



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| X | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $a, b, c \in N$

$$\left\{ \begin{array}{l} ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \quad (1) \\ bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \quad (2) \end{array} \right.$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \quad (3)$$

Перемножим (1) и (2):

$$ab^2c = 2^{32} \cdot 7^{29}$$

С другой стороны, $ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$, ~~здесь~~

$$\cancel{ab^2c} = \cancel{2^{23} \cdot 7^{39}}$$

$7^{39} > 7^{29}$, значит это то произведение
должно делиться 7^{10} . Так как мы
минимизируем значение произведений,
~~здесь~~ 7^{10} может делиться где угодно.

Рассмотрим, б (1):

$$\left\{ \begin{array}{l} ab = 2^{15} \cdot 7^{21} \quad (4) \\ bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \quad (5) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \quad (6) \end{array} \right.$$

В данном случае мы получили минимальное произведение, которое может делиться. Для
как проверить, a, b, c на натуральность.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Переножкини (4), (5) и (6)

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{55} \cdot 7^{70}$$

$a b c = \sqrt{2} \cdot 2^{27} \cdot 7^{39}$. Очевидно, что при
перемножении натуральных чисел аргументы
оканчиваются нулями. Значит
зато их хватило для ёлки. Пусть, скажем
же, б (4). (Конечно же, т.к. мы миними-
зировали предпосылки).

$$\left\{ \begin{array}{l} ab = 2^{16} \cdot 7^{21} \\ bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ab = 2^{16} \cdot 7^{21} \\ ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \end{array} \right. \quad (9)$$

$$(7) : (8) : \frac{a}{c} = \frac{7^3}{2}, \Rightarrow a = \frac{7^3}{2} \cdot c$$

$$(9) \quad c^2 \cdot \frac{7^3}{2} = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$c^2 = 2^{24} \cdot 7^{36}$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{18}, \Rightarrow a = 2^{11} \cdot 7^{21}, b = 2^5.$$

Все числа натуральные, значит они подходят.

$$a \cdot b \cdot c = 2^{11+5+12} \cdot 7^{18+21} = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2. $\text{НДД}(a, b) = 1$

$$\text{НДД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = m.$$

По алгоритму Евклида $\text{НДД}(a+b,$

$$a^2 - 7ab + b^2) = \text{НДД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2 - (a+b)^2) = \text{НДД}(a+b, -9ab) = m.$$

Таким образом ~~если~~ число m . Если $a \vdots m$,
то $b \vdash m$ по условию, и наоборот, \Rightarrow
 $a+b \vdash m$ и у него кратности a .

$ab \vdash m$ только в случае, если $ab = m$.

Когда $a+b \vdash m$ ($a+b \nmid a, b, m$).
тогда число ~~сумма~~ из чисел

Если $a = b = 1$, то $m = 1$, что мало. Если
одно из чисел 1, то $a+b \vdash ab$. Если же
 $a \neq 1$ и $b \neq 1$, то $a+b < ab$, $\Rightarrow a+b \vdash ab$.

Стаёмся 1 варианом: $9 \vdash m$. Тогда
наименьшее $m = 9$.

Ответ: 9.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

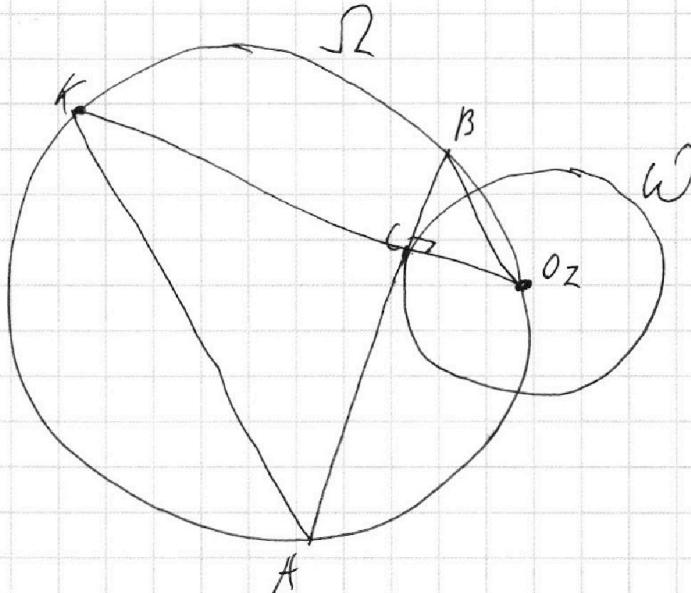
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.



