



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1

$$\begin{cases} ab: 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc: 2^{12} \cdot 7^{17} \\ ac: 2^{20} \cdot 7^{32} \end{cases} \Rightarrow a^2 \cdot b^2 \cdot c^2: 2^{14} \cdot 2^{12} \cdot 2^{20} \cdot 7^{10} \cdot 7^{12} \cdot 7^{32} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2: 2^{51} \cdot 7^{64}, \text{ но т.к. } (abc)^2 - \text{ квадрат натур. числа} = 1$$

$\Rightarrow$  степени простых делят в  $a^2 b^2 c^2$  должна быть четной  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2: 2^{52} \cdot 7^{64} \Rightarrow (abc)^2: 2^{26} \cdot 7^{32} \Rightarrow abc: 2^{13} \cdot 7^{16}$$

~~т.к. не пара в т.к. не взаимно просты, но~~

~~XXXX~~ - степени простых  $a, b, c$  - совпадают. т.к. ~~они взаимно просты~~ ~~то~~

тогда

$$\begin{cases} x+y \geq 10 \\ x+z \geq 12 \\ x+z \geq 37 \end{cases} \Rightarrow \text{т.к. } x-y \leq 10$$

пусть  $y+z = n$

$$x-y \leq 10$$

$$x+z = m$$

т.к.

$$m-n \leq 10 \Rightarrow \text{пусть}$$

хотим  
 $z \geq 10$

увеличим разность  $m-n$ , для этого можно увеличить  $n$  до  $27$ ,

можно увеличить  $n$  до  $m$ , но тогда придется стабить

увеличить  $n$ , а нам требуется найти  $n$  и  $abc \Rightarrow$  ~~пусть~~ <sup>дополнительно</sup>

увеличим  $n$  до  $27$ , тогда

$$\begin{cases} x+y \geq 10 \\ y+z \geq 27 \\ x+z \geq 37 \end{cases}$$

наим. значения

$$\text{возм. знач. : } \begin{cases} x+y=10 \\ y+z=27 \\ x+z=37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=20 \\ y=0 \\ x=17 \end{cases}$$

тогда  $(abc)^2: 37 \Rightarrow abc: 2^{26} \cdot 7^{32} = 1 \Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$

Пример:

$$a = 2^1 \cdot 7^{10}$$

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$b = 2^6$$

$$bc = 2^{12} \cdot 7^{17}$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{17}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{32}$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$\Rightarrow$  пример верен

Ответ:  $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$\frac{a}{b} - \text{красоч.} \Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}, \text{ числ. } m, \text{ на который можно сократить}$$

числ. и знаменатель соответственно  $\text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2)$ ,

$$\text{по алгоритму Евклида: } \text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2) = \text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2 - (a+b)(a-7b))$$

$$= \text{НОД}(a+b, -8ab), \text{ т.к. } a \text{ и } b \text{ взаимнопросты, то сумма } a+b$$

$$\text{взаимнопроста с } ab \Rightarrow \text{НОД}(a+b, -8ab) = \text{НОД}(a+b, 8) \leq 8$$

$$\Rightarrow \text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2) \leq 8 \Rightarrow m \leq 8$$

Пример  $a$  и  $b$ :  $a=1, b=7, \frac{1}{7}$  - красоч.

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{1+99-42} = \frac{8}{58} = \frac{4}{29}, m=8, \text{ годится согласно}$$

условию  $\Rightarrow$  пример берем.

