



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1.

Т.к.  $ac : 7^{39}$ , то  $abc : 7^{35}$  ~~или~~  $abc$

Обозначим за  $a_2, b_2, c_2$  степени вхождения 2  
в  $a, b$  и  $c$  соответственно. Тогда  $ab : 2^{15} \Rightarrow a_2 + b_2 \geq 15$   
 $bc : 2^{17} \Rightarrow b_2 + c_2 \geq 17$ ;  $ac : 2^{23} \Rightarrow a_2 + c_2 \geq 23$

Произведение чисел делится на множитель в степени суммы  
вхождений этого множителя в <sup>числа</sup> множители произведения  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow abc : 2^{a_2 + b_2 + c_2}$

Сложим 3 пер-ва, полученные выше:  $2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 55$

Т.к. числа натуральные, степень вхождения тоже натуральная  
или 0  $\Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 28 \Rightarrow abc : 2^{28}$

$abc : 7^{39}$   
 $abc : 2^{28} \Rightarrow abc : 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$   
т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$

$7$  и  $2$  взаимно просты

Приведем пример где  $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$ :  $a = 2^{10} \cdot 7^{11}$   
 $b = 2^5 \cdot 7^{18}$   
 $c = 2^{13} \cdot 7^{10}$

$ab = 2^{15} \cdot 7^{29}$ ;  $2^{15} \cdot 7^{29}$   
 $\Rightarrow bc = 2^{18} \cdot 7^{28}$ ;  $2^{17} \cdot 7^{18}$   
 $ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$ ;  $2^{23} \cdot 7^{39}$

Ответ:  $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2. ~~4~~

$\frac{a}{b}$  - несократима  $\Rightarrow \text{НОД}(a; b) = 1$

Сократить можно на  $\text{НОД}(a+b; a^2 - 7ab + b^2) \Rightarrow$  по алгоритму

Евклида  $\text{НОД}(a+b; a^2 - 7ab + b^2) = \text{НОД}(a+b; a^2 - 7ab + b^2 - a(a+b)(a-b))$

$= \text{НОД}(a+b; 9b^2)$

Т.к.  $\text{НОД}(a; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; 9b^2) = \text{НОД}(a+b; 9) \leq 9$

Приведем пример для  $m=9$ :  $a=4$ ,  $b=5$

$$\frac{4+5}{16-140+25} = -\frac{9}{99} = -\frac{1}{11}$$

Ответ: 9



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4.

Сделаем замену:  $A = 3x^2 + 3x + 1$ ,  $B = 1 - 9x$ , тогда:

ОДЗ:

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$3(x-1)^2 - 1 \geq 0$$

$$(x-1)^2 \geq \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x-1 \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x-1 \leq -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 3 = -3 < 0$$

$$3 > 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3x + 1 > 0$$

$$\sqrt{A+B} - \sqrt{A} = B \quad | \cdot (\sqrt{A+B} + \sqrt{A})$$

$$B = B(\sqrt{A+B} + \sqrt{A})$$

$$B(1 - \sqrt{A+B} - \sqrt{A}) = 0$$

$$B = 0 \Rightarrow 1 - 9x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{A+B} + \sqrt{A} = 1$$

$$\sqrt{A+B} + \sqrt{A} = 1 \quad | > 0$$

$$A+B+A+2\sqrt{(A+B)A} = 1$$

$$2\sqrt{A^2+AB} = 1-A-B \quad | -2A-B \geq 0 \Rightarrow$$

$$4(A^2+AB) = 1-4A-2B+4AB \quad | 1-6x^2-6x-2-1+12x$$

$$1+B^2-4A-2B=0$$

$$-6x^2+12x-2 \geq 0$$

$$-6(x-1)^2+4 \geq 0$$

$$4 \geq 6(x-1)^2$$

$$2 \geq 3(x-1)^2$$

$$\frac{2}{3} \geq (x-1)^2$$

$$-\frac{\sqrt{6}}{3} \leq x-1 \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Обратная замена переменных:

$$1 + 1 - 18x + 81x^2 - 12x^2 - 12x - 4 - 2 + 18x = 0$$

$$81x^2 - 12x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 69 \cdot 4 =$$

$$= 144 + 1104 = 1248$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{1248}}{2 \cdot 69}$$

$$\frac{12 + \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} \vee 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$12 + \sqrt{1248} \vee 2 \cdot 69 + 2 \cdot 23\sqrt{3}$$

