



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$, $b = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$, $c = 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}$, тогда

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 15 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17 \\ \alpha_3 + \alpha_1 \geq 23 \end{cases} \Rightarrow 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 55 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 27,5$$

и т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 11 \\ \beta_2 + \beta_3 = 16 \\ \beta_3 - \beta_1 = 39 \end{cases} \Rightarrow 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 68 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34$$

т.к. степень единицы не может быть меньше нуля
 $\beta_1 + \beta_2$, поэтому градусы увеличиваются $\beta_1 + \beta_2 + 4$
 $\beta_2 + \beta_3$ и т.д.

и т.к. ≥ 10 , значит $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 39$

~~$abc = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2} \cdot 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3} = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} = 2^{28} \cdot 7^{39}$~~

~~$= 2^{27,5} \cdot 7^{39}$, и т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то степень должна быть целой~~

~~и т.к. степень единицы не может быть меньше нуля, значит $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$~~

~~Пример: $a = 2^{11} \cdot 7^1$, $b = 2^5 \cdot 7^5$, $c = 2^2 \cdot 7^2$~~

Значит $abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} = 2^{28} \cdot 7^{39}$

Пример: $a = 2^{11} \cdot 7^1$, $b = 2^5 \cdot 7^5$, $c = 2^{12} \cdot 7^2$

Ответ: $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$\frac{a}{b}$ - несок. дроби \Rightarrow

$$\Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$$

т.к. $\text{НОД}(a, b) = 1$, то

$$\text{НОД}(ab, a+b)$$

$$\text{НОД}(a, a+b) = 1$$

$$\text{НОД}(1, a+b) = 1$$

при $a \geq 2, b \geq 2$

$$\text{НОД}(a+b)^2-9ab, a+b$$

$$\text{НОД}(a+b-9ab, a+b) = 1$$

значит $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ - несок. дроби \Rightarrow значит

мы можем найти такие $a \geq 2$ и $b \geq 2$,
числа $m=1$

$m=1$
Ответ: $m=1$

рассмотрим значение m , мы знаем, что

$$a = 2, b = 3 \quad a = 2, b = 2, \text{ тогда}$$

$$\frac{5}{4+42+9}$$

$$m = 5/$$

Ответ: $m = 3, 5, 7, 10, m = 4$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

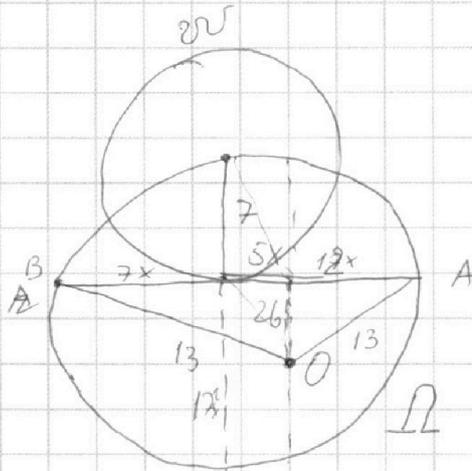
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

ОДЗ:

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad \textcircled{1}$$

$D < 0$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

справа

$$9x - 1 < 0$$

$$9x - 1 > 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 > (9x - 1)^2$$

м.к. $1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$, а

$$2. \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 9x - 1$$

$$x \geq \frac{1}{9}$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 81x^2 - 18x + 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}, \text{ м.к.}$$

