



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$ ,  $b = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$ ,  $c = 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}$ , тогда

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 15 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17 \\ \alpha_3 + \alpha_1 \geq 23 \end{cases} \Rightarrow 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 55 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 27,5$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$

ио м.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , но  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 11 \\ \beta_2 + \beta_3 = 16 \\ \beta_3 - \beta_1 = 39 \end{cases} \Rightarrow 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 68 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34$$

ио степень единицы не может быть меньше чем  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ , поэтому градусы увеличиваются  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 39$

ио  $\alpha_1 \geq 10$ , значит  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 39$

~~$abc = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2} \cdot 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3} = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} = 2^{27,5} \cdot 7^{39}$~~

~~$= 2^{27,5} \cdot 7^{39}$ , ио м.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , но степень единицы не может быть меньше чем  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$~~

~~ио степень единицы не может быть меньше чем  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ , значит  $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$~~

~~Пример:  $a = 2^{11} \cdot 7^1$ ,  $b = 2^5 \cdot 7^5$ ,  $c = 2^2 \cdot 7^2$~~

Значит  $abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} = 2^{28} \cdot 7^{39}$

Пример:  $a = 2^{11} \cdot 7^1$ ,  $b = 2^5 \cdot 7^5$ ,  $c = 2^{12} \cdot 7^2$

Ответ:  $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$\frac{a}{b}$  - не св. дроби  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$$

т.к.  $\text{НОД}(a, b) = 1$ , то

$$\text{НОД}(ab, a+b)$$

$$\text{НОД}(a, a+b) = 1$$

$$\text{НОД}(1, a+b) = 1$$

при  $a \geq 2, b \geq 2$

$$\text{НОД}(a+b)^2-9ab, a+b$$

$$\text{НОД}(a+b-9ab, a+b) = 1$$

$\Downarrow$

значит  $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$  - не св. дроби  $\Rightarrow$  значит

$m=1$

тогда можно найти числа  $a \geq 2$  и  $b \geq 2$ ,  
числа  $m=1$

Ответ:  $m=1$

рассмотрим значение  $m$ , тогда получим

$$a=2, b=3 \quad a=2, b=2, \text{ тогда}$$

$$\frac{5}{4+42+9}$$

$$m=3/10$$

Ответ:  $m=3/10, m=4$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

ОДЗ:

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad \textcircled{1}$$

$D < 0$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

справа

$$9x - 1 < 0$$

$$9x - 1 > 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 > (9x - 1)^2$$

м.к.  $1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$ , а

$$2. \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 9x - 1$$

$$x \geq \frac{1}{9}$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 81x^2 - 18x + 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}, \text{ тогда}$$

↓ тогда

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$78x^2 - 21x \leq 0$$

$$x < \frac{1}{9} \Rightarrow \text{тогда}$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 9x - 1 \quad \textcircled{2}$$

$$26x^2 - 7x \leq 0$$

$$2. \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq \frac{7}{26} \end{array} \right\}$$

$$x(26x - 7) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq \frac{7}{26} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow x \in \left[ \frac{1}{9}; \frac{7}{26} \right]$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (9x - 1)^2 + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 3x^2 + 3x + 1$$

$$-9x + 1 - (1 - 9x)^2 = 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$(1 - 9x) - (1 - 9x)^2 = 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1. 1 - 9x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9} \Rightarrow 0 - 0 = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$0 \leq \frac{1}{9} \leq \frac{7}{26} \quad \textcircled{2}, \text{ значение } \frac{1}{9} \text{ подходит.}$$

$$2. x \neq \frac{1}{9} \Rightarrow 1 - (1 - 9x) = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \Rightarrow 81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$x \geq 0$

$$x \geq 0$$

$$x \in \left[ 0; \frac{7}{26} \right]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 69 \cdot 4 = 276 + 36 = 312 > 0$$

$$x = \frac{\pm \sqrt{312} + 6}{69}, \text{ т.к. } -\sqrt{312} + 6 < 0 \text{ м.к.}$$