$$12 + 4\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 13} \vee 2 \cdot 69 + 2 \cdot 23\sqrt{3}$$

$$6 + 2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 13} \vee 69 + 23\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 13} - 23\sqrt{3} \vee 63$$

$$4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13 + 23 \cdot 23 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 23 \cdot \sqrt{2 \cdot 13} \vee 63^2$$

$$4 \cdot 2 \cdot 13 + 23 \cdot 23 - 4 \cdot 23 \sqrt{2 \cdot 13} \vee 3 \cdot 21 \cdot 21$$

$$104 + 529 - 1323 < 0 < 4 \cdot 23 \sqrt{2 \cdot 13}$$

$$\frac{12 + \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} \vee 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$12 + 4\sqrt{78} \vee 2 \cdot 69 - 2 \cdot 23\sqrt{6}$$

$$2\sqrt{78} + 23\sqrt{6} \vee 63$$

$$4 \cdot 78 + 23^2 \cdot 6 + 2 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 6 \cdot \sqrt{13} \vee 63^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение 4

$$4 \cdot 26 + 23^2 \cdot 2 + 4 \cdot 23 \cdot 2\sqrt{13} \sqrt{3 \cdot 21^2}$$
$$104 + 1058 - 1323 \sqrt{-4 \cdot 23 \cdot 2\sqrt{13}}$$
$$-161 \sqrt{-4 \cdot 23 \cdot 2\sqrt{13}}$$

$$8 \cdot 23\sqrt{13} \sqrt{161}$$

$$8\sqrt{13} \sqrt{7}$$

$$\sqrt{13} > 1 \Rightarrow 8\sqrt{13} > 8 > 7 \Rightarrow \frac{12 + \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} > 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$12 + 24 \cdot \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$6 + 2\sqrt{78} \sqrt{69 - 23\sqrt{3}}$$

$$2\sqrt{78} + 23\sqrt{3} \sqrt{63}$$

$$2\sqrt{26} + 23 \sqrt{21\sqrt{3}}$$

$$4 \cdot 26 + 23^2 + 4 \cdot 23\sqrt{26} \sqrt{21 \cdot 3}$$

$$104 + 529 - 1323 \sqrt{-4 \cdot 23\sqrt{26}}$$

$$4 \cdot 23\sqrt{26} \sqrt{690}$$

$$46\sqrt{26} \sqrt{345}$$

$$46 \cdot 46 \cdot 26 \sqrt{345 \cdot 345}$$

$$55016 \ll 119025 \Rightarrow \frac{12 + \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$6 - 2\sqrt{78} \sqrt{69 - 23\sqrt{6}}$$

$$23\sqrt{6} - 2\sqrt{78} \sqrt{63}$$

$$23 \cdot 23 \cdot 6 + 2 \cdot 2 \cdot 78 - 2 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 6\sqrt{13} \sqrt{63 \cdot 63}$$

$$2 \cdot 23 \cdot 23 + 8 \cdot 13 - 8 \cdot 23\sqrt{13} \sqrt{21 \cdot 21 \cdot 3}$$

$$1058 + 104 - 1323 \ll 0 < 8 \cdot 23\sqrt{13} \Rightarrow \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{1}{9}; \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \right\}$$

$\Rightarrow$  не подходит

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



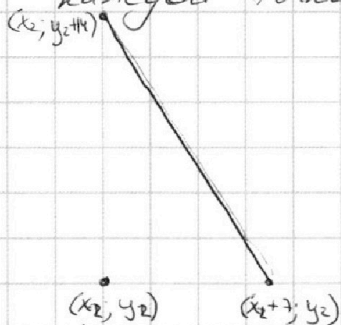
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