↓

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$78x^2 - 21x \leq 0$$

$$x < \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \text{м.к. } \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 9x - 1 \quad \textcircled{2}$$

$$26x^2 - 7x \leq 0$$

$$2. \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq \frac{7}{26} \end{array} \right\}$$

$$x(26x - 7) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left(\frac{1}{9}; \frac{7}{26} \right]$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (9x - 1)^2 + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 3x^2 + 3x + 1$$

$$-9x + 1 - (1 - 9x)^2 = 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$(1 - 9x) - (1 - 9x)^2 = 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1. 1 - 9x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9} \Rightarrow 0 - 0 = 0 \quad \textcircled{3}$$

$$0 \leq \frac{1}{9} \leq \frac{7}{26} \quad \textcircled{4}, \text{ значение } \frac{1}{9} \text{ возможно.}$$

$$2. x \neq \frac{1}{9} \Rightarrow 1 - (1 - 9x) = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \Rightarrow 81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$x \geq 0$

$$x \geq 0$$

$$x \in \left[0; \frac{7}{26} \right]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 69 \cdot 4 = 276 + 36 = 312 > 0$$

$$x = \frac{\pm \sqrt{312} + 6}{69}, \text{ т.к. } -\sqrt{312} + 6 < 0 \text{ м.к.}$$

$\sqrt{312} > 6$, значит

$$x = \frac{\sqrt{312} + 6}{69}$$

$$x = \frac{2\sqrt{78} + 6}{69}$$

$$\frac{2\sqrt{78} + 6}{69} \vee \frac{7}{26}$$

$$\frac{2\sqrt{78} + 6}{69} \vee \frac{52\sqrt{78} + 156}{483}$$

$$\frac{52\sqrt{78} + 156}{483} \vee \frac{327}{161}$$

$$\frac{\sqrt{78}}{161} \vee \frac{327}{52}$$

$$\text{м.к. } \frac{327}{52} < 7, \text{ а } \sqrt{78} > 7, \text{ м.к.}$$

$$78 > 49, \text{ т.к.}$$

$$\sqrt{78} > \frac{327}{52}, \text{ а значит}$$

$$\frac{2\sqrt{78} + 6}{69} > \frac{7}{26}$$

Ответ: $\frac{1}{9}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

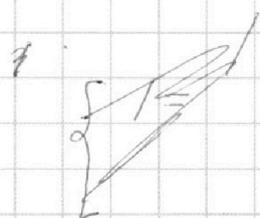
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$r_2 = \frac{|ax+y-8b|}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\begin{cases} y = \frac{8b-12}{\sqrt{a^2+1}} \\ l = \frac{18b}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases}$$

I случай $b \leq 0 \Rightarrow \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} y = \frac{8b-12}{\sqrt{a^2+1}} \\ l = \frac{18b}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \Rightarrow \frac{8b-12}{18b} = 4 \Rightarrow 8b-12=32b \Rightarrow \\ \Rightarrow 24b = -12 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \text{ (X)}$$

II случай $0 \leq b \leq \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} y = \frac{12-8b}{\sqrt{a^2+1}} \\ l = \frac{18b}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \Rightarrow \frac{12-8b}{18b} = 4 \Rightarrow 12-8b=32b \Rightarrow \\ \Rightarrow 40b = 12 \Rightarrow b = \frac{12}{40} \Rightarrow b = \frac{3}{10} \Rightarrow \\ \Rightarrow b = 0,3 \text{ (O)}$$

$$l = \frac{28 \cdot 0,3}{\sqrt{a^2+1}} \Rightarrow \sqrt{a^2+1} = \frac{8 \cdot 3}{7} \text{ (O)}$$

$$\sqrt{a^2+1} = \frac{12}{5}$$

$$a^2+1 = \frac{144}{25}$$

$$a^2 = \frac{119}{25} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ни случай $b \leq 0$

$$\begin{cases} y = \frac{8b-12-8b}{\sqrt{a^2+1}} \\ 1 = \frac{-8b}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \Rightarrow \frac{8b-12}{8b} = 4 \Rightarrow 8b-12=32b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 24b = -12 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = -0,5$$

$$1 = \frac{-8 \cdot (-0,5)}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\sqrt{a^2+1} = 4 \Rightarrow a^2+1=16 \Rightarrow a^2=15 \Rightarrow a = \pm\sqrt{15}$$

Ответ: при $a \in \left\{ -\frac{\sqrt{15}}{25}, -\sqrt{15}, -\frac{\sqrt{15}}{25}, \frac{\sqrt{15}}{25}, \sqrt{15} \right\}$,

