборот, $\Rightarrow$

$a+b:m$ и ab несократима.

$ab:m$ только в случае, если $ab=m$.

Кроме того $a+b \nmid m$ ($a+b \nmid ab$, т.к. тогда было бы $a+b \mid m$ из чисел).

Если $a=b=1$, то $m=1$, что мало. Если одно из чисел 1, то $a+b:ab$. Если же $a \neq 1$ и $b \neq 1$, то $a+b < ab, \Rightarrow a+b \nmid ab$.
Остается 1 вариант: $9:m$. Тогда наибольшее $m=9$.

Ответ: 9.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

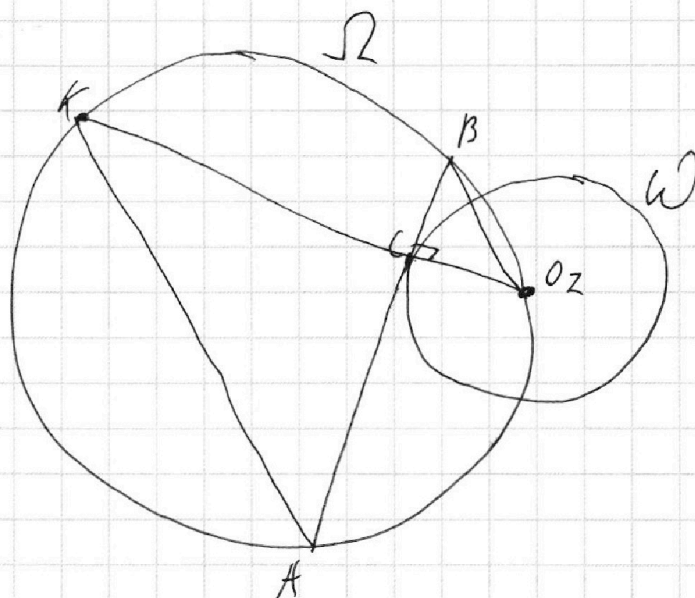
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3.



$$r_1 = 13$$

$$r_2 = 7$$

$AC = 17x$, $BC = 7x$. Проведём O_2C до пересечения с Ω в т. K . По св-ву пересекающихся хорд $CK \cdot CO_2 = BC \cdot CA$

$$CK \cdot 7 = 7x \cdot 17x$$

$$CK = 17x^2$$

$$\text{По т. Пифагора } BO_2 = \sqrt{O_2C^2 + BC^2} = \sqrt{49 + 49x^2} = 7\sqrt{x^2 + 1},$$

$$AK = \sqrt{CK^2 + AC^2} = \sqrt{289x^4 + 289x^2} = 17x\sqrt{x^2 + 1}.$$

По лемме, которую я докажу в конце решения,

$$4r_1^2 = AK^2 + BO_2^2$$

$$4 \cdot 13^2 = 289x^4 + 289x^2 + 49x^2 + 49$$

$$289x^4 + 338x^2 - 455 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$t = x^2, \Rightarrow 289t^2 + 338t - 458 = 0$$

$$D = 642692839056 = 916^2$$

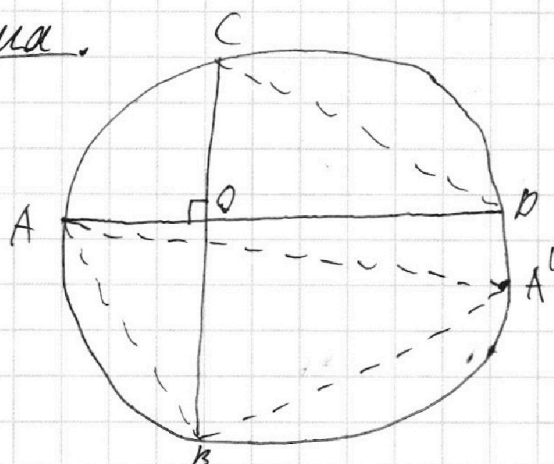
$$t = \frac{\sqrt{642692839056} - 338}{578} = 1$$

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{642692839056} - 338}{578}} = 1 \quad (x > 0)$$

$$AB = 24x = 24$$

$$\text{Ответ: } 24$$

Лемма.



Если $\angle AOC = 90^\circ$,

$$\text{то } AB^2 + CB^2 = 4R^2$$

Док-во: пусть AA' — диаметр,
тогда $AA'^2 = 4R^2$, и $\angle ABA' = 90^\circ$ как угол,
опирающийся на диаметр. Тогда достаточно дока-
зать, что $A'B = CD$. $\angle BAD = 90^\circ - \angle ABO = \angle CBA'$
 $\angle BAO = \angle BCO$ как ~~углы~~ вписанные углы. $\angle BCO =$
 $= \angle CBA'$, дуга CA' общая, $\Rightarrow \angle CDO = \angle A'BO, \Rightarrow CB = A'B,$
т.е. д.