$$r_1 = 13$$

$$r_2 = 7$$

$AC = 17x, BC = 7x$. Продолжи O_2C до
пересечения с Ω в точке K . По теореме
пересекающихся хорд $KC \cdot CO_2 = BC \cdot CA$

$$CK \cdot 7 = 7x \cdot 17x$$

$$CK = 17x^2$$

$$\text{По т. Пифагора } BO_2 = \sqrt{O_2C^2 + BC^2} = \sqrt{49 + 49x^2} = \\ = 7\sqrt{x^2 + 1}, \quad AK = \sqrt{CK^2 + AC^2} = \sqrt{289x^4 + 289x^2} = \\ = 17x\sqrt{x^2 + 1}.$$

По лемме, которую я докажу в конце решения,

$$4r_1^2 = AK^2 + BO_2^2$$

$$4 \cdot 13^2 = 289x^4 + 289x^2 + 49x^2 + 49$$

$$289x^4 + 338x^2 - 637 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$t = x^2, \Rightarrow 289t^2 + 338t - 450 = 0$$

$$P = 642692 \cdot 839056 = 916^2$$

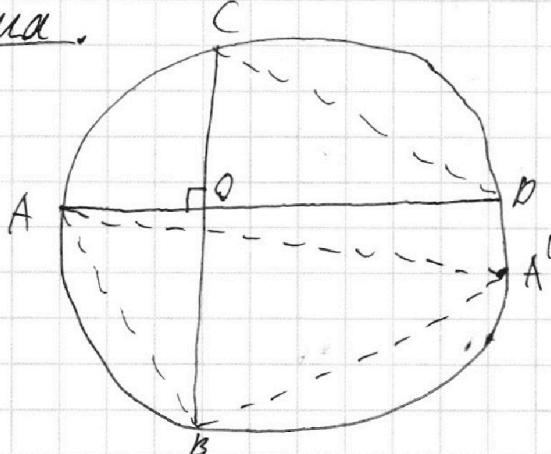
$$t = \frac{5693692}{578} \cdot \frac{916 - 338}{578} = 1$$

$$x = \sqrt{\frac{5693692}{578} - 338} \quad (x > 0)$$

$$AB = 24x = 24 \cdot \sqrt{\frac{5693692}{578} - 338}$$

Ответ: ~~24~~ ~~5693692 - 338~~ 1

Лемма.



Если $\angle AOC = 90^\circ$,

$$\text{то } AB^2 + CB^2 = 4R^2$$

Док-бо: пусть AA' — диаметр,
тогда $AA'^2 = 4R^2$, $\angle ABA' = 90^\circ$ как углы,
ном. вписаны
отмежеванные на диаметр. Тогда достаточно доказать
что $AB^2 + CB^2 = AA'^2$.
так как AA' — диаметр, $\angle BAD = 90^\circ - \angle ABO = \angle CBA'$.