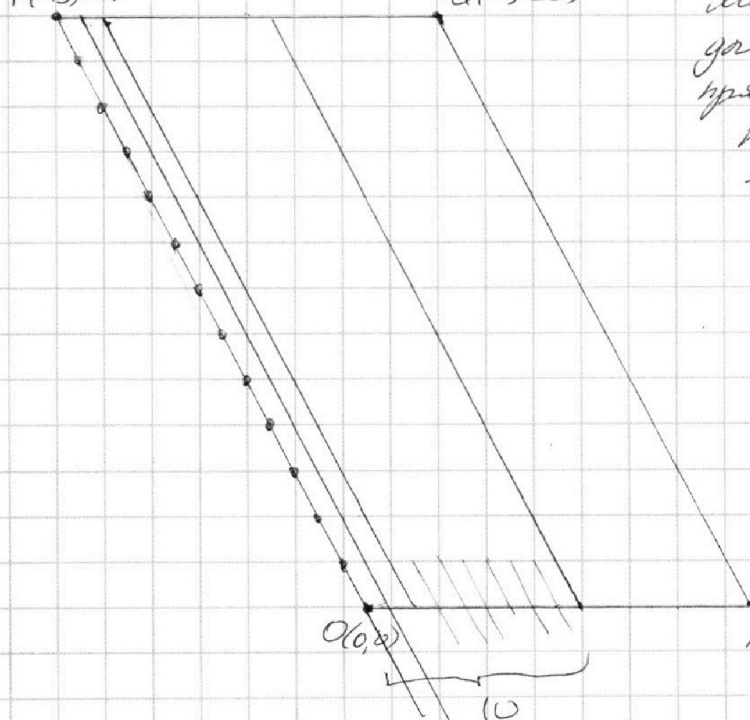
5.

Условие  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$  при подстановке конкретных  $x_2$  и  $y_2$  даёт уравнение прямой. Также из этого можно заметить, что пары упорядочены и для каждой точки прямая располагается одинаково:



Нарисуем параллелограмм из условия с коэффициентом стороны клеточки равной 2 ед. отрезкам и для каждой точки подсчитаем количество целочисленных точек, лежащих внутри или на границе параллелограмма, также лежащих на прямой. Тогда количество пар точек будет сумма всех

подписанных чисел, т.к. пары упорядочены.



Можно заметить, что для точек лежащих на прямой, параллельной парной будет одинаковое кол-во точек, будем считать по прямой

Наклон прямой равен наклону боковых граней ребер сторон 4-угольника.

На каждой прямой 14 целочисленных точек, значит прямых, для кото-

рых парная прямая проходит через параллелограмм 10 штук, значит всего пар  $10 \cdot 14 \cdot 14 = 1960$   
Ответ: 1960

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6.

$$\begin{cases} ax+cy-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

Второе неравенство не зависит от  $a$  и  $b$ , найдём графически его область решений:

$(x^2+y^2-1)$  - окружность с центром в  $(0;0)$  и радиусом 1.

$(x^2+(y-12)^2-16)$  - окружность с центром  $(0;12)$  и радиусом 4.

Каждая скобка меньше или равна 0 внутри или на границе окружности, а т.к. окружности не пересекаются ( $12 > 1+4$ ), то решением неравенства будут области внутри окружностей и их граница.

Первое уравнение это уравнение прямой. Т.к. надо 2 решения, то прямая и 2 круга имеют 2 общие точки, такое может быть только при общих касательных, их всего 4.

Из простых соотношений можно найти точки пересечения оси  $Oy$  с касательными, т.к. картинка симметрична отн-во  $Oy$

Подобие  $\Delta \Rightarrow \frac{k}{1} = \frac{k+12}{4} \Rightarrow k=4 \Rightarrow A(0; -4)$

$BH$  - высота прямоугольного  $\Delta \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow$  по т. Пифагора

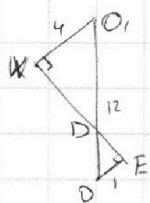
$$OH = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16-15}{16}} = \frac{1}{4} \Rightarrow B\left(\frac{\sqrt{15}}{4}; -\frac{1}{4}\right)$$

и  $C\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}; -\frac{1}{4}\right)$

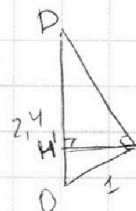
$$\begin{cases} a \cdot 0 - 4 - 8b = 0 \Rightarrow b = -0,5 \\ a \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{4} + 4 = 0 \Rightarrow a \frac{\sqrt{15}}{4} = -15 \end{cases}$$

для  $A$  и  $C$ :  $a = -\sqrt{15}$ ;  $b = -0,5$

Аналогия для внутренних общих касательных:



$$\frac{O_1D}{O_2D} = \frac{4}{1} \Rightarrow D(0; 2,4)$$



$$DE = \sqrt{24^2 - 1} = 2\sqrt{119} \Rightarrow EH = \frac{2\sqrt{119}}{2} = \sqrt{119}$$

$$= \frac{\sqrt{119}}{1,2} = \frac{\sqrt{119}}{12}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение В

$$OH' = \sqrt{OE^2 - H'E^2} = \sqrt{1 - \frac{119}{144}} = \frac{5}{12} \Rightarrow E\left(\frac{\sqrt{119}}{12}; \frac{5}{12}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F\left(-\frac{\sqrt{119}}{12}; \frac{5}{12}\right)$$