Ответ: ~~24~~ 24

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4. \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Пусть $a = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$, $b = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$

Заметим, что $1 - 9x = a^2 - b^2$

Тогда исходное уравнение можно переписать:

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$a - b = (a - b)(a + b)$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0$$

$$a = b$$

или

$$a + b = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

II

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 & (1) \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 9x - 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{9}$$

Подставим x_1 в (2):

$$3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1 \geq 0 -$$

верно, поэтому $x_1 = \frac{1}{9}$ - корень

$$a = 1 - b$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

II

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = (1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2 & (3) \\ 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0 & (4) \end{cases}$$

$$(3) \quad 3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

II

$$\begin{cases} x \geq 0 & (5) \\ 81x^2 = 4 \cdot (3x^2 + 3x + 1) & (6) \end{cases}$$

$$(6) \quad 81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 1104 = 1248$$

$$x_2 = \frac{12 - \sqrt{1248}}{69 \cdot 2}$$

$$x_3 = \frac{12 + \sqrt{1248}}{138}$$

$< 0, \Rightarrow$ не подходит по (5)

$$a + b = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}, \text{ откуда}$$

$$1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \leq 1$$

Найдём минимальные значения $3x^2 + 3x + 1$.

$$x_0 = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}, y_0 = \frac{1}{4}, \text{ поэтому } 3x^2 + 3x + 1 > 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \leq 1$$

$$x(x+1) \leq 0$$

$$\begin{array}{c} \text{|||||} \\ -1 \quad 0 \end{array} \rightarrow x$$

$$x \in [-1; 0].$$

Теперь рассмотрим мин. значения $\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$ на

промежутке $[-1; 0]$. Мин. значения

$$3x^2 - 6x + 2: \text{ при } x_0 = \frac{6}{6} = 1, \text{ но } 1 \notin [-1; 0]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

III. к. ^{м.к.} ~~макс.~~ значение при $x_0 = 1$, ^{и старший коэффициент > 0} значение
при $x = 0$ будет ~~меньше значения~~
минимальным на промежутке $[-1; 0]$.

$$x \neq 0: \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} > 1, \quad b \geq 0, \Rightarrow a + b > 1$$

и корней не будет.

Ответ: $\frac{1}{9}$.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6. $\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \end{cases} \quad (1)$

$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases} \quad (2)$

График (2) ~~на~~ в системе ~~OxOy~~ $OxOy$: круг с центром $(0; 0)$ и радиусом 1 и круг с центром $(0; 12)$ и радиусом 4. Нам подходят внутренние части кругов и их границы.

График (1) — прямая ~~я~~, наклон которой зависит от параметра a , проходящая через точку $(0; 8b)$. Параметр b "убегает" эту точку по оси Oy .

П.к. нам нужно равно два решения, прямая (1) не может проходить внутри окружностей. Но она также не может касаться одной окружности одновременно в двух точках (это невозможно). Поэтому мы имеем дело с общими касательными окружностей. Всего их 4: две внутренние и две внешние.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Тогда $\frac{O_1 E}{O_2 E} = 4$, $\Rightarrow O_2 E = \frac{1}{5} O_1 O_2 = \frac{12}{5}$

Тогда координаты $m E - (0; \frac{12}{5})$. Откуда

$$\delta b = \frac{12}{5}$$

$$b = \frac{3}{10}. \text{ Подставим в (1):}$$

$$ax + y - \delta \cdot \frac{3}{10} = 0$$

$$ax + y = \frac{12}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{O_1 A}{A E} = \frac{4}{A E}$$

$$A E = \sqrt{O_1 E^2 - O_1 A^2} = \sqrt{45}$$

$$\tan \alpha = \frac{O_2 C}{C E} = \frac{7}{C E}$$

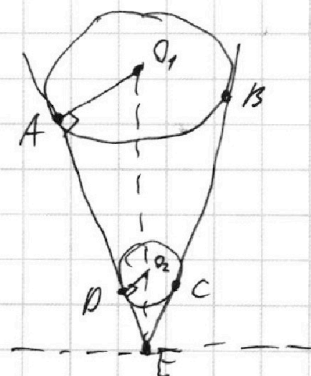
$$C E = \sqrt{E O_2^2 - O_2 C^2} = \sqrt{\frac{144}{25} - 1} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{5}{\sqrt{119}}$$

$$\alpha_1 = \tan(90 - \alpha) = \cot \alpha = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$\alpha_2 = -\tan(90 - \alpha) = -\frac{\sqrt{119}}{5}$$