$\angle BAD = \angle CBD$ как ~~внешние~~ вписанные углы. $\angle CBD =$

$= \angle CBA'$, т.к. DA' — диаметр, $\Rightarrow \angle A'DB = \angle A'B$, $\Rightarrow CB = A'B$,

т.к. $AB = A'B$. Ответ: ~~24~~ ~~5693692 - 338~~ 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4. \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Пусть $a = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$, $b = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$

Заметим, что $1 - 9x = a^2 - b^2$

Тогда исходное уравнение можно переписать:

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$a - b = (a - b)(a + b)$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0$$

$$a = b$$

или

$$a + b = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

III

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \quad (1) \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$(1) 9x - 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{9}$$

Представим $x_1 - b$ (2):

$$3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1 \geq 0 -$$

верно, поэтому $x_1 = \frac{1}{9}$ — корень

~~$$a = b$$~~

~~$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$~~

~~$$\left\{ \begin{array}{l} 3x^2 - 6x + 2 = (1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2 \quad (3) \\ 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0 \end{array} \right. \quad (4)$$~~

~~$$(3) 3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 -$$~~

~~$$- 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$~~

~~$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$~~

~~$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ 9x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1) \end{array} \right. \quad (5)$$~~

~~$$81x^2 = 4 \cdot (3x^2 + 3x + 1) \quad (6)$$~~

~~$$(6) 81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$6x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 144 = 288$$

$$\cancel{x_1} = \frac{12 - \sqrt{288}}{6 \cdot 2}$$

$$x_3 = \frac{12 + \sqrt{288}}{6 \cdot 2}$$

$$\alpha + \beta = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}, \text{ откуда}$$

$$1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

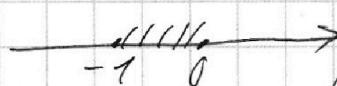
$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \leq 1$$

Найдите минимальное значение $3x^2 + 3x + 1$.

$x_0 = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$, $y_0 = \frac{1}{4}$, поэтому $3x^2 + 3x + 1 > 0$

$$3x^2 + 3x + 1 \leq 1$$

$$x(x+1) \leq 0$$



$$x \in [-1; 0].$$

Теперь рассмотрим мин. значение $\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$ на

промежутке $[-1; 0]$. ~~на~~ Мин. значение

$$3x^2 - 6x + 2: x_0 = \frac{6}{6} = 1 \cancel{\text{на } [-1; 0]}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

П.к. ~~мж.~~ и старший козырьчикка > 0
запись при $x_0 = 1$, запись
при $x = 0$ будет ~~меньше~~ запись
минимальны на промежутке $[-1; 0]$.

$$x \geq 0 : \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} > 1, b \geq 0, \Rightarrow a+b > 1 \cancel{+2}$$

и корней не будет.

Ответ: $\frac{1}{9}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6. $\begin{cases} ax + y - ab = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 1)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$ (1)

(2)

График (2) в системе $OxOy$: круг с центром $(0; 0)$ и радиусом 1 и круг с центром $(0; 12)$ и радиусом 4. Кольцо подходит внутренние части кругов и их проклады.

График (1) — прямая, начало которой зависит от параметра a , проходящая через точку $(0; ab)$. Параметр b „двигает“ эту точку по оси Oy .

П.к. как кучко ровно две решения, предлож (1) не может проходить в кружке окружностей. Она также не может касаться одной окружности однородно в двух точках (это невозможно). Поэтому мы имеем дело с двумя касательными окружностями. Всего их 4: две внутренних и две внешних.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

При $\frac{O_1E}{O_2E} = 4$, $\Rightarrow O_2E = \frac{1}{5}O_1O_2 = \frac{12}{5}$

При $O_2E = \frac{12}{5}$ — (0; $\frac{12}{5}$). Откуда

$$x = \frac{12}{5}$$

$$y = \frac{3}{10}. \text{ Поставим } f(1):$$

$$\alpha x + y - f \cdot \frac{3}{10} = 0$$

$$\alpha x + y = \frac{12}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{O_1A}{AE} = \frac{y}{AE}$$

$$AE = \sqrt{O_1E^2 - O_1A^2} = \sqrt{441} = 21$$

$$\tan \alpha = \frac{O_2C}{CE} = \frac{1}{CE}$$

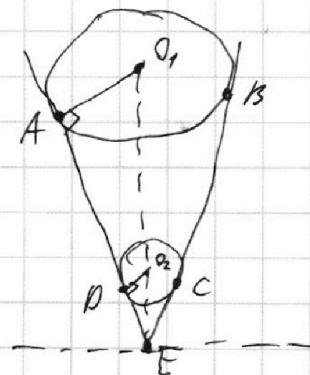
$$\tan C = \sqrt{E O_2^2 - O_2C^2} = \sqrt{\frac{144}{25} - 1} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{5}{\sqrt{119}}, \text{ то}$$

$$\alpha_1 = \tan(90 - \alpha) = \cot \alpha = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$\alpha_2 = -\tan(90 - \alpha) = -\frac{\sqrt{119}}{5}$$

