



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1.

Т.к.  $ac : 7^{39}$ , то  $abc : 7^{35}$  ~~или~~  $abc$

Обозначим за  $a_2, b_2, c_2$  степени вхождения 2  
в  $a, b$  и  $c$  соответственно. Тогда  $ab : 2^{15} \Rightarrow a_2 + b_2 \geq 15$   
 $bc : 2^{17} \Rightarrow b_2 + c_2 \geq 17$ ;  $ac : 2^{23} \Rightarrow a_2 + c_2 \geq 23$

Произведение чисел делится на множитель в степени суммы  
вхождений этого множителя в <sup>числа</sup> множители произведения  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow abc : 2^{a_2 + b_2 + c_2}$

Сложим 3 пер-ва, полученные выше:  $2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 55$

Т.к. числа натуральные, степень вхождения тоже натуральная  
или 0  $\Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 28 \Rightarrow abc : 2^{28}$

$abc : 7^{39}$   
 $abc : 2^{28} \Rightarrow abc : 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$   
т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$

$7$  и  $2$  взаимно просты

Приведем пример где  $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$ :  $a = 2^{10} \cdot 7^{11}$   
 $b = 2^5 \cdot 7^{18}$   
 $c = 2^{13} \cdot 7^{10}$

$ab = 2^{15} \cdot 7^{29}$ ;  $2^{15} \cdot 7^{29}$   
 $\Rightarrow bc = 2^{18} \cdot 7^{28}$ ;  $2^{17} \cdot 7^{18}$   
 $ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$ ;  $2^{23} \cdot 7^{39}$

Ответ:  $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2. ~~4~~

$\frac{a}{b}$  - несократима  $\Rightarrow \text{НОД}(a; b) = 1$

Сократить можно на  $\text{НОД}(a+b; a^2 - 7ab + b^2) \Rightarrow$  по алгоритму

Евклида  $\text{НОД}(a+b; a^2 - 7ab + b^2) = \text{НОД}(a+b; a^2 - 7ab + b^2 - a(a+b)(a-b))$

$= \text{НОД}(a+b; 9b^2)$

Т.к.  $\text{НОД}(a; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; 9b^2) = \text{НОД}(a+b; 9) \leq 9$

Приведем пример для  $m=9$ :  $a=4$ ;  $b=5$

$$\frac{4+5}{16-140+25} = -\frac{9}{99} = -\frac{1}{11}$$

Ответ: 9

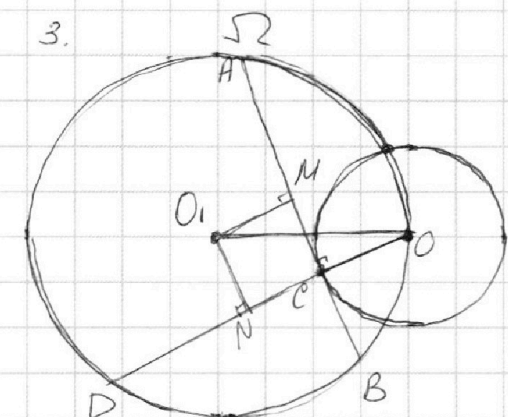
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $AC = 17x \Rightarrow CB = 7x$   
 т.к.  $AB$  - касательная  $\omega \Rightarrow O_1C \perp AB$   
 $M$  - середина  $AB \Rightarrow O_1M \perp AB$   
 $MB = 12x \Rightarrow MC = 5x$

$D$  - пересечение  $OC$  и  $\Omega$   
 $N$  - середина  $OD \Rightarrow O_1N \perp OD$   
 $CO \cdot CD = AC \cdot BC$   
 $7 \cdot CD = 17x \cdot 7x$   
 $CD = 17x^2$

$$ON = \frac{17x^2 + 7}{2}$$

$ON \perp OD \Rightarrow ON \parallel MC$ , аналогично  $O_1M \parallel NC \Rightarrow O_1MNC$  - параллелограмм  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow O_1N = MC = 5x$$

В  $\triangle O_1ON$  по т. Пифагора:

$$O_1N^2 + NO^2 = O_1O^2$$

$$25x^2 + \left(\frac{17x^2 + 7}{2}\right)^2 = 13^2$$

$$100x^2 + 289x^4 + 2 \cdot 7 \cdot 17x^2 + 49 - 169 \cdot 4 = 0$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$(x^2 - 1)(289x^2 + 627) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -\frac{627}{289} < 0 \end{cases} \quad x^2 > 0 \text{ противоречие}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 < 0 \end{cases} \quad x \text{ - длина} \Rightarrow > 0$$

$$x = 1$$

$$AB = 24(17+7)x = 24x = 24$$

0+вет: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4.