найдется такое b , что система имеет ровно 2 решения.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Чтобы выразить
2 неизвестных
нам подходит все точки,
которые лежат
внутри или на границе

У касательных, это
и есть касательные
границы
теперь с помощью

формулы выведем касательную

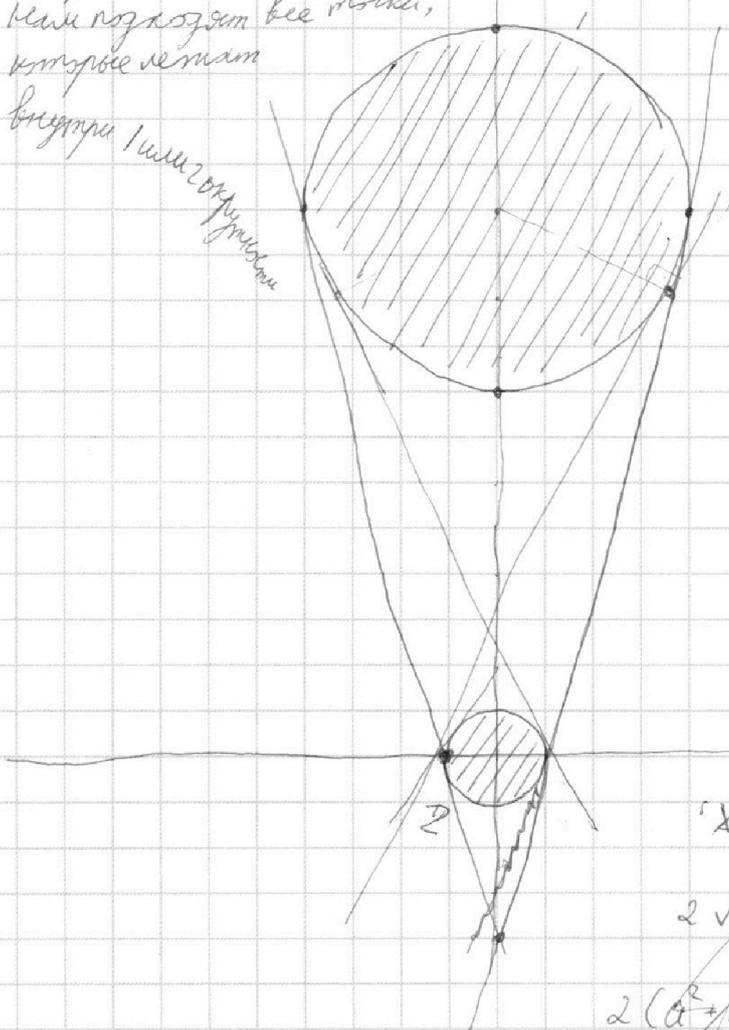
$$\rho = \frac{|ax + y - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

или

$$\rho = \frac{|12 - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

или

$$\rho = \frac{|3 - 2b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$



$$\rho = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$2\sqrt{a^2 + 1} = |3 - 2b|$$