Теперь внешнее касание:



На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

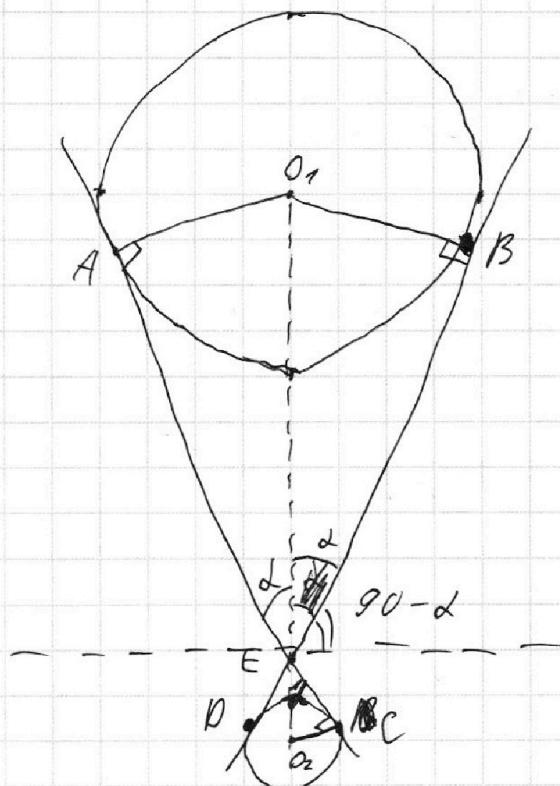
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Внутренние касательные пересекутся
на оси ОУ, т.к. центры окружностей
касат на оси ОУ. Аналогично с внешними.
Эти ~~же~~ точки и будут иметь координаты
координаты $(0; \pm b_1)$ и $(0; \pm b_2)$

Внутренние:



$$\triangle O_1AE \cong \triangle O_1BE$$

по 1) катетам

Координаты м. $O_2 (0; 0)$, м. $O_1 (0; \pm b)$, поэтому

$O_1O_2 = \pm b$. $\angle AEO_1 = \angle O_2EC$ как вертикальные,
углы между радиусами, проводящими вл.касания,

$\angle O_1AE = \angle ECO_2 = 90^\circ \Rightarrow \triangle AEO_1 \sim \triangle ECO_2$,

$$k = \frac{AO_1}{CO_2} = \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{b}{\sqrt{b^2 - 4a^2}} = 4. (AO_1 \text{ и } CO_2 - \text{радиусы}).$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично ~~известно~~ $\triangle EO_1A \sim \triangle EO_2D$,

$$k = \frac{O_1A}{O_2D} = 4, \quad \frac{EO_2}{EO_1} = \frac{1}{4}, \Rightarrow \frac{EO_2}{O_1O_2} = \frac{1}{3}, \Rightarrow$$
$$EO_2 = \frac{O_1O_2}{3} = 4.$$

$$\angle = \angle PEO_2 = \angle CEO_2 \quad (EO_1 - \text{биссектр.})$$

$$ED = \sqrt{O_2E^2 - O_2D^2} = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{O_2D}{ED} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