$\sqrt{312} > 6$ , значит

$$x = \frac{\sqrt{312} + 6}{69}$$

$$x = \frac{2\sqrt{78} + 6}{69}$$

$$\frac{2\sqrt{78} + 6}{69} \vee \frac{7}{26}$$

$$\frac{2\sqrt{78} + 6}{69} \vee \frac{52\sqrt{78} + 156}{483}$$

$$\frac{52\sqrt{78}}{483} \vee \frac{327}{156}$$

$$\frac{\sqrt{78}}{156} \vee \frac{327}{52}$$

$$\text{м.к. } \frac{327}{52} < 7, \text{ а } \sqrt{78} > 7, \text{ м.к.}$$

$$78 > 49, \text{ т.к.}$$

$$\sqrt{78} > \frac{327}{52}, \text{ а значит}$$

$$\frac{2\sqrt{78} + 6}{69} > \frac{7}{26}$$

Ответ:  $\frac{1}{9}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

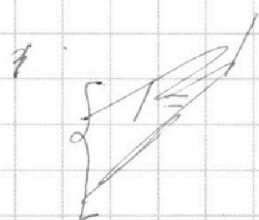
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$r_2 = \frac{|ax+y-8b|}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\begin{cases} y = \frac{8b-12}{\sqrt{a^2+1}} \\ l = \frac{18b}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases}$$

I случай  $b \leq 0 \Rightarrow \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} y = \frac{8b-12}{\sqrt{a^2+1}} \\ l = \frac{18b}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \Rightarrow \frac{8b-12}{18b} = 4 \Rightarrow 8b-12=32b \Rightarrow \\ \Rightarrow 24b = -12 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \text{ (X)}$$

II случай  $0 \leq b \leq \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} y = \frac{12-8b}{\sqrt{a^2+1}} \\ l = \frac{18b}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \Rightarrow \frac{12-8b}{18b} = 4 \Rightarrow 12-8b=32b \Rightarrow \\ \Rightarrow 40b = 12 \Rightarrow b = \frac{12}{40} \Rightarrow b = \frac{3}{10} \Rightarrow \\ \Rightarrow b = 0,3 \text{ (O)}$$

$$l = \frac{28 \cdot 0,3}{\sqrt{a^2+1}} \Rightarrow \sqrt{a^2+1} = \frac{8 \cdot 3}{7} \text{ (O)}$$

$$\sqrt{a^2+1} = \frac{12}{5}$$

$$a^2+1 = \frac{144}{25}$$

$$a^2 = \frac{119}{25} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ни случай  $b \leq 0$

$$\begin{cases} y = \frac{8b-12-8b}{\sqrt{a^2+1}} \\ 1 = \frac{-8b}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \Rightarrow \frac{8b-12}{8b} = 4 \Rightarrow 8b-12=32b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 24b = -12 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = -0,5$$

$$1 = \frac{-8 \cdot (-0,5)}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\sqrt{a^2+1} = 4 \Rightarrow a^2+1=16 \Rightarrow a^2=15 \Rightarrow a = \pm\sqrt{15}$$

Ответ: при  $a \in \left\{ -\frac{\sqrt{15}}{25}, -\sqrt{15}, -\frac{\sqrt{15}}{25}, \frac{\sqrt{15}}{25}, \sqrt{15} \right\}$ ,

найдется такое  $b$ , что система имеет ровно 2 решения.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Чтобы выразить  
2 неизвестных  
нам подходит все точки,  
которые лежат  
внутри 1 или 2 окружностей