Теперь внешние касания:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

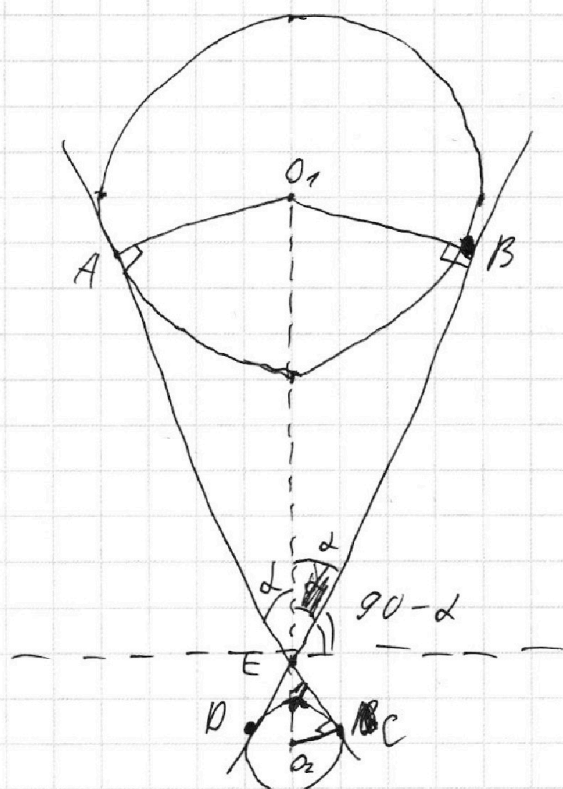
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Внутренние касательные пересекутся
на оси OY , т.к. центры окружностей
лежат на оси OY . Аналогично с внешними.
Эти ^{две} точки и будут иметь нулевую
координату $(0; \pm b_1)$ и $(0; \pm b_2)$

Внутренние:



$$\triangle O_1 A E = \triangle O_1 B E$$

по 3 сторонам

Координаты т. O_2 $(0; 0)$, т. O_1 $(0; \frac{12}{5})$, поэтому

$O_1 O_2 = \frac{12}{5}$. $\angle A E O_1 = \angle O_2 E C$ как вертикальные,
угол между радиусом, проведенным в т. касания

$$\angle O_1 A E = \angle E C O_2 = 90^\circ, \Rightarrow \triangle A E O_1 \sim \triangle E O_2 C,$$

$$k = \frac{AO_1}{CO_2} = \frac{4}{1} = 4. \quad (AO_1 \text{ и } CO_2 - \text{радиусы}).$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Аналогично ~~каждому~~ $\triangle E O_1 A \sim \triangle E O_2 P$,
 $k = \frac{O_1 A}{O_2 P} = 4$. $\frac{E O_2}{E O_1} = \frac{1}{4}$, $\Rightarrow \frac{E O_2}{O_1 O_2} = \frac{1}{3}$, $\Rightarrow$
 $E O_2 = \frac{O_1 O_2}{3} = 4$.

$\angle = \angle P E O_2 = \angle C E O_2$ ($E O_1$ - биссектриса)

$E P = \sqrt{O_2 E^2 - O_2 P^2} = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15}$

$\operatorname{tg} \angle = \frac{O_2 P}{E P} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$

Аналогично $\alpha_3 = \operatorname{tg} (90 - \angle) = \operatorname{ctg} \angle = \sqrt{15}$

$\alpha_4 = -\sqrt{15}$.

Ответ: $-\sqrt{15}$; $-\frac{\sqrt{119}}{5}$; $\frac{\sqrt{119}}{5}$; $\sqrt{15}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 7^{18}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 7^{18}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a^2 \cdot 2^7 \cdot 7^7 = 2^{21} \cdot 7^{32}$$

$$a = \sqrt{2} \cdot 2^{10} \cdot 7^{16} \quad a^2 + 7ab + b^2$$

$$ab = 2^{16} \cdot 7^{11}$$

$$b = 2^{17} \cdot 7^{11} \quad bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$c = 2^{23} \cdot 7^{39} \quad a = 2^{17} \cdot 7^{16} \quad ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a^2 = 2^{34} \cdot 7^{32} \quad c = 2a \cdot 7^7$$

$$\frac{c}{a} = 2^2 \cdot 7^7$$

$$c = a \cdot 2^2 \cdot 7^7$$

2. $\text{НОД}(a, b) = 1$

$$\frac{a+b}{a^2+7ab+b^2} = \frac{a^2-7ab+b^2-(a+b)^2}{a^2-7ab+b^2-a^2-2ab-b^2} = -9ab$$