Аналогично $\alpha_3 = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{15}$

$$\alpha_4 = -\sqrt{15}.$$

$$\text{Ответ: } -\sqrt{15}; -\frac{\sqrt{119}}{5}; \frac{\sqrt{119}}{5}; \sqrt{15}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab : 2^{15} 7^{11}$$

$$ab = 2^{16} 7^{11}$$

$$bc : 2^{14} 7^{18}$$

$$bc = 2^{17} 7^{11}$$

$$c = 2^{12} 7^{23}$$

$$ac : 2^{23} 7^{39}$$

$$ac = 2^{23} 7^{39}$$

$$\begin{cases} ab = 2^{15} 7^{11} \\ bc = 2^{17} 7^{11} \end{cases}$$

$$a^2 = 2^2 7^{32} \quad c = 2a \cdot 7^7$$

$$\begin{cases} ab = 2^{15} 7^{11} \\ bc = 2^{17} 7^{11} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2^2 7^7 \\ c = a \cdot 2^2 \cdot 7^7 \end{cases}$$

$$a^2 \cdot 2^2 \cdot 7^7 = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a = \sqrt{2} \cdot 2^{10} \cdot 7^{16} \quad a^2 + 7ab + b^2$$

2. $\text{KOD}(a, b) = 1$

$$\begin{aligned} a^2 + 7ab + b^2 - (a+b)^2 &= \\ = a^2 - 2ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2 &= \\ = -9ab & \end{aligned}$$

~~$$\frac{a+b}{a^2 + 7ab + b^2}$$~~

$$\text{KOD}(a+b, a^2 + 7ab + b^2) = m$$

$$\text{KOD}(a+b, a^2 + 7ab + b^2) = \text{KOD}(a+b, -9ab) =$$

$$= \text{KOD}(-9ab, a+b)$$

$$\frac{a+b}{-9ab} = \frac{1}{9b} + \frac{1}{9a}$$

$$\text{KOD}(a+b, a^2 + 7ab + b^2) \neq \text{KOD}(a+b)$$

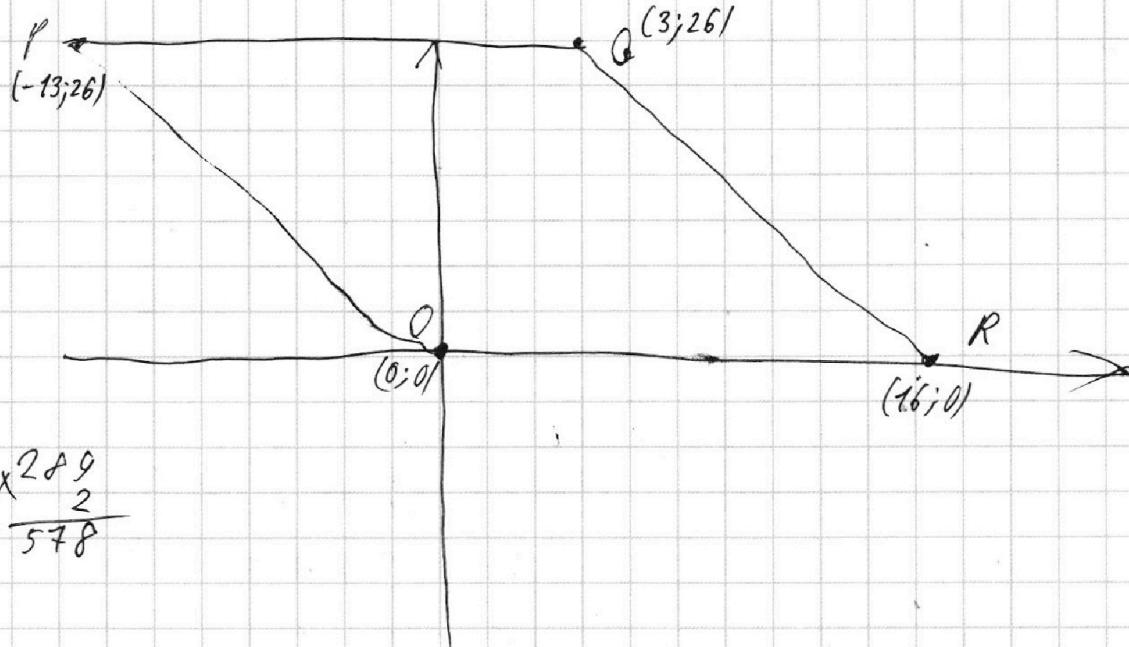
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



process.