$$2(a^2 + 1) = 9 - 12b + 4$$

$$a^2 + 1 =$$

$$\rho(Ax + By + C)$$

$$\rho = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

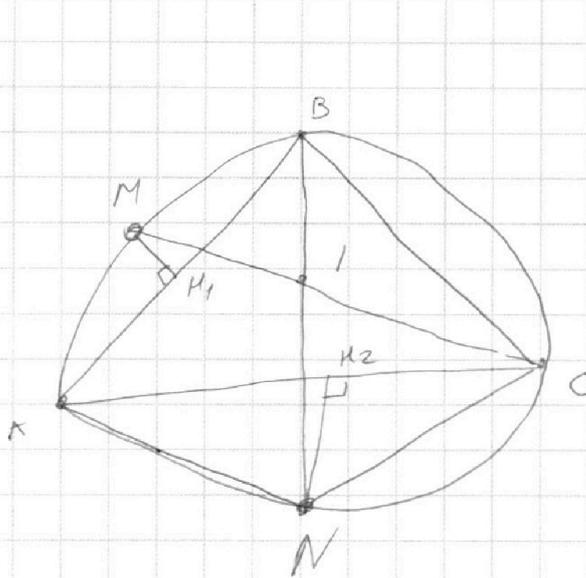
5

6

7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$NH_2 = 2,5$$

$$MH_1 = 5$$

$$AM = MB \text{ (п. к. } \angle MC - \text{ дуг.)}$$

$$AN = NC \text{ (п. к. } \angle BN - \text{ дуг.)}$$

$$AN = IN = NC$$

$$AM = MB = MI$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

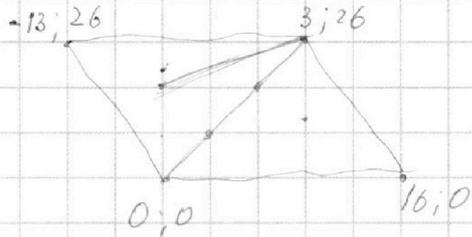
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 = 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 14$$

$$A - 2B = 14$$

x_1, y_1
 x_2, y_2

$$\frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{y_2 - y_1}$$

$$A = 2B + 14$$

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

$$xy_2 - xy_1 - x_1y_2 + x_1y_1 = x_2y - x_1y - y_1x_2 + x_1y_1$$

$$x(y_2 - y_1) + y(x_1 - x_2) + x_2y_1 - x_1y_2 = 0$$

$$Ax + By + C = 0$$

$$26 \cdot 6 = 156$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 7 \\ \hline 483 \end{array}$$

$$y = -\frac{2B+14}{B}x + \frac{C}{B}$$

$$(2B+14)x + By + C = 0$$

$$\begin{array}{r} 78 \overline{) 2} \\ \underline{139} \end{array}$$

$$y = 2 \left(-2 + \frac{14}{B} \right) x + \frac{C}{B}$$

$$2 \cdot 2 + 26 = 0$$

$$32$$

$$6 \cdot 4 = 24$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 69 \\ \times 4 \\ \hline 276 \end{array}$$

$$2\sqrt{28}$$

$$\begin{array}{r} 156 \overline{) 2} \\ \underline{14} \\ 16 \overline{) 78} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3/2 \overline{) 2} \\ \underline{2} \\ 11 \\ \underline{10} \\ 12 \end{array}$$

$$\frac{26}{26 \cdot 8} \leq \frac{7 \cdot 8}{26 \cdot 8}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 118 \overline{) 7} \\ - 7 \\ \hline 48 \\ - 48 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$d_1 + d_2 = 16$$

$$d_2 + d_3 = 17$$

$$d_3 + d_1 = 23$$

$$\begin{array}{r} 483 \\ - 156 \\ \hline 327 \end{array}$$

56

$$\begin{array}{r} 327 \overline{) 13} \\ - 28 \\ \hline 67 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 18 \\ 9 \\ 263 \end{array}$$

16

$$d_1 + d_2$$

$$5 + 12$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 2 \\ \hline 2 \end{array}$$

9 + 7

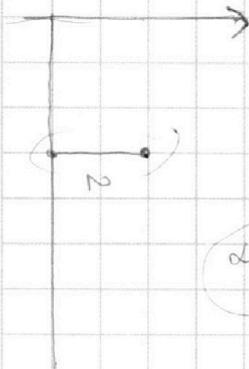
$$d_1 = 11$$

$$d_2 = 5$$

$$d_3 = 12$$

$$327 \overline{) 52}$$

$$52 \cdot 6 = 312$$



$$\beta_1 \geq 5,5$$

$$\beta_1 \leq 11$$

$$0 + 0 + 52$$

$$0 + 29 + 0 = 0$$

$$\begin{array}{r} 327 \\ - 312 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \hline 52 \end{array}$$