У касательных, это  
и есть касательные  
границы  
теперь с помощью

формулы выведем касательную

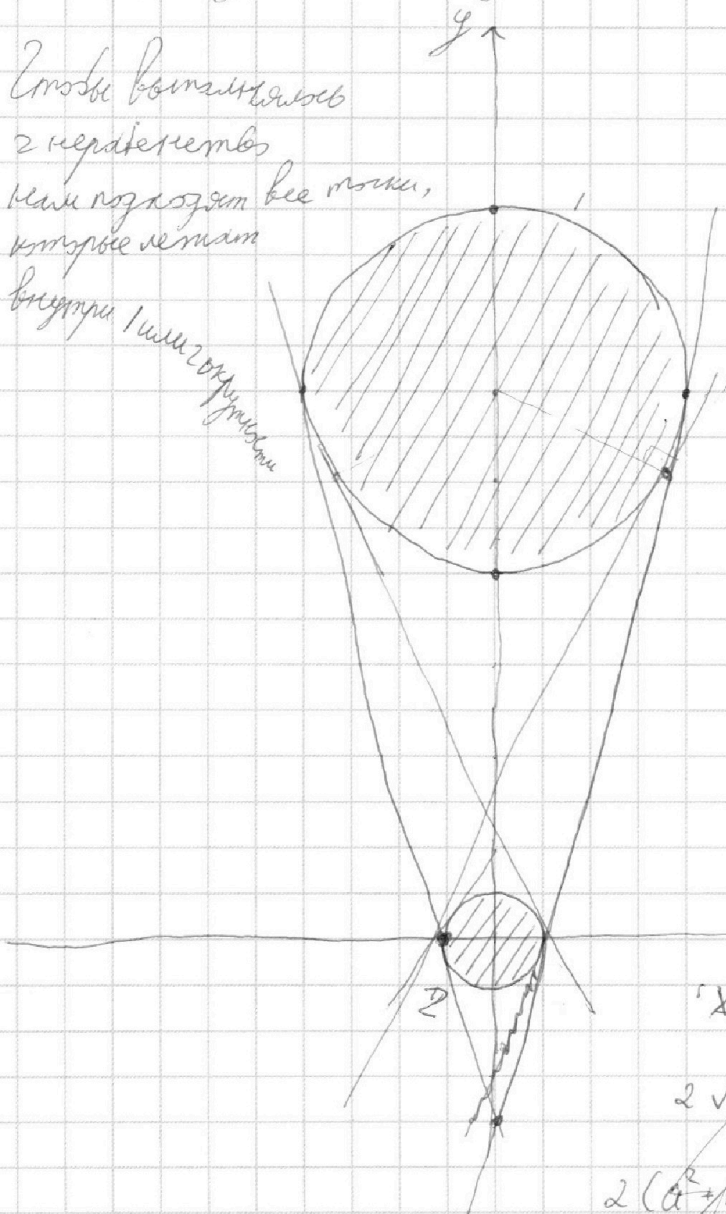
$$\rho = \frac{|ax + y - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

или

$$\rho = \frac{|12 - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

или

$$\rho = \frac{|3 - 2b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$



$$\rho = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$2\sqrt{a^2 + 1} = |3 - 2b|$$

$$2(a^2 + 1) = 9 - 12b + 4$$

$$a^2 + 1 =$$

$$\rho(Ax + By + C)$$

$$\rho = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

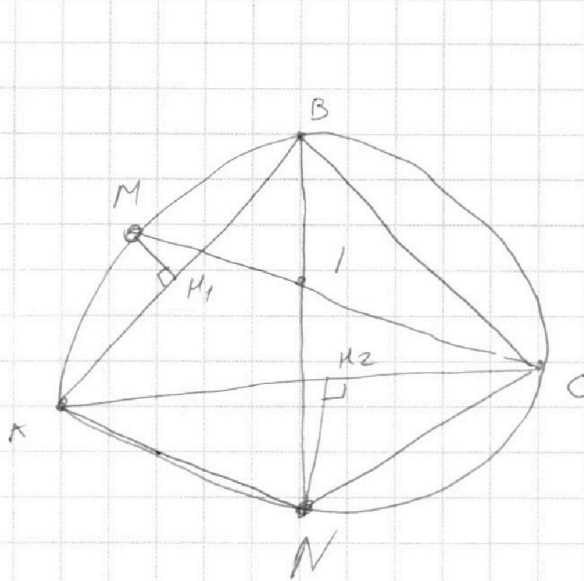
5

6

7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$NH_2 = 2,5$$

$$MH_1 = 5$$

$$AM = MB \text{ (п. к. } \angle MC - \text{ дуг.)}$$

$$AN = NC \text{ (п. к. } \angle BN - \text{ дуг.)}$$

$$AN = IN = NC$$

$$AM = MB = MI$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

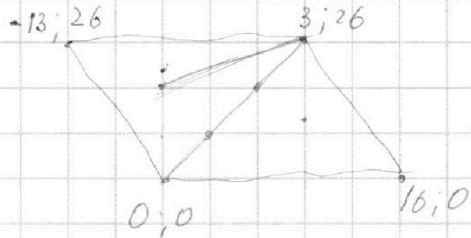
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 = 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 14$$

$$A - 2B = 14$$

$x_1, y_1$   
 $x_2, y_2$

$$\frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{y_2 - y_1}$$

$$A = 2B + 14$$

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

$$xy_2 - xy_1 - x_1y_2 + x_1y_1 = x_2y - x_1y - y_1x_2 + x_1y_1$$

$$x(y_2 - y_1) + y(x_1 - x_2) + x_2y_1 - x_1y_2 = 0$$

$$Ax + By + C = 0$$

$$26 \cdot 6 = 156$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 7 \\ \hline 483 \end{array}$$