$$x_1 - 1 : \quad x_1 + 1 : \quad +2 \quad -2$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 \text{ even}$$

$$y_1 - 1 : \quad y_1 + 1 : \quad +1 \quad -1$$

$$\max: 2 \cdot (16 + 13) + -26 = 2 \cdot 29 - 26 = 58 - 26 = 32$$

$$\begin{array}{r} x^{69} \\ 16 \\ \hline 414 \\ 69 \\ \hline 7104 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^{35} \\ 35 \\ \hline 775 \\ 705 \\ \hline 7225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^{69} \\ 2 \\ \hline 738 \\ 7156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^{338} \\ 338 \\ \hline 2404 \\ 1014 \\ 1014 \\ \hline 114294 \\ 529448 \\ \hline 643692 \end{array}$$

$$x^2 = \sqrt{\frac{643692 - 338}{578}}$$

$$\begin{array}{r} x^{1156} \\ 458 \\ \hline 9248 \\ 5780 \\ 4624 \\ \hline 529448 \end{array}$$



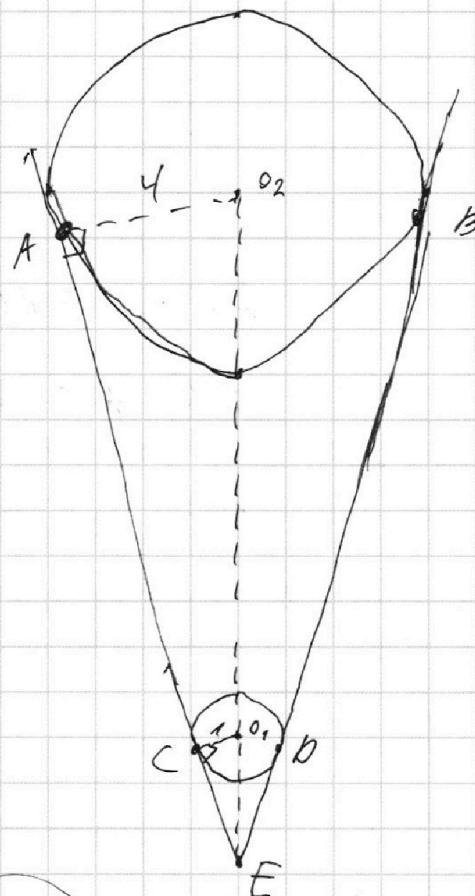
На одной странице можно оформлять **только** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{EO_1}{EO_2} = \frac{1}{4}$$

$$EO_2 = 4 EO_1$$

$$EO_2 - EO_1 = 3 EO_1 = O_1 O_2 = \\ = 12$$

$$\underline{EO_1 = 4}$$

$$\underline{-4}$$

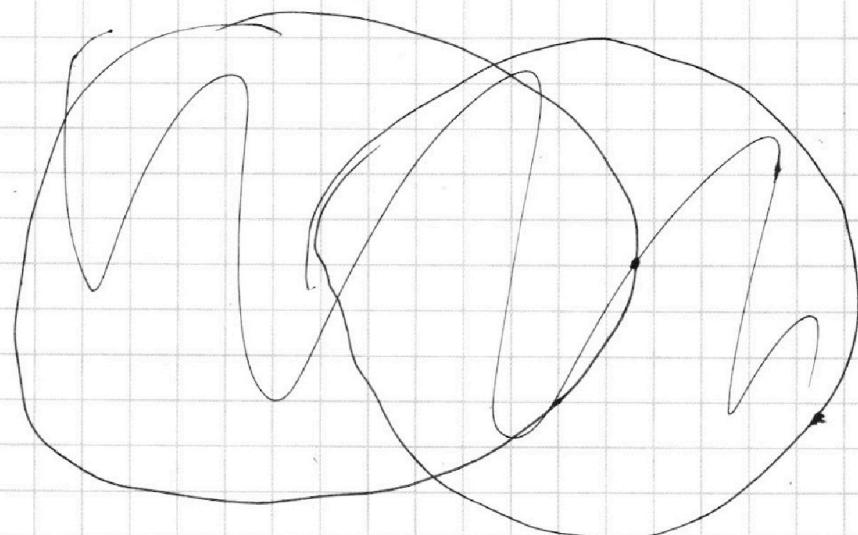
$$\begin{array}{r} 507 \\ \times 49 \\ \hline 458 \end{array}$$