$$d_3 - d_2$$

$$\beta_3 \leq 28$$

$$8 - 27$$

$$\beta_3 \geq 19,5$$

$$\beta_1 \geq 5,5$$

$$\beta_2 \geq -10$$

$$\beta_3 \geq 28$$

$$y - 3 = 0$$

$$a = 0$$

$$\beta_1 = 0$$

$$y = 0$$

$$a = 0$$

$$b y + c = 0$$

$$y = -\frac{c}{b}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 13 \end{array}$$

$$a x + b y + c = 0$$

$$y = 0$$

$$x + c = 0$$

$$c = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$x + y = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving a sphere and a triangle.

AC : CB = 17 : 7

CB = AC
CO = 13

24x

DP, PF

$\frac{7}{7x} = \frac{17x}{PF}$

$PF = 17x^2$

$\frac{DP}{BP} = \frac{AP}{PF}$

DP

Diagrams include:

- A sphere with a triangle ABC inscribed in a great circle. Point D is on the sphere's surface, and P is a point on the line segment AD. Lines connect P to B and C. A vertical line through P is labeled DP.
- A right-angled triangle with a hypotenuse and a vertical line from the right angle to the hypotenuse.
- A sphere with a vertical line through its center O, intersecting the surface at P and F. A horizontal line through O intersects the surface at B and A. A point D is on the surface, and lines connect D to P, B, and A.
- A sphere with a horizontal line through its center O, intersecting the surface at B and A. A point D is on the surface, and lines connect D to B and A. A vertical line through D is labeled DP.
- A sphere with a horizontal line through its center O, intersecting the surface at B and A. A point D is on the surface, and lines connect D to B and A. A vertical line through D is labeled DP.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a}{b}$$

$$a+b$$

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 7 \\ a_2 + a &= b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} a^2 - 7ab + b^2 \\ - a^2 + ab \\ \hline - 6ab + b^2 \\ - -6ab + 6b^2 \\ \hline 5b^2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} a+b \\ a-b-3b \end{array} \right.$$

$$a - 3b + \frac{5b^2}{a+b}$$

$$\frac{(a-3b)(a+b) + 5b^2}{a+b} = \frac{a^2 + ab - 3ab - 3b^2 + 5b^2}{a+b}$$

$$\frac{a^2 - 7ab + b^2}{a+b}$$

$$\frac{a+b}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2 - 9ab}{(a+b-3\sqrt{ab})(a+b+3\sqrt{ab})}$$

$$\frac{b(t+1)}{b^2(t^2-7t+1)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}+1}{a\frac{a}{b}-7a+\frac{b}{a}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