Сделаем замену:  $A = 3x^2 + 3x + 1$ ,  $B = 1 - 9x$ , тогда:

ОДЗ:  $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

$3(x-1)^2 - 1 \geq 0$

$(x-1)^2 \geq \frac{1}{3}$

$\begin{cases} x-1 \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x-1 \leq -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$

$D = 9 - 4 \cdot 3 = -3 < 0$   
 $3 > 0$

$\Rightarrow 3x^2 + 3x + 1 > 0$

$\sqrt{A+B} - \sqrt{A} = B \quad | \cdot (\sqrt{A+B} + \sqrt{A})$

$B = B(\sqrt{A+B} + \sqrt{A})$

$B(1 - \sqrt{A+B} - \sqrt{A}) = 0$

$B = 0 \Rightarrow 1 - 9x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$

$\sqrt{A+B} + \sqrt{A} = 1$

$\sqrt{A+B} + \sqrt{A} = 1 \quad | > 0$

$A+B+A+2\sqrt{(A+B)A} = 1$

$2\sqrt{A^2+AB} = 1-A-B \quad | -2A-B \geq 0$

$4(A^2+AB) = 1-4A^2+B^2-4A-2B+4AB \quad | 1-6x^2-6x-2-1+12x$

$1+B^2-4A-2B=0$

$-6x^2+12x-2 \geq 0$

$-6(x-1)^2+4 \geq 0$

$4 \geq 6(x-1)^2$

$2 \geq 3(x-1)^2$

$\frac{2}{3} \geq (x-1)^2$

$-\frac{\sqrt{6}}{3} \leq x-1 \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$

$1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$

Обратная замена переменных:

$1 + 1 - 18x + 81x^2 - 12x^2 - 12x - 4 - 2 + 18x = 0$

$81x^2 - 12x^2 - 12x - 4 = 0$

$69x^2 - 12x - 4 = 0$

$D = 144 + 4 \cdot 69 \cdot 4 =$

$= 144 + 1104 = 1248$

$x = \frac{12 \pm \sqrt{1248}}{2 \cdot 69}$

$\frac{12 + \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} \vee 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

$12 + \sqrt{1248} \vee 2 \cdot 69 + 2 \cdot 23\sqrt{3}$

$12 + 4\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 13} \vee 2 \cdot 69 + 2 \cdot 23\sqrt{3}$

$6 + 2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 13} \vee 69 + 23\sqrt{3}$

$2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 13} - 23\sqrt{3} \vee 63$

$4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13 + 23 \cdot 23 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 23 \cdot \sqrt{2 \cdot 13} \vee 63^2$

$4 \cdot 2 \cdot 13 + 23 \cdot 23 - 4 \cdot 23 \sqrt{2 \cdot 13} \vee 3 \cdot 21 \cdot 21$

$104 + 529 - 1323 < 0 < 4 \cdot 23 \sqrt{2 \cdot 13}$

$\frac{12 + \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} \vee 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$

$12 + 4\sqrt{78} \vee 2 \cdot 69 - 2 \cdot 23\sqrt{6}$

$2\sqrt{78} + 23\sqrt{6} \vee 63$

$4 \cdot 78 + 23^2 \cdot 6 + 2 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 6 \cdot \sqrt{13} \vee 63^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продолжение 4

$$4 \cdot 26 + 23^2 \cdot 2 + 4 \cdot 23 \cdot 2\sqrt{13} \sqrt{3 \cdot 21^2}$$
$$104 + 1058 - 1323 \sqrt{-4 \cdot 23 \cdot 2\sqrt{13}}$$
$$-161 \sqrt{-4 \cdot 23 \cdot 2\sqrt{13}}$$