~~$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 3 \\ \hline 507 \end{array}$$~~

$$289t^2 + 238t - 458 = 0$$

$$-4; \frac{12}{5}$$

3.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

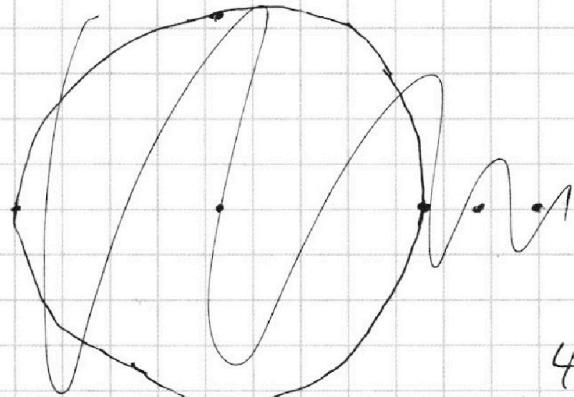
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r}
 \times 17 \\
 17 \\
 \hline
 119 \\
 + 17 \\
 \hline
 289
 \end{array}$$



$$EC \cdot r_2 = BC \cdot AC$$

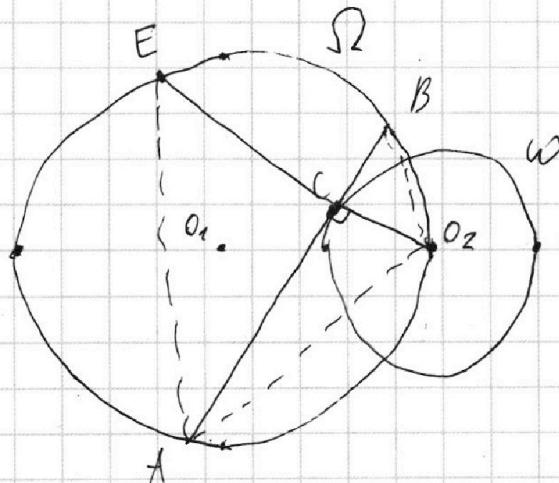
$$EC \cdot x = 17x \cdot 17x$$

$$EC = 17x^2$$

$$AE^2 = 289x^4 + 289x^2 -$$

$$4r_1^2 = AE^2 + BO_2^2 = 289x^4 + 289x^2 + 49x^2 + 49$$

$$4 \cdot 13^2 = 289x^4 + 338x^2 + 49$$



$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$$

$$AC = 17x$$

$$CB = 7x$$

$$x = ?, AB = ?$$

$$O_2E = r_1 = 13 \quad r_2 = 7$$

$$BO_2^2 - r_2^2 = 49x^2$$

$$AO_2^2 - r_2^2 = 17^2 x^2$$

$$BO_2^2 - 49 = 49x^2$$

$$AO_2^2 - 49 = 289x^2$$

$$BO_2^2 = 49(x^2 + 1)$$

$$AO_2 = \sqrt{289x^2 + 49}$$

$$BO_2 = 7\sqrt{x^2 + 1}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax + y = 86$$

$$y = 86 - ax$$

$$y = -ax + 86$$

$$a \neq 0$$

наайдется в
2 реш.

$$\begin{array}{r} 643692 \\ 321846 \\ 160923 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 643692 \\ 321846 \\ 160923 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 643692 \\ 321846 \\ 160923 \\ \hline 2 \end{array}$$

убылали моты
по оси ОУ.