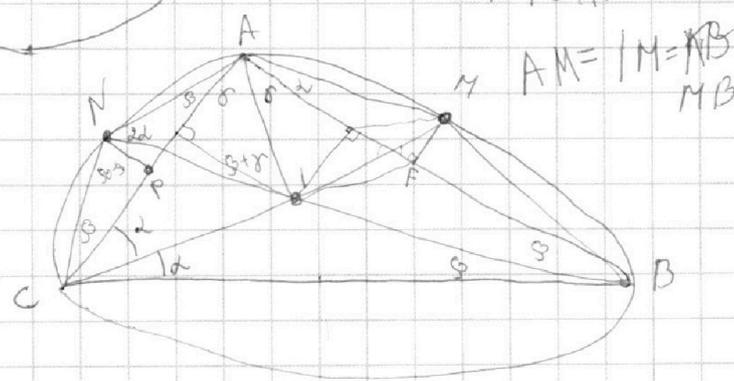
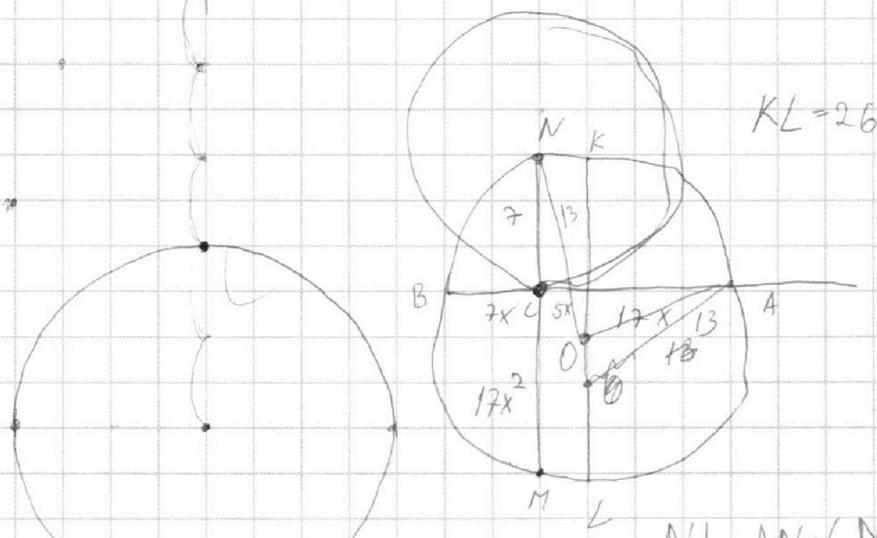
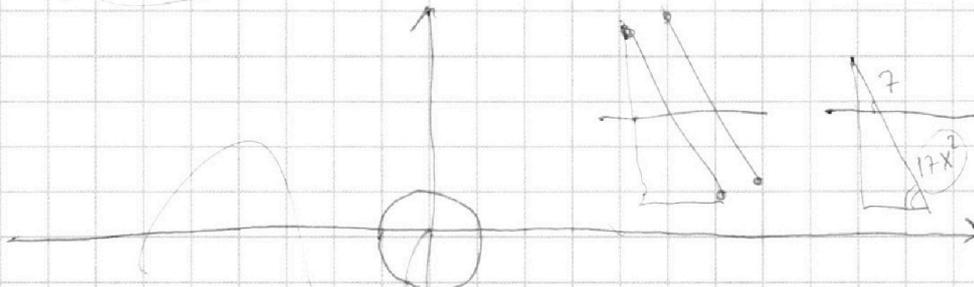


$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$y = -ax + 8b$$

$$\frac{a}{7} = \frac{b}{17x}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{17x^2}$$



$$NI = AN = CN$$

$$AM = MB = MB$$

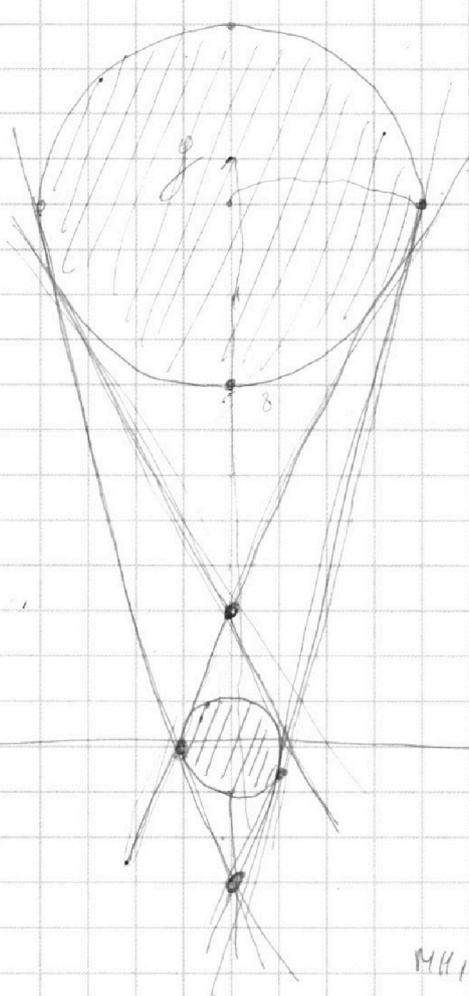
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$y = -ax + 8b$$