$$8 \cdot 23\sqrt{13} \sqrt{161}$$

$$8\sqrt{13} \sqrt{7}$$

$$\sqrt{13} > 1 \Rightarrow 8\sqrt{13} > 8 > 7 \Rightarrow \frac{12 + \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} > 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$12 + 24 \cdot \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$6 + 2\sqrt{78} \sqrt{69 - 23\sqrt{3}}$$

$$2\sqrt{78} + 23\sqrt{3} \sqrt{63}$$

$$2\sqrt{26} + 23 \sqrt{21\sqrt{3}}$$

$$4 \cdot 26 + 23^2 + 4 \cdot 23\sqrt{26} \sqrt{21 \cdot 3}$$

$$104 + 529 - 1323 \sqrt{-4 \cdot 23\sqrt{26}}$$

$$4 \cdot 23\sqrt{26} \sqrt{690}$$

$$46\sqrt{26} \sqrt{345}$$

$$46 \cdot 46 \cdot 26 \sqrt{345 \cdot 345}$$

$$55016 \ll 119025$$

$$\Rightarrow \frac{12 + \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$6 - 2\sqrt{78} \sqrt{69 - 23\sqrt{6}}$$

$$23\sqrt{6} - 2\sqrt{78} \sqrt{63}$$

$$23 \cdot 23 \cdot 6 + 2 \cdot 2 \cdot 78 - 2 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 6\sqrt{13} \sqrt{63 \cdot 63}$$

$$2 \cdot 23 \cdot 23 + 8 \cdot 13 - 8 \cdot 23\sqrt{13} \sqrt{21 \cdot 21 \cdot 3}$$

$$1058 + 104 - 1323 \ll 0 < 8 \cdot 23\sqrt{13} \Rightarrow \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{1}{9}; \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \right\}$$

$\Rightarrow$  не подходит

~~$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$~~  - подходит

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ

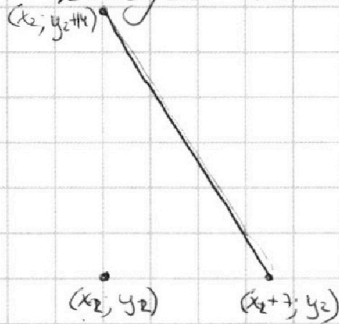
1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5.

Условие  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$  при подстановке конкретных  $x_2$  и  $y_2$  даёт уравнение прямой. Также из этого можно заметить, что пары упорядочены и для каждой точки прямая располагается одинаково:

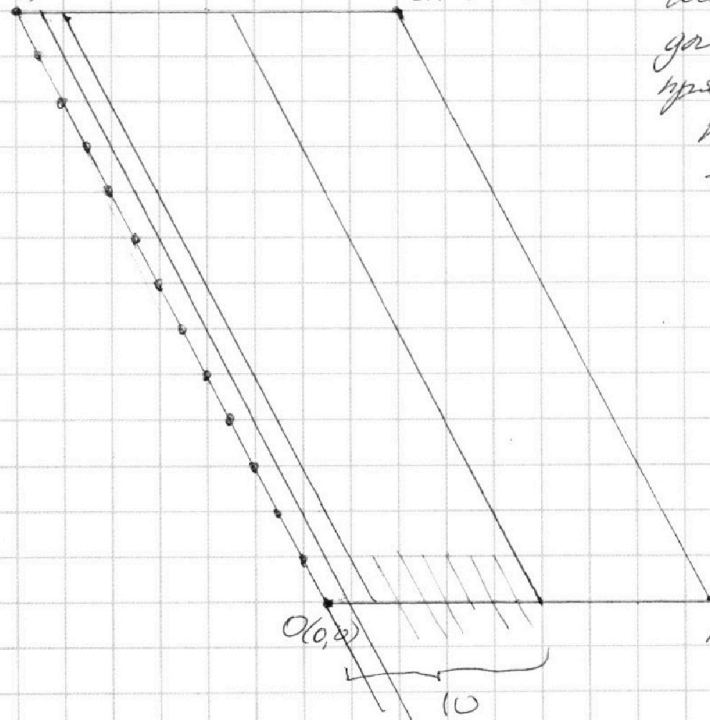


Нарисуем параллелограмм из условия с коэффициентом стороны клеточки равной 2 ед. отрезкам и для каждой точки поднимем количество целочисленных точек, лежащих внутри или на границе параллелограмма, также лежащих на прямой. Тогда количество пар точек будет сумма всех

подписанных чисел, т.к. пары упорядочены.