$$y = -\frac{2B+14}{B}x + \frac{C}{B}$$

$$(2B+14)x + By + C = 0$$

$$\begin{array}{r} 78 \overline{) 2} \\ \underline{139} \end{array}$$

$$y = 2 \left( -2 + \frac{14}{B} \right) x + \frac{C}{B}$$

$$2 \cdot 2 + 26 = 0$$

$$32$$

$$6 \cdot 4 = 24$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 69 \\ \times 4 \\ \hline 276 \end{array}$$

$$2\sqrt{28}$$

$$\begin{array}{r} 156 \overline{) 2} \\ \underline{14} \\ 16 \overline{) 78} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3/2 \overline{) 2} \\ \underline{2} \\ 11 \\ \underline{10} \\ 12 \end{array}$$

$$\frac{26}{26 \cdot 8} \leq \frac{7 \cdot 8}{26 \cdot 8}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 118 \overline{) 7} \\ - 7 \\ \hline 48 \\ - 48 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$d_1 + d_2 = 16$$

$$d_2 + d_3 = 17$$

$$d_3 + d_1 = 23$$

$$\begin{array}{r} 483 \\ - 156 \\ \hline 327 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \cdot 28 \\ \hline 327 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 327 \overline{) 13} \\ - 28 \\ \hline 67 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 18 \\ 9 \\ 263 \end{array}$$

$$d_1 + d_2$$

$$5 + 12$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ \hline 2 \end{array}$$

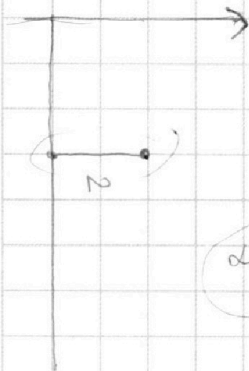
$$d_1 = 11$$

$$d_2 = 5$$

$$d_3 = 12$$

$$327 \overline{) 52}$$

$$52 \cdot 6 = 312$$



$$B_1 \geq 5,5$$

$$B_1 \leq 11$$

$$d_3 - d_2$$

$$B_3 \leq 28$$

$$B_3 \geq 19,5$$

$$B_1 \geq 5,5$$

$$B_2 \geq -10$$

$$B_3 \geq 28$$

$$y - 3 = 0$$

$$8 - 27$$

$$13 \quad 12$$

$$a = 0$$

$$B_1 = 0$$

$$y = 0$$

$$a = 0 \quad b y + c = 0$$

$$y = -\frac{c}{b}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 13 \end{array}$$

$$ax + by + c = 0$$

$$y = 0$$

$$x + c = 0$$

$$c = 0$$

$$\begin{array}{r} 327 \\ - 312 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\frac{15}{52}$$

3



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving a sphere and a triangle.

**AC : CB = 17 : 7**

**CB = AC**  
**CO = 13**

**24x**

**DP, PF**

$\frac{7}{7x} = \frac{17x}{PF}$

$PF = 17x^2$

$\frac{DP}{BP} = \frac{AP}{PF}$

**DP**

Diagrams include:
 

- A sphere with a triangle ABC inscribed on its surface. Point D is on the arc BC, and P is on the arc AB. Lines connect P to D, D to C, and P to C. A point O is marked at the center of the sphere.
- A 2D projection of the sphere showing the triangle ABC and the points D and P.
- A right-angled triangle with legs of length 7 and 17x, and hypotenuse PF.
- A diagram showing the intersection of two circles, with points A, B, and C on the circumference.
- A diagram showing a sphere with points P, D, B, A, and F marked on its surface.
- A diagram showing a sphere with points B, A, and P marked on its surface.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a}{b}$$

$$a+b$$

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 7 \\ a_2 + a &= b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} a^2 - 7ab + b^2 \\ - a^2 + ab \\ \hline - 6ab + b^2 \\ - -6ab + 6b^2 \\ \hline 5b^2 \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} a+b \\ a-b-3b \\ \hline \end{array}$$

$$a - 3b + \frac{5b^2}{a+b}$$

$$\frac{(a-3b)(a+b) + 5b^2}{a+b} = \frac{a^2 + ab - 3ab - 3b^2 + 5b^2}{a+b}$$

$$\frac{a^2 - 7ab + b^2}{a+b}$$

$$\frac{a+b}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2 - 9ab}{(a+b-3\sqrt{ab})(a+b+3\sqrt{ab})}$$

$$\frac{b(t+1)}{b^2(t^2-7t+1)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}+1}{a\frac{a}{b}-7a+\frac{b}{a}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