где E и D:

$$\begin{cases} a \cdot 0 + 2,4 - 8b = 0 \Rightarrow b = 0,3 \\ a \frac{\sqrt{119}}{12} + \frac{5}{12} - 2,4 = 0 \Rightarrow a = \end{cases}$$
$$a\sqrt{119} + 5 - 28,8 = 0$$
$$a\sqrt{119} = 23,8$$
$$a = 0,2\sqrt{119}$$

где F и D:  $a = -0,2\sqrt{119}$

С ответом

Ответ:  $\{0,2\sqrt{119}; -0,2\sqrt{119}; \sqrt{15}; -\sqrt{15}\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



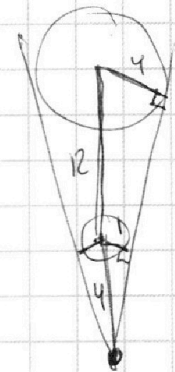
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} +13 \\ 8 \\ \hline 104 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +23 \\ 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 21 \\ \hline 42 \\ 441 \\ \hline 1323 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 14 \\ \hline 68 \\ 17 \\ \hline 238 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} +1058 \\ 104 \\ \hline 1162 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1323 \\ -1162 \\ \hline 161 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +529 \\ 104 \\ \hline 633 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1323 \\ -633 \\ \hline 690 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ 4 \\ \hline 676 \\ 49 \\ \hline 627 \end{array}$$

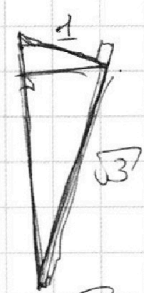
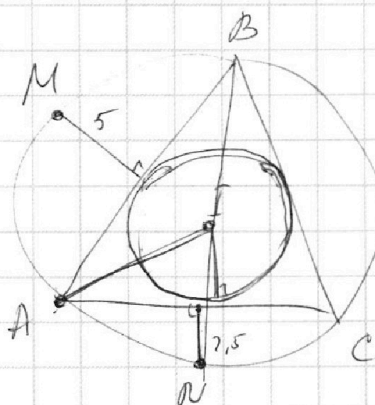
$$\begin{array}{r} 161+23 \\ 16117 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 46 \\ 46 \\ \hline 276 \\ 184 \\ \hline 2116 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 345 \\ 345 \\ \hline 1725 \\ 1380 \\ \hline 1035 \\ 119025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 26 \\ 26 \\ \hline 12696 \\ +4232 \\ \hline 55016 \end{array}$$

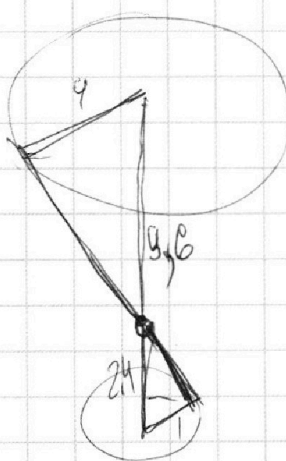
2,4.



$$\sqrt{3} = h \cdot 4$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\begin{array}{r} 476 \overline{) 4} \\ 4 \quad \overline{) 119} \\ \hline 7 \\ \hline 36 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 2424 \\ \times 24 \\ 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\sqrt{4,76}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ -119 \\ \hline 25 \end{array}$$

$D(0, 2,4)$

$$\frac{5}{12} - \frac{12}{5} = \frac{25-144}{60} =$$

$$\begin{array}{r} 28,8 \\ -5 \\ \hline 23,8 \end{array}$$

$$119 \cdot 2 \cdot 0,01$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a_2 + b_2 \geq 15$$

$$b_2 + c_2 \geq 17$$

$$c_2 + a_2 \geq 23$$

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 55$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 28$$

$$a_3 + b_3 \geq 11$$

$$b_3 + c_3 \geq 18$$

$$a_3 + c_3 \geq 39$$

$$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 68$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 34$$

$$\begin{array}{r} 240 \overline{) 7} \\ -21 \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ \hline 30 \phantom{0} \phantom{0} \\ -28 \phantom{0} \\ \hline 2 \end{array}$$

$$a = 2^{15} \cdot b + a + c = 23$$

$$a + b + c \geq 28$$

$$a = 2^{10}$$

$$b = 2^5$$

$$c = 2^{13}$$

$$a = 7$$

$$b = 1$$

$$c = 7$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$\begin{array}{r} \times 69 \\ 16 \\ \hline 414 \\ + 69 \\ \hline 1104 \end{array}$$