$P(-13, 26)$

$Q(3, 26)$



Можно заметить, что для точек лежащих на прямой, параллельной парной будет одинаковое кол-во точек,

будем считать по прямой

Наклон прямой равен наклону боковых граней ребер сторон 4-угольника.

На каждой прямой 14 целочисленных точек, значит

прямых, для которых парная прямая

проходит через параллелограмм 10 штук, значит всего пар  $10 \cdot 14 \cdot 14 = 1960$

Ответ: 1960

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6.

$$\begin{cases} ax+cy-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

Второе неравенство не зависит от  $a$  и  $b$ , найдём графически его область решений:

$(x^2+y^2-1)$  - окружность с центром в  $(0;0)$  и радиусом  $1$ .

$(x^2+(y-12)^2-16)$  - окружность с центром  $(0;12)$  и радиусом  $4$ .

Каждая скобка меньше или равна  $0$  внутри или на границе окружности, а т.к. окружности не пересекаются ( $12 > 1+4$ ), то решением неравенства будут области внутри окружностей и их граница.

Первое уравнение это уравнение прямой. Т.к. надо 2 решения, то прямая и 2 круга имеют 2 общие точки, такое может быть только при общих касательных, их всего 4.

Из простых соотношений можно найти точки пересечения оси  $Oy$  с касательными, т.к. картинка симметрична отн-во  $Oy$

Подобие  $\Delta \Rightarrow \frac{k}{1} = \frac{k+12}{4} \Rightarrow k=4 \Rightarrow A(0; -4)$

$BH$  - высота прямоугольного  $\Delta \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow$  по т. Пифагора

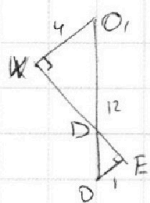
$$OH = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16-15}{16}} = \frac{1}{4} \Rightarrow B\left(\frac{\sqrt{15}}{4}; -\frac{1}{4}\right)$$

и  $C\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}; -\frac{1}{4}\right)$

$$\begin{cases} a \cdot 0 - 4 - 8b = 0 \Rightarrow b = -0,5 \\ a \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{4} + 4 = 0 \Rightarrow a \sqrt{15} = -15 \end{cases}$$

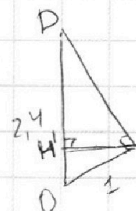
для  $A$  и  $C$ :  $a = -\sqrt{15}$ ;  $b = -0,5$

Аналогия для внутренних общих касательных:



$$\frac{O_1D}{O_2D} = \frac{4}{1} \Rightarrow D(0; 2,4)$$

$O_1D + O_2D = 12$



$$DE = \sqrt{24^2 - 1} = 2\sqrt{119} \Rightarrow EH = \frac{2\sqrt{119}}{2} = \sqrt{119}$$

$$= \frac{\sqrt{119}}{1,2} = \frac{\sqrt{119}}{12}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение В

$$OH' = \sqrt{OE^2 - H'E^2} = \sqrt{1 - \frac{119}{144}} = \frac{5}{12} \Rightarrow E\left(\frac{\sqrt{119}}{12}; \frac{5}{12}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F\left(-\frac{\sqrt{119}}{12}; \frac{5}{12}\right)$$

где E и D:

$$\begin{cases} a \cdot 0 + 2,4 - 8b = 0 \Rightarrow b = 0,3 \\ a \frac{\sqrt{119}}{12} + \frac{5}{12} - 2,4 = 0 \Rightarrow a = \end{cases}$$
$$a\sqrt{119} + 5 - 28,8 = 0$$
$$a\sqrt{119} = 23,8$$
$$a = 0,2\sqrt{119}$$

где F и D:  $a = -0,2\sqrt{119}$

С ответом

Ответ:  $\{0,2\sqrt{119}; -0,2\sqrt{119}; \sqrt{15}; -\sqrt{15}\}$



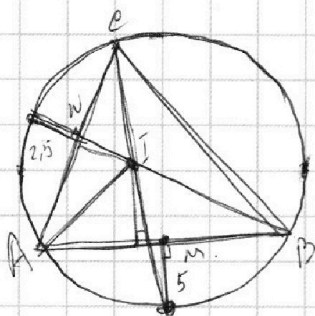
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