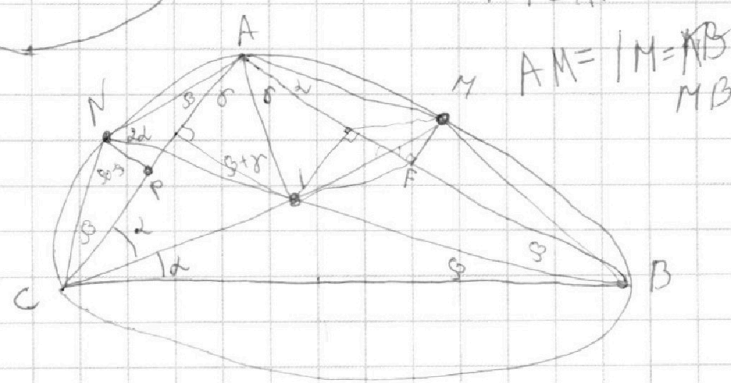
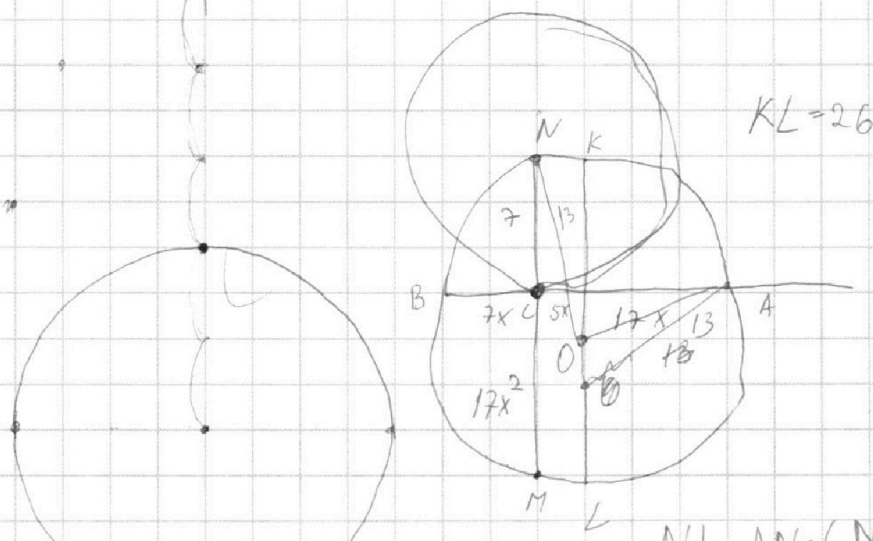
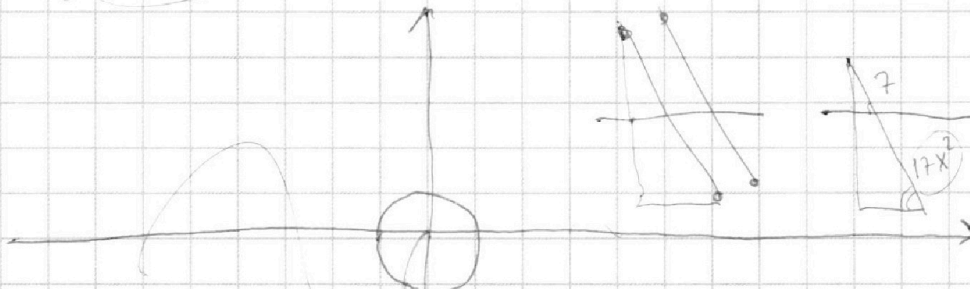
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$y = -ax + 8b$