Ответ:  $m=8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

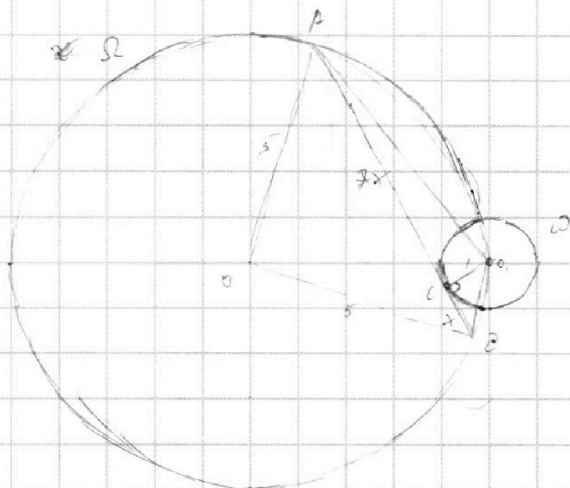
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 2x \\ CB = x \Rightarrow AB = 3x \\ C_1 - \text{центр } \omega$$



Рассм.  $\triangle AOB$ , по  $\gamma$  синусов:

$$\frac{3x}{\sin \angle AOB} = 5 \text{ (т.к. } \delta \text{ - радиус от сф.)}$$

$$\sin \angle AOB = \sin(\angle AOC + \angle COB) =$$

$$\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha,$$

$$\text{н.т.}$$

$AO$  - нормаль к  $\Omega$ ,  $C_1$  - центр

касания  $\omega$   $(C_1) \perp AO$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\sin \beta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\cos \beta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \angle AOB = \frac{2x \cdot x}{\sqrt{4x^2+1} \sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{\sqrt{4x^2+1} \sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{x(2x+1)}{\sqrt{4x^2+1} \sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{3x}{\sin \angle AOB} = 5 \Rightarrow \frac{3x}{\frac{x(2x+1)}{\sqrt{4x^2+1} \sqrt{x^2+1}}} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 \cdot \sqrt{4x^2+1} \cdot \sqrt{x^2+1} = 5(2x+1)$$

$$64 \cdot (4x^2+1) \cdot (x^2+1) = 25(4x^2+4x+1)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



н 5

Сделаем гомотегию с центром в точке  $(0; 0)$  и  
коэф. 3

$$O_1 \rightarrow (0; 0)$$

$$P \rightarrow (-4; 8)$$

$$Q \rightarrow (1; 2)$$

$$R \rightarrow (5; 0)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2 - 7x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 7x - 2$$
$$\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 \geq (7x - 2)^2 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$49x^2 - 28x - 4 \leq 2x^2 + 2x + 1$$

$$S \Rightarrow 200 - 12 \cdot 47 = 200 - 564 = -364$$

$$47 \cdot 12 = 420 + 94 = 564$$

$$\frac{30 \pm \sqrt{336}}{94}$$

$$336$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$S = 484 + 12 \cdot 41 = 484 + 492 = 976$$

$$\frac{30 - \sqrt{336}}{94} \rightarrow \frac{2}{7}$$

$$7(30 - \sqrt{336}) \wedge 184$$

$$210 - 184 \wedge 7 \cdot \sqrt{336}$$

$$26 \wedge 7 \cdot \sqrt{336}$$

$$\frac{22 + \sqrt{776}}{82}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x = 4$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x$$

ОДЗ:  $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$   
 $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$   
 $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$   
 $D < 0$   
 $a = 1, 20, \sqrt{3} \approx 1,732$   
 $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$   
 $(x-1)(2x-3) \geq 0$   
 $x \in [0, 1] \cup [1,5; +\infty)$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2 - 2x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 4 + 40x^2 - 20x + 2x^2 + 2x + 1 + 2(2-2x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$40x^2 - 21x + 2 = 2(2x-2)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$(2x-2)(2x+1) = 2(2x-2)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x-2=0$$

$$2x-1 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$x = \left(\frac{2}{2}\right) < 1$$

$$4x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 404 + 48 = 452 + 48 = 500$$

$$x_1 = \frac{22 + \sqrt{500}}{8}$$

$$x_2 = \frac{22 - \sqrt{500}}{8} > \frac{22}{8} > \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$$

$$x > \frac{1}{4}$$

$$2 - 2x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0$$

$$x \leq \frac{2}{2}$$

$$4x^2 - 30x + 3 \leq 0$$

$$D = 900 - 564 = 336$$

$$x \in \left[ \frac{30 - \sqrt{336}}{24}, \frac{30 + \sqrt{336}}{24} \right]$$

$$\frac{22 + \sqrt{926}}{82} > \frac{22 + 30}{82} > \frac{52}{82} > \frac{26}{41} > \frac{2}{2}$$