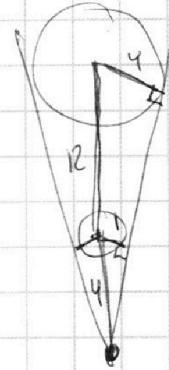
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} +13 \\ 8 \\ \hline 104 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +23 \\ 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 21 \\ \hline 42 \\ 441 \\ \hline 1323 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 14 \\ \hline 68 \\ 17 \\ \hline 238 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} +1058 \\ 104 \\ \hline 1162 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1323 \\ -1162 \\ \hline 161 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +529 \\ 104 \\ \hline 633 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1323 \\ -633 \\ \hline 690 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ 4 \\ \hline 676 \\ 49 \\ \hline 627 \end{array}$$

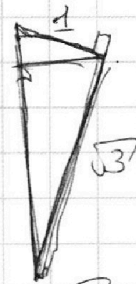
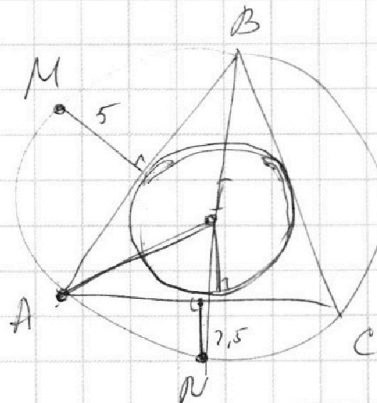
$$\begin{array}{r} 161+23 \\ 16117 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 46 \\ 46 \\ \hline 276 \\ 184 \\ \hline 2116 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 345 \\ 345 \\ \hline 1725 \\ 1380 \\ \hline 1035 \\ 119025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 26 \\ 26 \\ \hline 12696 \\ +4232 \\ \hline 55016 \end{array}$$

2,4.

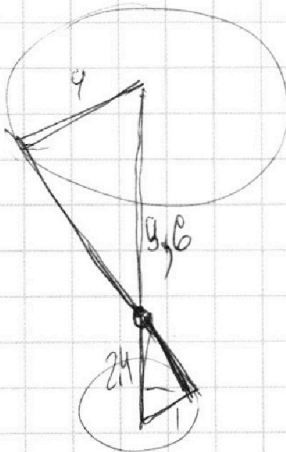


$$\sqrt{3} = h \cdot 4$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\begin{array}{r} 476 \overline{) 4} \\ 4 \quad \overline{) 119} \\ \hline 7 \\ \hline 36 \end{array}$$

1,19



$$\begin{array}{r} 2424 \\ \times 24 \\ 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\sqrt{4,76}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ -119 \\ \hline 25 \end{array}$$

$D(0, 2,4)$

$$\frac{5}{12} - \frac{12}{5} = \frac{25-144}{60} =$$

$$\begin{array}{r} 28,8 \\ -5 \\ \hline 23,8 \end{array}$$

$$119 \cdot 2 \cdot 0,01$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a_2 + b_2 \geq 15$$

$$a_3 + b_3 \geq 11$$

$$b_2 + c_2 \geq 17$$

$$b_3 + c_3 \geq 18$$

$$c_2 + a_2 \geq 23$$

$$a_3 + c_3 \geq 39$$

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 55$$

$$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 68$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 28$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 34$$

$$\begin{array}{r} 240 \overline{) 7} \\ -21 \phantom{0} \\ \hline 30 \phantom{0} \\ -28 \phantom{0} \\ \hline 2 \end{array}$$

$$a = 2^{15} \cdot b + a + c = 23$$

$$a + b + c \geq 28$$

$$a = 2^{10}$$

$$a = 7$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$b = 2^5$$

$$b = 1$$

$$c = 2^{13}$$

$$c = 7$$

$$\begin{array}{r} \times 69 \\ 16 \\ \hline 414 \\ + 69 \\ \hline 1104 \end{array}$$