$$ax + y - 8b = x^2 + y^2 - 1$$

$$y = ax + 8b$$

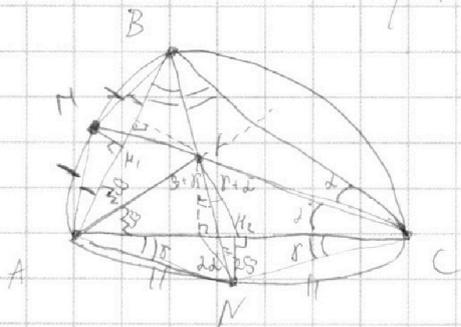
$$\begin{cases} d_1 + d_2 = 15 \\ d_1 + d_3 = 23 \\ d_2 + d_3 = 17 \end{cases}$$

A1-?

$$d_1 + d_2 + d_3 = 27,5$$

$$MH_1 = 5$$

$$NH_2 = 2,5$$



$$|N = AN = NC$$

$$|M = MB = AM$$

$$\beta + \gamma$$

$$90 - \beta$$

$$2\beta + \gamma - 90$$

$$\beta + \gamma - 90 + \beta$$

$$2\beta - 90 + \gamma = 2\beta + \gamma - 90$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Если $b \geq \frac{3}{2}$, то $\begin{cases} 1 = \frac{1-2b-2b^2}{\sqrt{a^2+1}} \\ 4 = \frac{12b-1}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \Rightarrow b = -\frac{1}{3} \text{ (X)}$

Ответ: при $a \in \left\{ \frac{\pm 4\sqrt{6}}{5}; \frac{-4\sqrt{7}}{3}; \frac{-4\sqrt{6}}{5}; \frac{4\sqrt{6}}{5}; \frac{4\sqrt{7}}{3} \right\}$

Итак и рассмотрим значение параметра b , что $\frac{2}{3}$
Итак имеет ровно 2 значения

7

$\frac{5+2}{a+b}$
 $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$
 $\frac{5}{4-4+3}$
 $a+b$

$\frac{3}{1-14+9}$
 $\frac{1}{12}$
 $\frac{7}{84}$
 $\frac{3}{-9}$
 $\frac{12}{84}$
 $a, b \text{ НОД} = 1$

$\text{НОД}(a, b) = 1$

$\frac{2}{3}$
 $\frac{8-28}{4}$
 $\frac{4}{20}$
 $\frac{13}{5}$
 $\frac{5}{31}$
 $\frac{2+3}{4-42-9}$
 $a = p_1 - p_2$
 $b = p$
 $42 = 13$

$(a+b)^2 - 9ab$

$a+b$ ab

$a = p_1 - p_2$
 $b = p$
 $42 = 13$

$\frac{2}{3}$
 $\frac{5}{7}$
 $\frac{3}{4}$
 $\frac{5}{-70+25}$

$\frac{5}{-35} = \frac{1}{-7}$
 $(a+b)^2 - 9ab$

$a^2 - 4ab + b^2 - 9ab + ab$

$\frac{3+5}{8-7 \cdot 15+25}$

$\frac{7 \cdot 15}{15-39}$
 $\frac{105}{-24}$
 $\frac{71}{39-105} = -71$

$a(a-4b) + b(b-9a) + ab$

$p_3 = \dots$

$\frac{8}{8-105+25}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Исходно

$$1 = \frac{1-8b}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$12-8b = 1-8b \Rightarrow \frac{12-8b}{1-8b} = 9 \Rightarrow$$

$$12-8b = 9-72b \Rightarrow 64b = -3 \Rightarrow b = -\frac{3}{64} \quad (\otimes)$$

$$1 = \frac{1+8 \cdot \frac{1}{14}}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\sqrt{a^2+1} = \frac{11}{3}$$

$$a^2+1 = \frac{121}{9}$$

$$a^2 = \frac{112}{9} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{112}}{3} = \pm \frac{4\sqrt{7}}{3}$$