$$\frac{20 + \sqrt{336}}{82} < \frac{30 + \sqrt{336}}{82}$$

$$\frac{30 + \sqrt{336}}{94} < \frac{30 + 20}{94} < \frac{50}{94}$$

$$\frac{22 + \sqrt{926}}{82} > \frac{22 + 30}{82} > \frac{52}{82} \Rightarrow \text{корень не подходит}$$

Все корни не подходят, принимаем ОДЗ

Ответ:  $\frac{2}{7}$



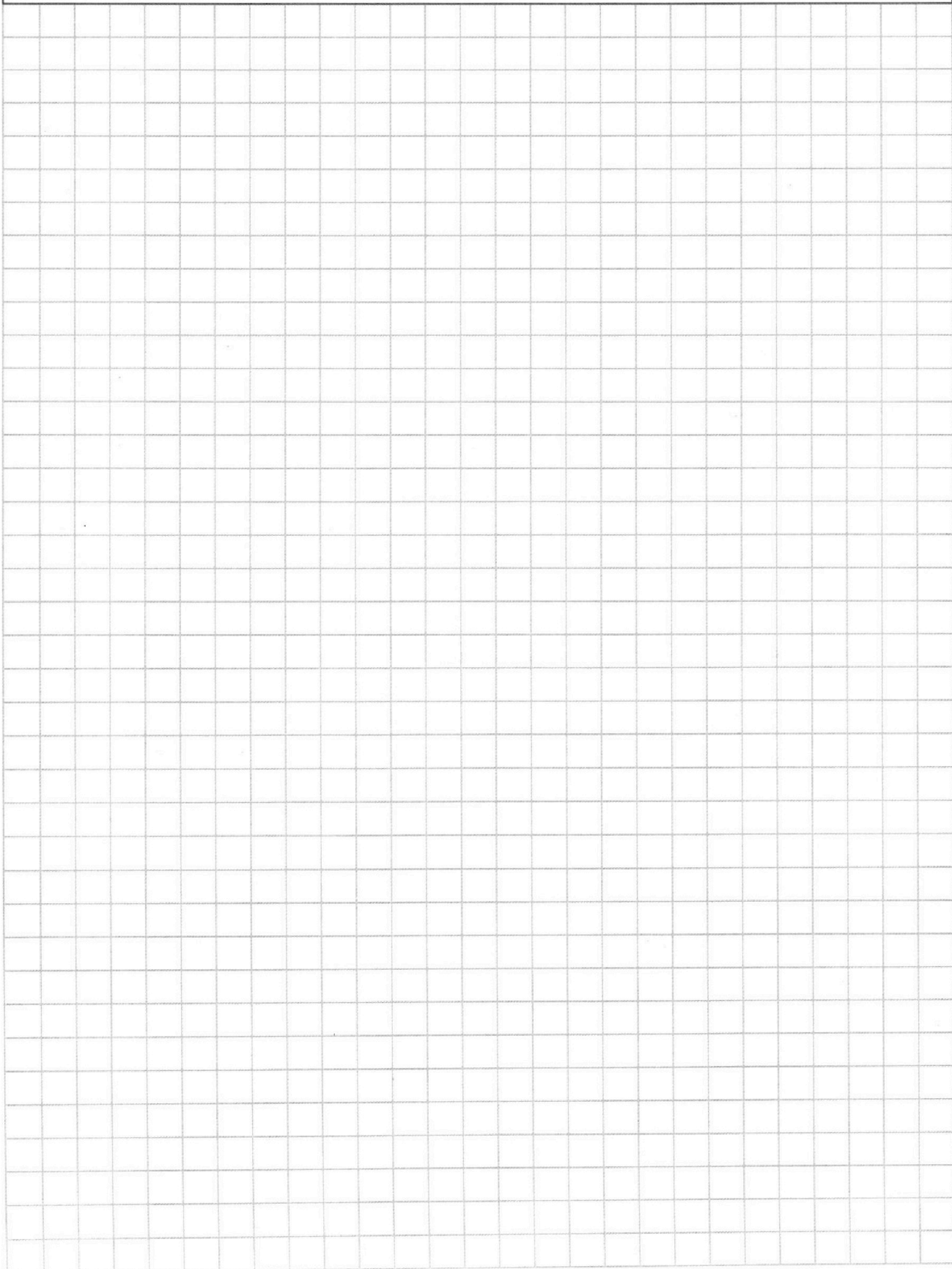
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