$$\sqrt{3:26} \quad 0.36$$

$$\sqrt{2:52} \quad 0.02$$

$$\sqrt{2:18}$$

$$\sqrt{1:44}$$

$$\sqrt{1:10}$$

$$\frac{a}{b} \quad \frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

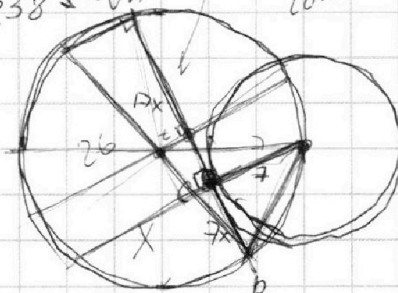
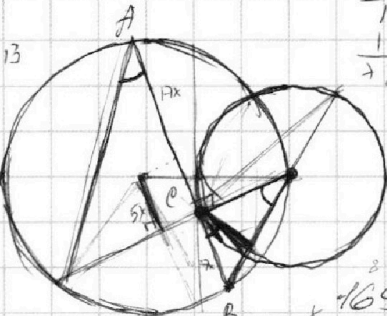
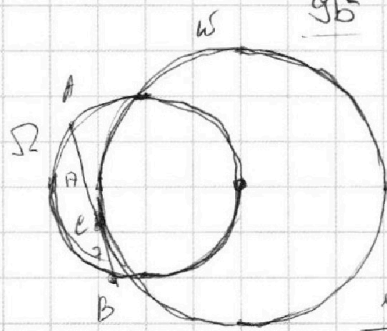
$$\text{НОД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = \text{НОД}(a+b, 9b^2) =$$

$$\begin{array}{r} a^2 - 7ab + b^2 \overline{) a+b} \\ - a^2 + ab \\ \hline b^2 - 8ab \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -8b^2 - 8ab \\ \hline 9b^3 \end{array}$$

$$= \text{НОД}(a+b, 9) =$$

$$\begin{array}{r} 4+5 \\ \hline 16 - 7 \cdot 4 + 25 = -99 = -\frac{1}{11} \end{array}$$



$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 119 \\ \hline 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 7 \\ \hline 119 \\ \times 119 \\ \hline 238 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -140 \\ 41 \\ \hline 99 \end{array}$$

$$AB = ?$$

$$Ax \cdot Ax - 7 = X = 17x^2$$

$$\frac{17x^2 + 7}{2} - 7 =$$

$$= \frac{17x^2 - 7}{2}$$

$$(5x)^2 + \left(\frac{17x^2 + 7}{2}\right)^2 = 169$$

$$100x^2 + 289x^4 + 238x^2 + 49 = 169$$

$$388x^2 + 289x^4 + 338x^2 - 120 = 0$$

$$D = 338^2 + 4 \cdot 289 \cdot 120 =$$

$$= 4(13^4 + 17^2 \cdot 120) =$$

$$x^2 = \frac{-338 \pm \sqrt{63241}}{2 \cdot 17^2}$$

$$\begin{array}{r} 1248 \overline{) 16} \\ 112 \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ \hline 128 \phantom{0} \phantom{0} \\ -128 \phantom{0} \\ \hline 128 \phantom{0} \\ -128 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$78 = 2 \cdot 39 = 2 \cdot 3 \cdot 13$$

$$\begin{array}{r} 338 \overline{) 2} \\ -2 \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ \hline 13 \phantom{0} \phantom{0} \\ -12 \phantom{0} \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ 169 \\ \hline 1521 \\ 1014 \\ -169 \\ \hline 28569 \\ + 34680 \\ \hline 63241 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 289 \\ 120 \\ \hline 5780 \\ 289 \\ \hline 34680 \end{array}$$