$$\sqrt{3:26} \quad 0.36$$

$$\sqrt{2:52} \quad 0.02$$

$$\sqrt{2:18}$$

$$\sqrt{1:44}$$

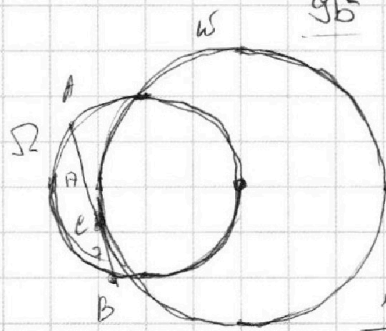
$$\sqrt{1:10}$$

$$\frac{a}{b} \quad \frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

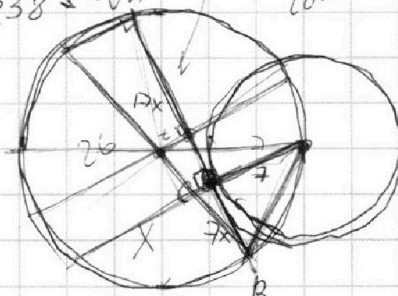
$$\text{НОД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = \text{НОД}(a+b, 9b^2) =$$

$$\begin{array}{r} a^2 - 7ab + b^2 \overline{) a+b} \\ - a^2 + ab \\ \hline b^2 - 8ab \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4+5 \\ 16 - 7 \cdot 4 \cdot 5 + 25 \\ \hline -99 \end{array} = -\frac{1}{99} = -\frac{1}{11^2}$$



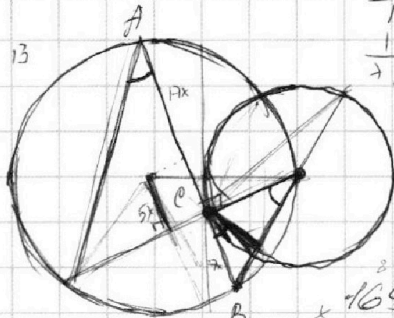
$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 119 \\ \hline 2 \\ \hline 238 \end{array}$$



$$AB = ?$$

$$Ax \cdot Ax = 7 \cdot X$$

$$X = 17x^2$$



$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 119 \\ \hline 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\frac{17x^2 + 7}{2} - 7 =$$

$$= \frac{17x^2 - 7}{2}$$

$$(5x)^2 + \left(\frac{17x^2 + 7}{2}\right)^2 = 169$$

$$100x^2 + 289x^4 + 238x^2 + 49 = 169$$

$$388x^2 + 289x^4 + 338x^2 - 120 = 0$$

$$D = 338^2 + 4 \cdot 289 \cdot 120 =$$

$$= 4(13^4 + 17^2 \cdot 120) =$$

$$x^2 = \frac{-338 \pm \sqrt{63241}}{2 \cdot 17^2}$$

$$78 = 2 \cdot 39 = 2 \cdot 3 \cdot 13$$

$$\begin{array}{r} 338 \overline{) 2} \\ -2 \phantom{0} \\ \hline 13 \phantom{0} \\ -12 \phantom{0} \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ 169 \\ \hline 1521 \\ \hline 1014 \\ -169 \\ \hline 28569 \\ + 34680 \\ \hline 63241 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 289 \\ 120 \\ \hline 5780 \\ + 289 \\ \hline 34680 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1248 \overline{) 16} \\ 112 \phantom{0} \\ \hline 128 \phantom{0} \\ -128 \phantom{0} \\ \hline 128 \phantom{0} \\ -128 \phantom{0} \\ \hline 0 \end{array}$$

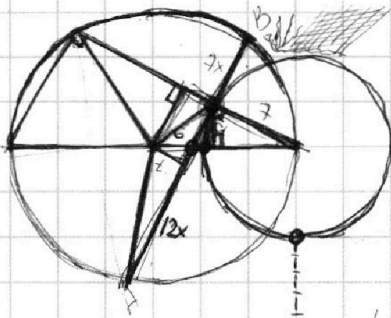
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 + 3x + 1 = A$$

$$1 - 9x = B$$

$$\sqrt{A+B} - \sqrt{A} = B$$

$$\frac{(\sqrt{A+B} - \sqrt{A})(\sqrt{A+B} + \sqrt{A})}{(\sqrt{A+B} + \sqrt{A})} = \frac{B(\sqrt{A+B} + \sqrt{A})}{\sqrt{A+B} + \sqrt{A}}$$