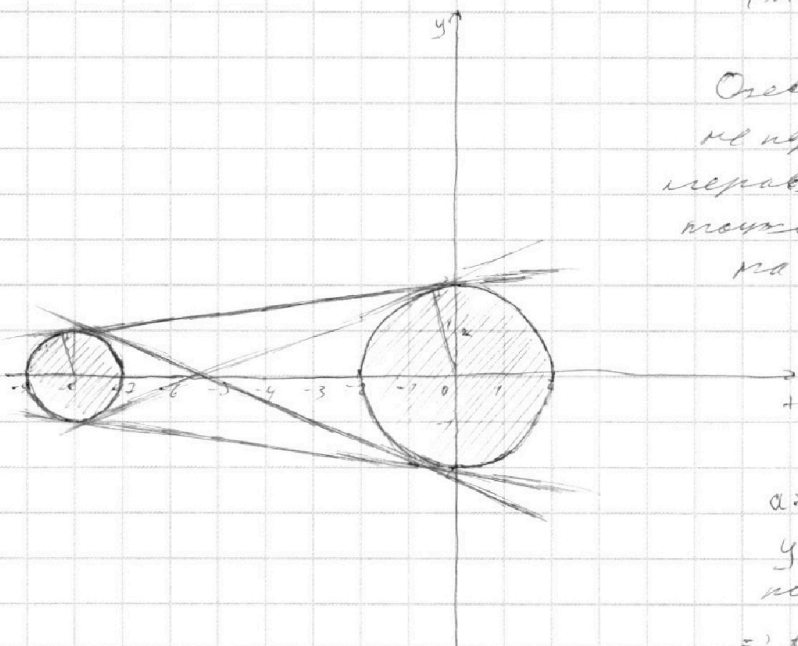
№ 6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \geq 0 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 - 4$  - ур. окружности  
с центром  $O(0,0)$   
и радиусом  $r=2$

$(x+8)^2 + y^2 - 1$  - ур. окр. с  
центром  $S(-8,0)$  и  $r=1$

Очевидно окружности  
не пересекаются  $\Rightarrow$  для  $\geq$  в  
неравенстве все точки  
точка внутри окр. 4  
на их границах



$ax - y + 10b = 0$  - ур.  
прямой  
 $y = ax + 10b$ , в момент  
подбора  $ax + 10b = 1$

$\Rightarrow$  все значения  $ax + 10b = 1$

Всего  $y$  значений 2 (вершины  $\Rightarrow$ )  
 $\Rightarrow y = ax + 10b = 1$  - касательная к  
окружности

$$\begin{cases} y = ax + d \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 4 - x^2 = a^2 x^2 + 2dax + d^2$$

$$x^2(a^2 + 1) + 2dax + d^2 - 4 = 0$$

$$\begin{cases} y = ax + d \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 - (x+8)^2 = a^2 x^2 + 2dax + d^2$$

$\Rightarrow$   
у, а, ч значения  
этих значений  
находятся в промежутке  
от 0 до 1