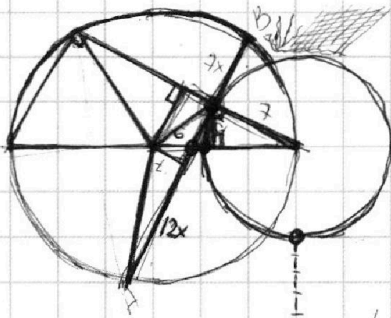
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 + 3x + 1 = A$$

$$1 - 9x = B$$

$$\sqrt{A+B} - \sqrt{A} = B$$

$$\frac{(\sqrt{A+B} - \sqrt{A})(\sqrt{A+B} + \sqrt{A})}{(\sqrt{A+B} + \sqrt{A})} = \frac{B(\sqrt{A+B} + \sqrt{A})}{\sqrt{A+B} + \sqrt{A}}$$

$$(A+B-A) = B(\sqrt{A+B} + \sqrt{A})$$

$$B(1 - \sqrt{A+B} - \sqrt{A}) = 0$$

$$B = 0 \vee x = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{A+B} + \sqrt{A} = 1$$

$$A+B+A+2\sqrt{AB} + \sqrt{A} = 1$$

$$2\sqrt{(A+B)A} = 1 - 2A - B$$

$$4(A+B)A = 1 + 4A^2 + B^2 - 4A - 2B + 4AB$$

$$4A^2 + 4AB = 1 + 4A^2 + B^2 - 4A - 2B + 4AB$$

$$B^2 - 4A - 2B + 1 = 0$$

$$1 - 18x + 9x^2 - 12x^2 - 12x - 4 - 2 + 18x + 1 = 0$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$144 + 4 \cdot 69 \cdot 4 = 16(9 + 69) = 16 \cdot 78 \dots$$

$$7 \cdot 17x^2 = 13^2 - 1^2$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

P

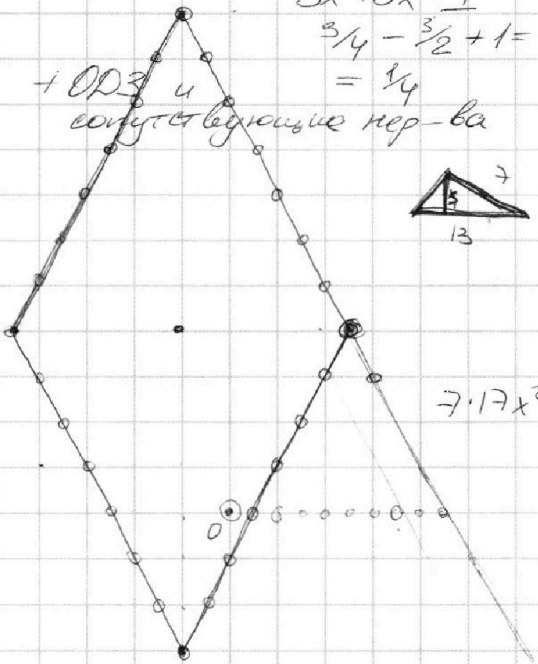
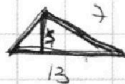
$$3x^2 - 6x + 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 1$$

$$3x^2 + 3x + 1$$

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1 =$$

$$= \frac{1}{4}$$

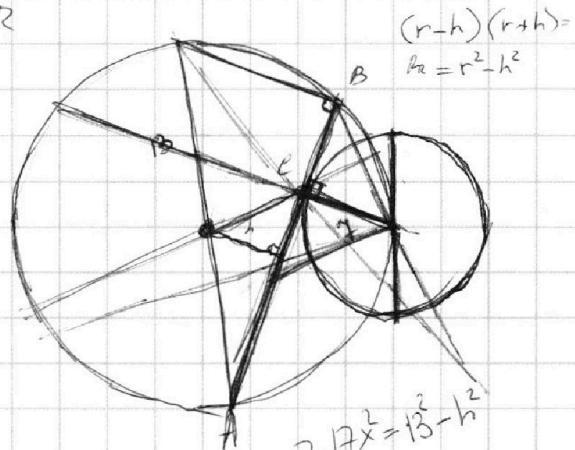
+ ODP 4  
содержит вогнутые пер-ва



$$4 \cdot 7 \cdot 17x^2 = 4 \cdot 13^2 - (17x^2 - 7)^2 - 100x^2$$

$$17^2 x^4 + 6 \cdot 7 \cdot 17x^2 + 100x^2 - 4 \cdot 13^2 = 0$$

$$36 \cdot 49 \cdot 17^2 + 10^4 + 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 100 + 4 \cdot 17^2 \cdot 4 \cdot 13^2$$



$$(r-h)(r+h) =$$

$$B \quad h^2 = r^2 - h^2$$

$$\left(\frac{17x^2 - 7}{2}\right)^2 + 25x^2 = h^2$$

$$7 \cdot 17x^2 = 13^2 - \left(\frac{17x^2 - 7}{2}\right)^2 - 25x^2$$

$$\frac{17x^2}{4}$$