$$\text{НОД}(a+b, a^2-7ab+b^2) = m$$

$$\text{НОД}(a+b, a^2-7ab+b^2) = \text{НОД}(a+b, -9ab) =$$

$$= \text{НОД}(9ab, a+b,$$

$$\frac{a+b}{-9ab} = -\frac{1}{9b} + -\frac{1}{9a}$$

$$\text{НОД}(a+b, a^2-7ab+b^2) \neq \text{НОД}(a, b)$$

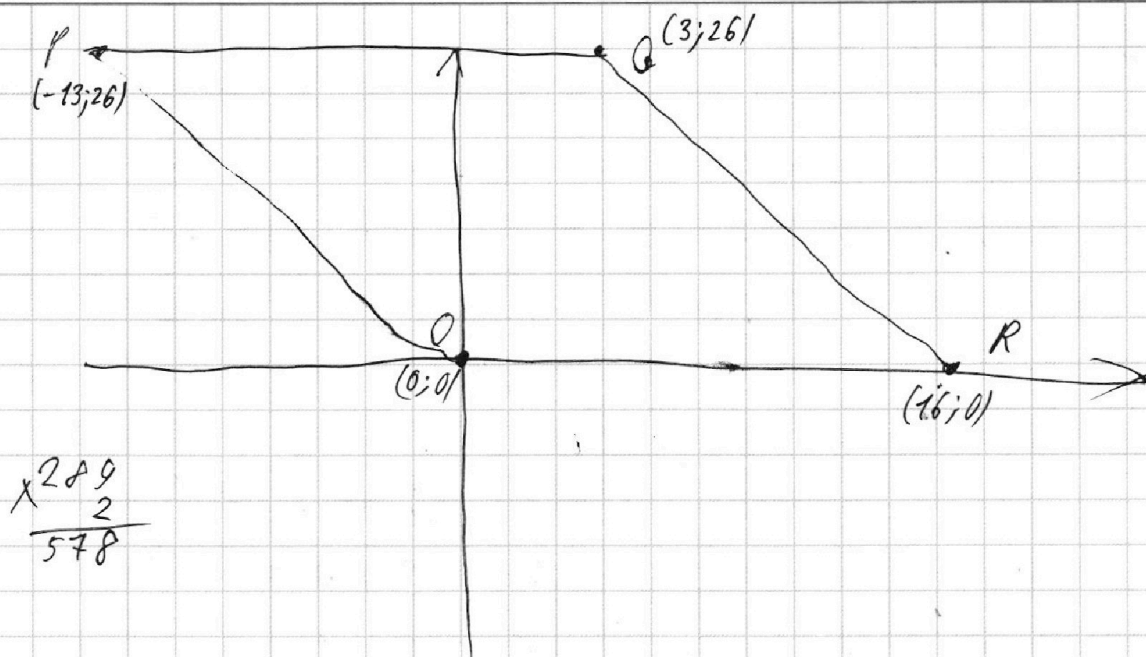
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



процесс.

$$\begin{array}{cc} x_1 - 1 & x_1 + 1 \\ + 2 & - 2 \end{array}$$
$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 \in \mathcal{M}$$
$$\begin{array}{cc} y_1 - 1: & y_1 + 1: \\ +1 & -1 \end{array}$$

$$\text{max: } 2 \cdot (16 + 13) - 16 = 2 \cdot 29 - 26 = 58 - 26 = 32$$

$$\begin{array}{r} \times 69 \\ 16 \\ \hline 414 \\ 69 \\ \hline 7104 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 35 \\ \hline 175 \\ 705 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 69 \\ \underline{2} \\ 138 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 338 \\ \times 338 \\ \hline 2704 \\ 1014 \\ 1014 \\ \hline 114294 \\ + 529442 \\ \hline 643692 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1156 \\ \times 458 \\ \hline 9248 \\ 5780 \\ 4624 \\ \hline 529448 \end{array}$$