$$b = -\frac{2}{14} = -\frac{1}{7} \quad (\otimes)$$

$$d = \frac{1+8 \cdot \frac{1}{14}}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1+\frac{2}{7}}{\frac{11}{3}} = \frac{\frac{9}{7}}{\frac{11}{3}} = \frac{27}{77}$$

a; b

$$a^2+1 = \frac{169}{49} \Rightarrow a = \pm \frac{13}{7}$$

$$a^2 = \frac{169-49}{49} = \frac{120}{49} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{120}}{7} = \pm \frac{2\sqrt{30}}{7}$$

Исходно:

$$\begin{cases} 1 = \frac{8b-1}{\sqrt{a^2+1}} \\ 8 = \frac{12-8b}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases}$$

$$1 = \frac{8b-1}{\sqrt{a^2+1}} \Rightarrow 8b-1 = \sqrt{a^2+1}$$

$$8 = \frac{12-8b}{\sqrt{a^2+1}} \Rightarrow 12-8b = 8\sqrt{a^2+1}$$

$$\frac{8b-1}{8b-1} = \frac{12-8b}{8b-1} \Rightarrow 12-8b = 8(8b-1)$$

$$12-8b = 64b-8 \Rightarrow 72b = 20 \Rightarrow b = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

$$40b = 16 \Rightarrow b = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad (\checkmark)$$

a; b

$$\left(-\frac{\sqrt{96}}{5}, \frac{2}{5}\right); \left(\frac{\sqrt{96}}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

$$1 = \frac{16}{5} - 1 = \frac{11}{5} \Rightarrow \sqrt{a^2+1} = \frac{11}{5}$$

$$a^2 = \frac{121}{25} - 1 = \frac{96}{25} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{96}}{5} = \pm \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = 2^{15} 7^{11}$$

a

$$bc = 2^{17} 7^{18}$$

$$ac = 2^{23} 7^{39}$$

$$ab = 2^{15} 7^{11}$$

$$bc = 2^{17} 7^{18}$$

$$ac = 2^{23} 7^{39}$$

$$ab = 2^{15} 7^{11}$$

$$bc = 2^{17} 7^{18}$$

$$ac = 2^{23} 7^{39}$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{55} 7^{68}$$

$$abc = 2^{22.5} 7^{27.5}$$

$$ab = k_1 \cdot 2^{15} 7^{11}$$

$$bc = k_2 \cdot 2^{17} 7^{18}$$

$$ac = k_3 \cdot 2^{23} 7^{39}$$

$$(abc)^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2$$

$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$

$\gcd(a, b) = 1$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$a+b \mid \text{НОД}(a+b, a^2-7ab+b^2) = m$$

$$\begin{array}{r|l} a^2-7ab+b^2 & a+b \\ a^2+ab & a-8b \\ \hline -8ab+b^2 & \end{array}$$

$$\frac{a^2-7ab+b^2}{a+b}$$

$$\frac{(a-b)^2-9ab}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2-9ab}{a+b} = a+b - \frac{9ab}{a+b}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$\frac{a}{b}$~~

~~$7a^2 - 7ab$~~

$a^2 - 7\sqrt{\ln(a,b)} + b^2$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = (9x - 1) + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 7\left(\frac{a}{b}\right) + 1$$

$$t^2 - 7t + 1$$

$$D = 49 - 4 = 45$$

$$\frac{a^2}{a} = a < 0$$

$$a < 0$$

~~$\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$~~

b^2

$$1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

$$9x - 1 \leq \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$t = \frac{7 \pm 3\sqrt{5} + 7}{2}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (9x - 1)^2 + 3x^2 + 3x + 1$$

$a + b$

~~$8x^2$~~

b^2

$$1, x = \frac{1}{9}$$

$$-9x + 1 - (9x - 1)^2 = 2(9x - 1)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-(9x - 1) - (9x - 1)^2 = 2(9x - 1)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-1 - (9x - 1) = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$