Омечено: у а ч значения ~~этих значений~~

~~этих значений~~  $\Rightarrow$  эти а соответствуют координатам

там где прямая касательная к окружности

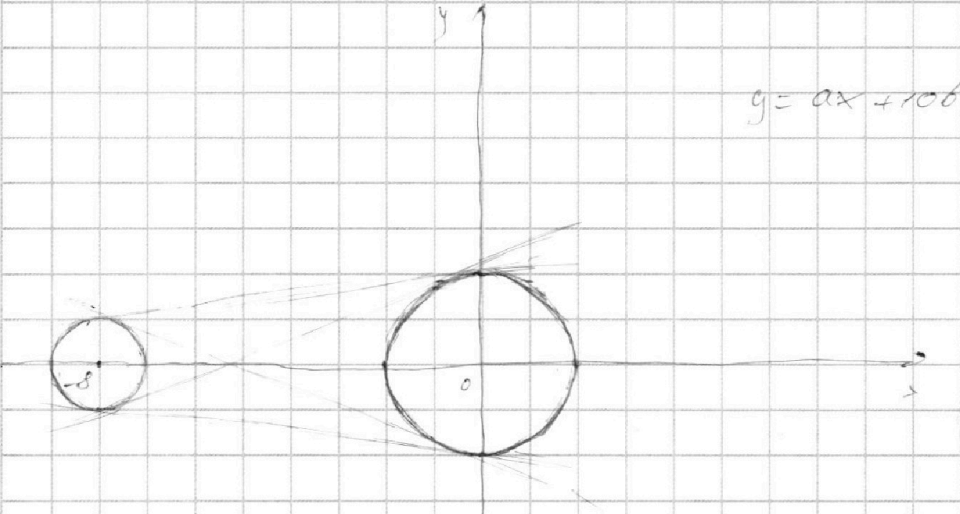
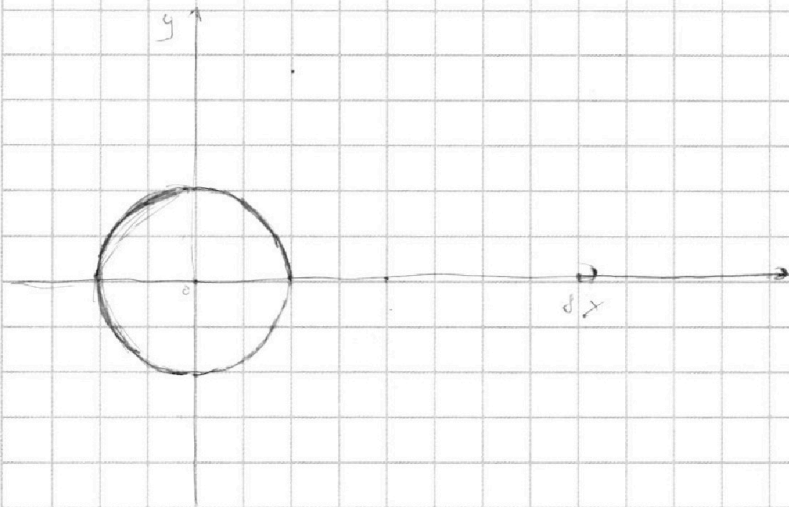
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = kx + b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

или  $4 - x^2 = k^2 x^2 + b^2 + 2kxb$

$$\times (x+8)^2 + 4 - x^2 = 1$$

$$16x + 64 + 4 = 1$$

$$x = 4 + \frac{1}{16}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a+b=c$$

$$d = 2x_2 + y_2$$

$$2x + \Delta y = 64$$

$$2x_1 - y_1 = 12 - d$$

$$y_1 = 2x_1 - 12 + d$$

22

13

$$d = 22^2 + 4 \cdot 3 \cdot 41 =$$

$$121 \cdot 4 = 484$$

$$12 \cdot 41 = 492 + 12 = 504$$

973

$$\frac{22 \pm \sqrt{973}}{82}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$$