$$x^2 = \frac{\sqrt{643692} - 338}{578}$$

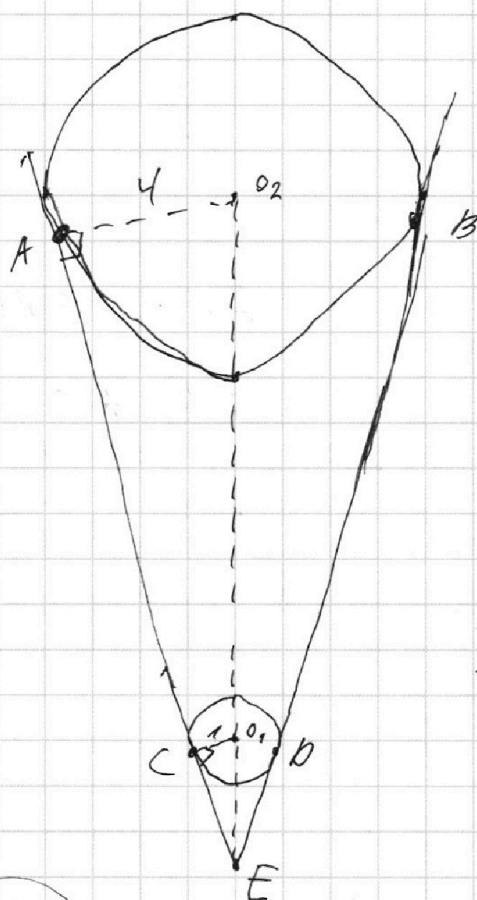
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{EO_1}{EO_2} = \frac{1}{4}$$

$$EO_2 = 4EO_1$$

$$EO_2 - EO_1 = 3EO_1 = 4 \cdot O_1O_2 =$$

$$= 12$$

$$EO_1 = 4$$

$$-4$$

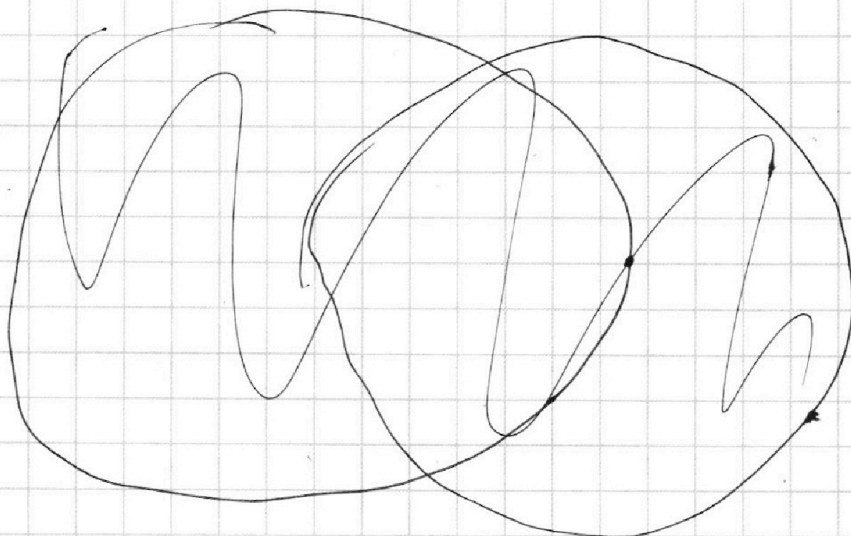
$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 3 \\ \hline 507 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 507 \\ 49 \\ \hline 458 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} -4; \frac{12}{5} \\ \hline \end{array}$$

$$289t^2 + 238t - 458 = 0$$

3.



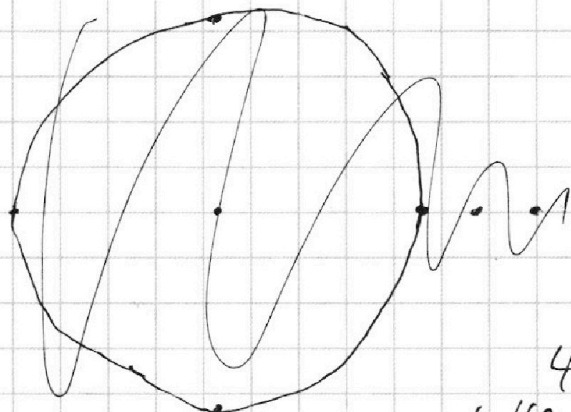
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ + 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$EC \cdot r_2 = BC \cdot AC$$