$$(A+B-A) = B(\sqrt{A+B} + \sqrt{A})$$

$$B(1 - \sqrt{A+B} - \sqrt{A}) = 0$$

$$B = 0 \vee x = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{A+B} + \sqrt{A} = 1$$

$$A+B+A+2\sqrt{AB} + \sqrt{A} = 1$$

$$2\sqrt{(A+B)A} = 1 - 2A - B$$

$$4(A+B)A = 1 + 4A^2 + B^2 - 4A - 2B + 4AB$$

$$4A^2 + 4AB = 1 + 4A^2 + B^2 - 4A - 2B + 4AB$$

$$B^2 - 4A - 2B + 1 = 0$$

$$1 - 18x + 9x^2 - 12x^2 - 12x - 4 - 2 + 18x + 1 = 0$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$144 + 4 \cdot 69 \cdot 4 = 16(9 + 69) = 16 \cdot 78 \dots$$

$$7 \cdot 17x^2 = 13^2 - 1^2$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

P

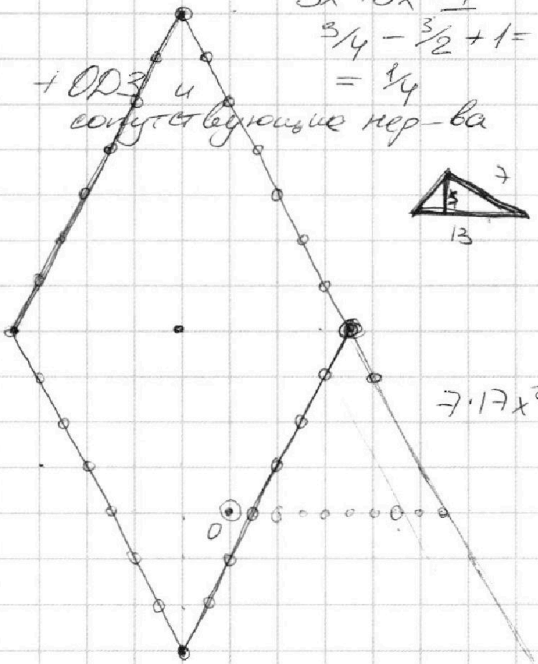
$$3x^2 - 6x + 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 1$$

$$3x^2 + 3x + 1$$

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1 =$$

$$= \frac{1}{4}$$

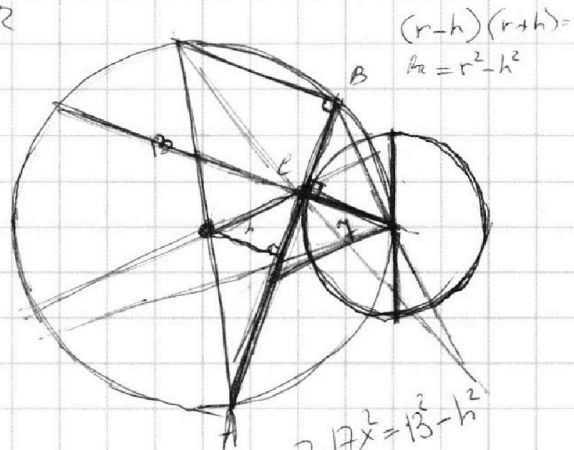
+ ODP 4  
содержит вогнутые пер-ва



$$4 \cdot 7 \cdot 17x^2 = 4 \cdot 13^2 - (17x^2 - 7)^2 - 100x^2$$

$$17^2 x^4 + 6 \cdot 7 \cdot 17x^2 + 100x^2 - 4 \cdot 13^2 = 0$$

$$36 \cdot 49 \cdot 17^2 + 10^4 + 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 100 + 4 \cdot 17^2 \cdot 4 \cdot 13^2$$



$$(r-h)(r+h) =$$

$$B \quad h^2 = r^2 - h^2$$

$$\left(\frac{17x^2 - 7}{2}\right)^2 + 25x^2 = h^2$$

$$7 \cdot 17x^2 = 13^2 - \left(\frac{17x^2 - 7}{2}\right)^2 - 25x^2$$

$$\frac{17x^2}{4}$$