$$2 - 2x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0$$

$$x \leq \frac{2}{3}$$

$$40x^2 + 4 - 28 \leq 2 \cdot 2x + 1$$

$$42x^2 - 2x + 3 \leq 0$$

$$x = \frac{5}{\sqrt{61}}$$

$$x = \frac{30}{\sqrt{61}}$$

$$O(0,0)$$

$$P(-12; 24) \rightarrow P(-4; 6)$$

$$A(1; 6)$$

$$R(5; 0)$$

$$2x_1 - 2x_2 + y_1 - y_2 = 64$$

$$\sqrt{61} \wedge 2,5$$

$$4244 \wedge 225$$



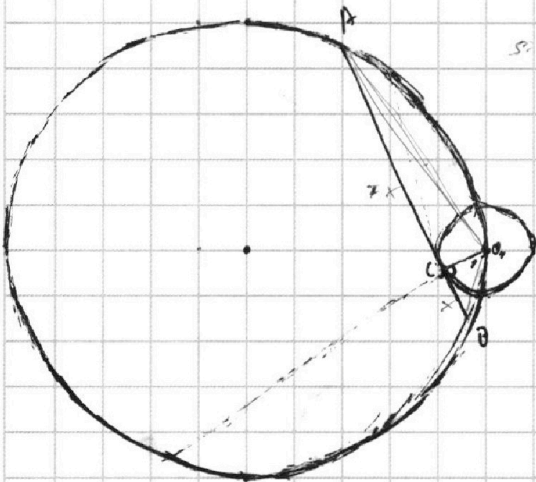
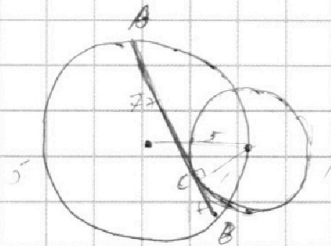
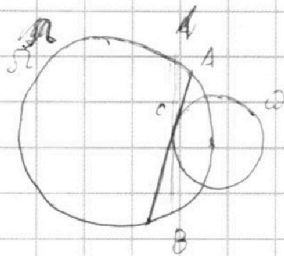
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$8x = 5 \sin 2\alpha =$$

$$\sin 2\alpha = \frac{8x}{5} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}} + \dots$$

$$\frac{40x^2 - 21x + 2}{99x^2 - 14x} \cdot \frac{2x-3}{2x-1}$$

$$-7x+2$$

$$S_{AOP} = \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha$$

$$360 - 2\alpha$$

$$\sin(360^\circ - 2\alpha)$$

$$\sin(-2\alpha) =$$



$$\frac{8x}{\sin 4\alpha} = 5$$

$$12 - 1(2x - 3)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x$$

$$\text{OДЗ: } \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$x \in [1, 1.5]$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 40x^2 + 4 - 28x + 2x^2 + 2x + 1 + (2 - 2x) \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$40x^2 - 21x + 2 = 2(2x - 2) \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x - 2 = 0$$

$$2x - 1 = 2 \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$\frac{a}{b} = 10$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ab \approx 2^{12}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$bc: 17$$

$$a+y \geq 10 \quad a-y \leq 10$$

$$ac:$$

$$\begin{cases} x+y \geq 10 \\ y+z \geq 17 \\ z+x \geq 37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 10 \\ y \geq 17 \\ z \geq 10 \end{cases}$$

$$\sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} \approx abc \approx \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64}} \approx 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x+y=14 \\ y+z=18 \\ z+x=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z-x=6 \\ x=8 \\ y=6 \\ z=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=10 \\ y+z=17 \\ x+z=37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z-x=7 \\ z=21 \\ y=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y \geq 10 \\ y \geq 10-x \\ z+y \geq 0 \end{cases}$$

$$(a+b; a^2 - 8ab + b^2)$$

$$(a+b; -8ab)$$

$$+8ab \quad | \quad a+b$$

$$\begin{array}{r} +8ab + -8ab \\ \hline +8ab + -8ab \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{a}{b} = 10 \Rightarrow (a+b; ab) = 1$$

$$\begin{cases} x+z \geq 37 \\ x \in [37-2] \\ y \leq \end{cases}$$

$$a=1$$

$$b=2$$

$$\frac{8}{1+49-6 \cdot 7} = \frac{8}{2} = 1$$

$$y = ax + b$$