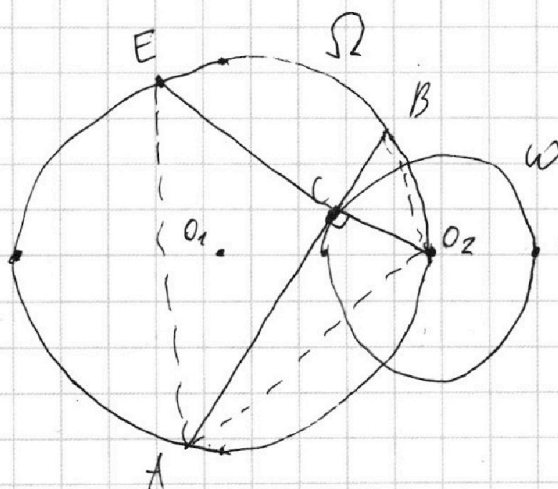
$$EC \cdot x = 7x \cdot 17x$$

$$EC = 17x^2$$

$$AE^2 = 289x^4 + 289x^2$$

$$4r_1^2 = AE^2 + BO_2^2 = 289x^4 + 289x^2 + 49x^2 + 49$$

$$4 \cdot 13^2 = 289x^4 + 338x^2 + 49$$



$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$$

$$AC = 17x$$

$$CB = 7x$$

$$x = ?, \vec{AB} = ?$$

$$O_1 = r_1 = 13 \quad r_2 = 7$$

$$BO_2^2 - r_2^2 = 49x^2$$

$$BO_2^2 - 49 = 49x^2$$

$$BO_2^2 = 49(x^2 + 1)$$

$$BO_2 = 7\sqrt{x^2 + 1}$$

$$AO_2^2 - r_2^2 = 17^2 x^2$$

$$AO_2^2 - 49 = 289x^2$$

$$AO_2 = \sqrt{289x^2 + 49}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax + y = 86$$

$$y = 86 - ax$$

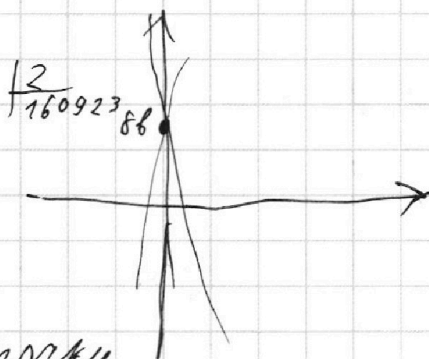
$$y = -ax + 86$$

$$a \neq 0$$

найдётся в
2 реш.

$$\begin{array}{r|l} 643692 & 2 \\ 321846 & 2 \\ 160923 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 643692 \\ \times 4 \\ \hline 2574768 \\ \times 3 \\ \hline 1931076 \\ \times 2 \\ \hline 1287384 \\ \times 1 \\ \hline 643692 \\ \hline 2574768 \\ 1931076 \\ 1287384 \\ 643692 \\ \hline 2574768 \\ 1931076 \\ 1287384 \\ 643692 \end{array}$$



сдвигаем точку
по оси Oy.

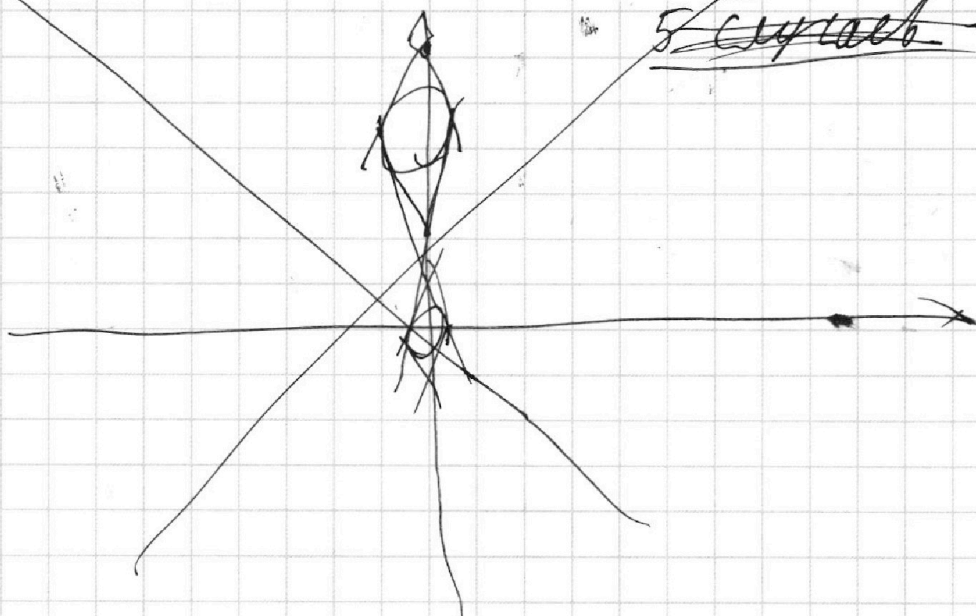
точка не в и не на окружности

2 реш. 2 реш.