$\frac{a}{7} = \frac{b}{17x}$   
 $\frac{a}{b} = \frac{7}{17x^2}$



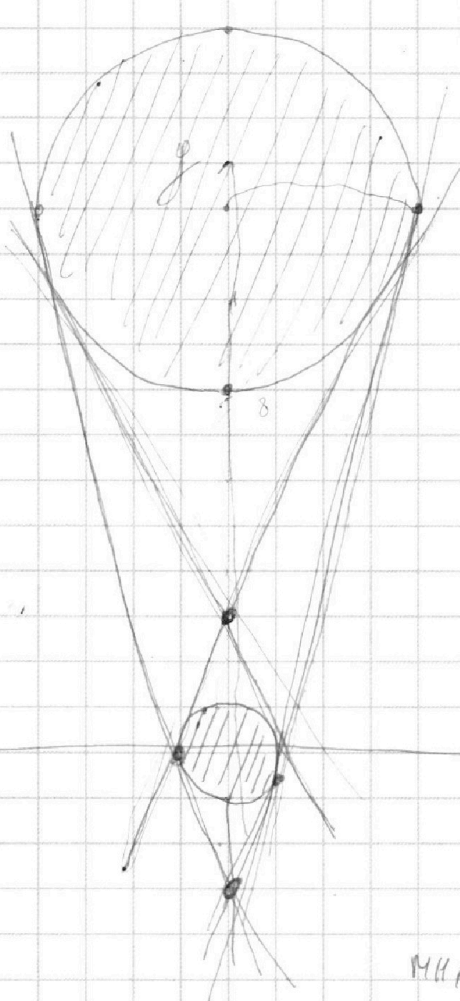
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2 \cdot 2^2 = 2^{20}$$

$$y = -ax + 8b$$

$$ax + y - 8b = x^2 + y^2 - 1$$

$$y = 2x + 8b$$

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = 15 \\ d_1 + d_3 = 23 \\ d_2 + d_3 = 17 \end{cases}$$

A1-?

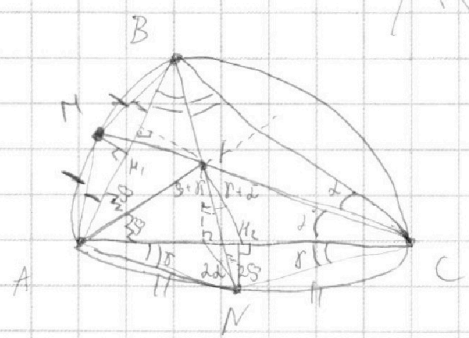
$$d_1 + d_2 + d_3 = 27,5$$

$$MH_1 = 5$$

$$NH_2 = 2,5$$

$$|N| = AN = NC$$

$$|M| = MB = AM$$



$$\beta + \gamma$$

$$90 - \beta$$

$$2\beta + \gamma - 90$$

$$\beta + \gamma - 90 + \beta$$

$$2\beta - 90 + \gamma = 2\beta + \gamma - 90$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Если  $b \geq \frac{3}{2}$ , то  $\begin{cases} 1 = \frac{1-2b-2b^2}{\sqrt{a^2+1}} \\ 4 = \frac{12b-1}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \Rightarrow b = -\frac{1}{3} \text{ (X)}$

Ответ: при  $a \in \left\{ \frac{\pm 4\sqrt{6}}{5}; \frac{-4\sqrt{7}}{3}; \frac{-4\sqrt{6}}{5}; \frac{4\sqrt{6}}{5}; \frac{4\sqrt{7}}{3} \right\}$

Итак и найдем значение параметра  $b$ , что  $\frac{2}{3}$   
Итак имеет ровно 2 решения

7

$\frac{5+2}{a+b}$   
 $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$   
 $\frac{5}{4-4+3}$   
 $a+b$

$\frac{3}{1-14+9}$   
 $\frac{1}{12}$   
 $\frac{7}{84}$   
 $\frac{3}{-9}$   
 $a, b \text{ НОД} = 1$

$\text{НОД}(a, b) = 1$

$\frac{2}{3}$   
 $\frac{8-28}{47}$   
 $\frac{4}{20}$   
 $\frac{13}{5}$   
 $\frac{9}{31}$   
 $\frac{2+3}{4-42-9}$   
 $a = p_1 - p_2$   
 $b = p$   
 $42 = 13$

$(a+b)^2 - 9ab$

$a+b$   $ab$

$a = p_1 - p_2$   
 $b = p$   
 $42 = 13$

$\frac{2}{3}$   
 $\frac{5}{7}$   
 $\frac{3}{4}$   
 $\frac{5}{-70+25}$

$\frac{5}{-35} = \frac{1}{-7}$   
 $(a+b)^2 - 9ab$

$a^2 - 4ab + b^2 - 9ab + ab$

$\frac{3+5}{8-7 \cdot 15+25}$

$\frac{7 \cdot 15}{15-39}$   
 $\frac{-71}{39-105} = -71$

$a(a-4b) + b(b-9a) + ab$

$p_3 = \dots$

$\frac{8}{8-105+25}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Исходно

$$1 = \frac{1-8b}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\frac{12-8b}{\sqrt{a^2+1}} = 9 \Rightarrow \frac{12-8b}{1-8b} = 9 \Rightarrow$$

$$12-8b = 9-72b \Rightarrow 64b = -3 \Rightarrow b = -\frac{1}{32} \text{ (X)}$$

$$1 = \frac{1+8 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{a^2+1}} \Rightarrow \sqrt{a^2+1} = \frac{1+8 \cdot \frac{1}{3}}{1} = \frac{11}{3}$$

$$a^2+1 = \frac{121}{9} \Rightarrow a^2 = \frac{120}{9} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{120}}{3} = \pm \frac{2\sqrt{30}}{3}$$

$$a = \pm \frac{2\sqrt{30}}{3} \Rightarrow a^2 = \frac{120}{9} \Rightarrow a^2+1 = \frac{121}{9}$$

$$\sqrt{a^2+1} = \frac{11}{3}$$

$$a^2+1 = \frac{121}{9}$$

a; b

$$a^2+1 = \frac{169}{49} \Rightarrow a^2 = \frac{168}{49} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{168}}{7} = \pm \frac{2\sqrt{42}}{7}$$

$$1 = \frac{8b-8b-1}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{-1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$8 = \frac{12-8b-12}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{-8b}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$1 = \frac{8b-1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$8 = \frac{12-8b}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\frac{8b-1}{8b-1} = \frac{12-8b}{8b-1} = 9 \Rightarrow 12-8b = 72b-9 \Rightarrow 80b = 21 \Rightarrow b = \frac{21}{80}$$

a; b

$$\left(-\frac{\sqrt{96}}{5}, \frac{2}{5}\right); \left(\frac{\sqrt{96}}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

$$2b-20 \Rightarrow b = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

$$40b = 16 \Rightarrow b = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \text{ (V)}$$

$$1 = \frac{16}{5} - 1 \Rightarrow \sqrt{a^2+1} = \frac{11}{5} \Rightarrow a^2 = \frac{121}{25} - 1 = \frac{96}{25} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{96}}{5} = \pm \frac{4\sqrt{6}}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = 2^{15} 7^{11}$$

$a$

$$bc = 2^{17} 7^{18}$$

$$ac = 2^{23} 7^{39}$$

$$ab = 2^{15} 7^{11}$$

$$bc = 2^{17} 7^{18}$$

$$ac = 2^{23} 7^{39}$$

$$ab = 2^{15} 7^{11}$$

$$bc = 2^{17} 7^{18}$$

$$ac = 2^{23} 7^{39}$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{55} 7^{68}$$

$$abc = 2^{22.5} 7^{27.5}$$

$$ab = k_1 \cdot 2^{15} 7^{11}$$

$$bc = k_2 \cdot 2^{17} 7^{18}$$

$$ac = k_3 \cdot 2^{23} 7^{39}$$

$$(abc)^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2$$

$$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$$

$$\gcd(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$a+b \mid \text{НОД}(a+b, a^2-7ab+b^2) = m$$

$$\begin{array}{r|l} a^2-7ab+b^2 & a+b \\ a^2+ab & a-8b \\ \hline -8ab+b^2 & \end{array}$$

$$\frac{a^2-7ab+b^2}{a+b}$$

$$\frac{(a-b)^2-9ab}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2-9ab}{a+b} = a+b - \frac{9ab}{a+b}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$\frac{a}{b}$~~

~~$7a^2 - 7ab$~~

$a^2 - 7\sqrt{\ln(a,b)} + b^2$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = (9x - 1) + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 7\left(\frac{a}{b}\right) + 1$$

$$t^2 - 7t + 1$$

$$D = 49 - 4 = 45$$

$$\frac{a^2}{a} = a < 0$$

$$a < 0$$

$$\left(\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}\right)$$

$b^2$

$$1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

$$9x - 1 \leq \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$t = \frac{7 \pm 3\sqrt{5} + 7}{2}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (9x - 1)^2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$a + b$

~~$8x^2$~~

$b^2$

$$1, x = \frac{1}{9}$$

$$-9x + 1 - (9x - 1)^2 = 2(9x - 1)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-(9x - 1) - (9x - 1)^2 = 2(9x - 1)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-1 - (9x - 1) = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$