1 м. с одной и одна с другой

2 м. с какой-то одной

5 случаев





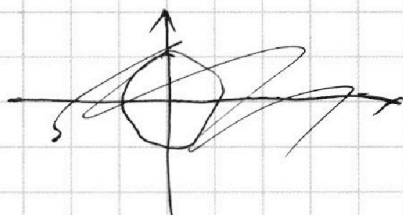
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

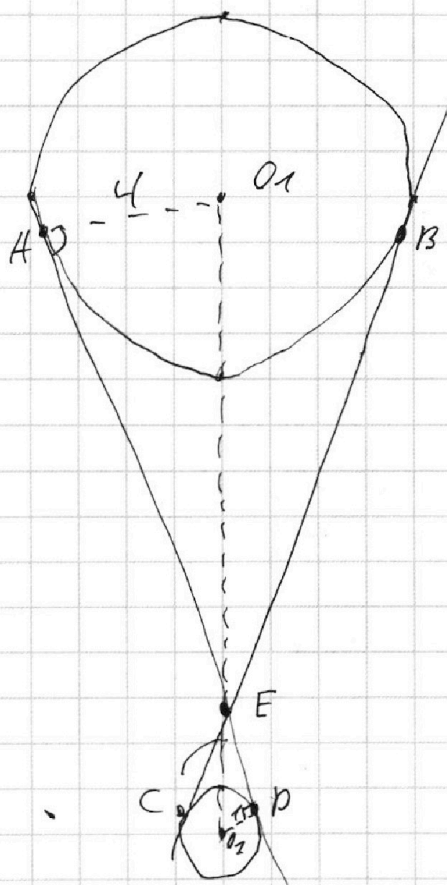
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



прямая, имеющая 2 общие точки
не может проходить внутри окружностей, $\Rightarrow$
касается. одну окр. кельза два раза коснуться $\Rightarrow$
касается обеих $\Rightarrow$ общая касательная 2-х
окружностей. (либо внутр., либо внеш.



$$O_1 O_2 = 12$$

$$O_2 E = ?$$

$$\triangle O_1 A E \sim \triangle O_2 B E$$

$$k = 4$$

$$\frac{O_1 E}{O_2 E} = 4$$

$$O_1 E = 4 O_2 E$$

$$O_1 E + O_2 E = 5 O_2 E = 12$$

$$O_2 E = \frac{12}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

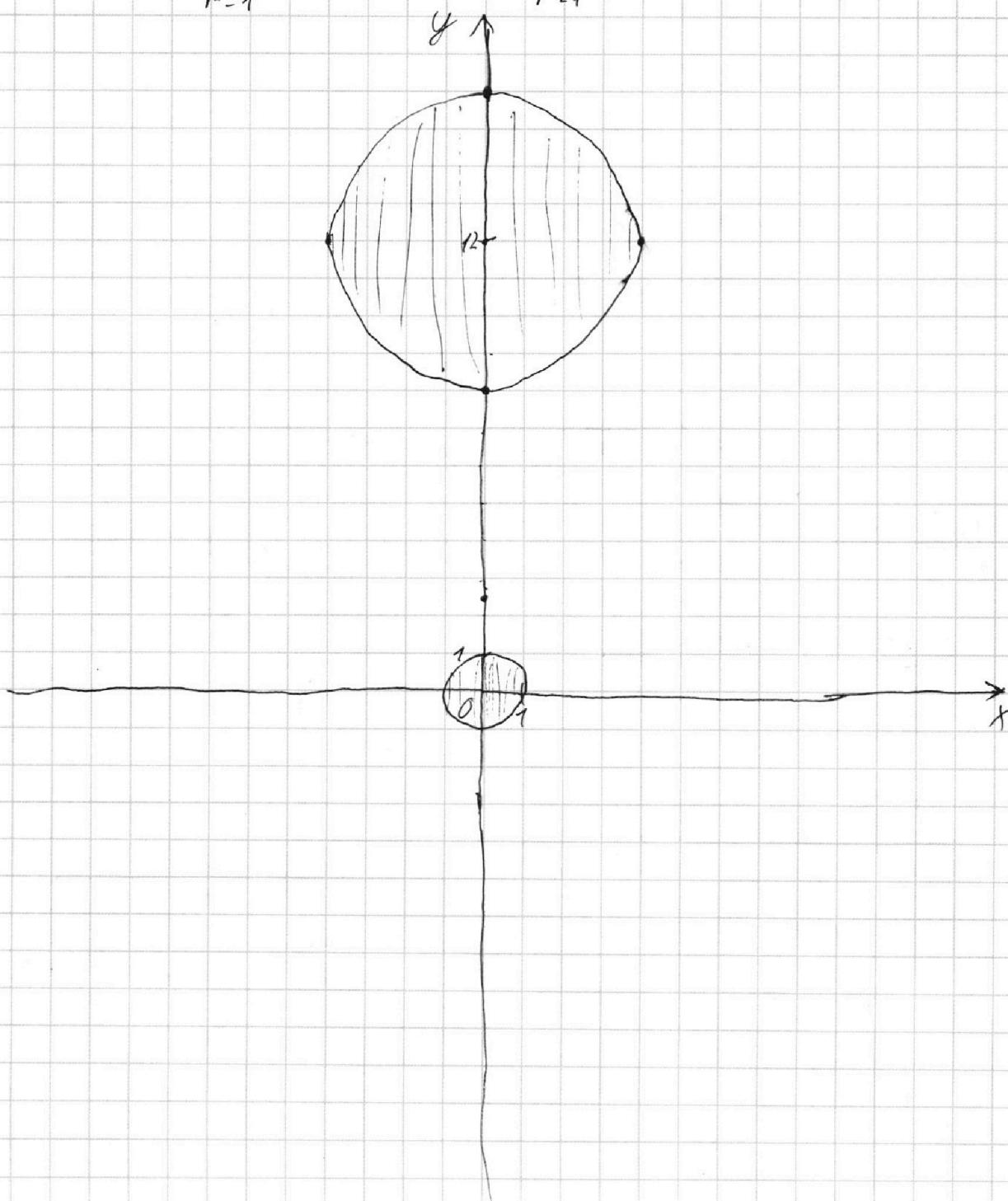
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6. $\begin{cases} ax + y - 8b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 & (2) \end{cases}$ 2 реш.

$r=1$ $r=4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$4. \quad \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \stackrel{1}{\leftarrow} \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$a^2 - b^2 = -9x + 1 = 1 - 9x$$

$$\sqrt{a} \stackrel{2}{\leftarrow} \sqrt{b} \Rightarrow a \stackrel{2}{\leftarrow} b$$

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$a - b = (a - b)(a + b)$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0$$

$$a = b$$

$$a + b = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$a = 1 - b$$

$$1 - b \geq 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$-9x + 1 = 0$$

$$9x - 1 = 0$$

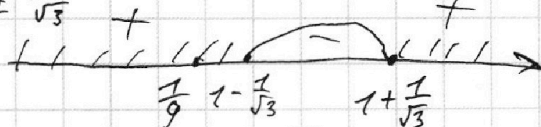
$$\boxed{x = \frac{1}{9}}$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} =$$

$$= 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\frac{1}{9} \vee 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \vee \frac{8}{9}$$

$$\sqrt{3} \vee \frac{8}{3}$$

$$3 \vee \frac{68}{9}$$

$$27 \vee 64$$

$$\vee <$$

$$1 \geq \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$x^2 + x \leq 0$$

$$x(x+1) \leq 0$$



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

НЕ



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$a, b, c \in \mathbb{N}$~~
 ~~$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$~~
 ~~$bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$~~
 ~~$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$~~

П.к. ~~нам~~ нужно минимальное значение
 ~~a, b, c~~ , попробуем найти минимальные a, b, c .
Для минимальности

~~$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$~~
 ~~$bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$~~
 ~~$c = 2^3 \cdot 7^7$~~

$ab^2c = 2^{32} \cdot 7^{29}$

~~$a \in ab^2c = 2^{23} \cdot 7^{39}$~~

нужно дописать
минимум 7^{10}

$ab = 2^{15} \cdot 7^{21}$

$bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$ — не получается + еще 2

$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$

$ab = 2^{16} \cdot 7^{21}$

$\frac{a}{c} = \frac{7^3}{2}$

$bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$

$a = \frac{c \cdot 7^3}{2}$

$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$

$c^2 \cdot \frac{7^3}{2} = 2^{24} \cdot 7^{36}$

$b = 2^5 \quad a = 2^{11} \cdot 7^{21}$

$c = 2^{12} \cdot 7^{18}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ 9 \\ \hline 676 \\ 49 \\ \hline 627 \end{array}$$

$$\begin{aligned} b &= 114244 + 1156 \cdot 627 = \\ &= \underline{839056} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \times 1156 \\ 627 \\ \hline 8092 \\ 2312 \\ 6936 \\ \hline 724812 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 724812 \\ + 114244 \\ \hline 839056 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 906 \\ \times 906 \\ \hline 5436 \\ 8154 \\ \hline 820836 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 916 \\ \times 916 \\ \hline 5496 \\ 916 \\ \hline 8244 \\ \hline 839056 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 914 \\ \times 914 \\ \hline 3656 \\ 914 \\ \hline 8226 \\ \hline 835396 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 916 \\ 338 \\ \hline 578 \end{array}$$