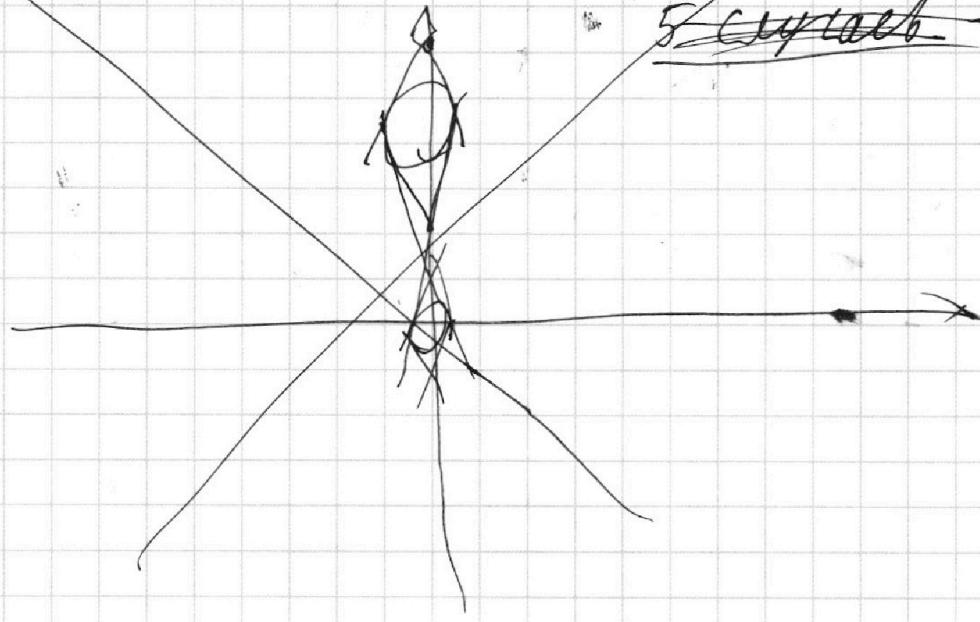
моты же в иле же скручивались

2 реш., 2 реш. и т.

1 м. с одной стороны с другой

2 м. с какой-то стороной

затруднительно





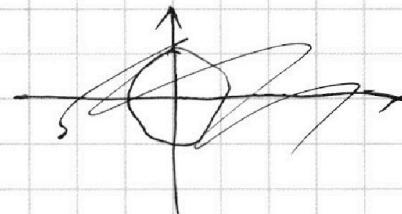
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

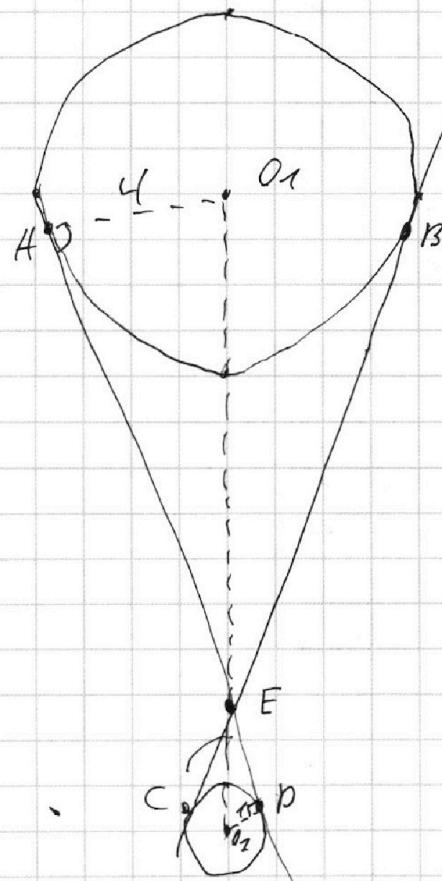
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



прямая, имеющая 2 общие точки
и может проходить внутри окружностей \Rightarrow
касается. одна окр. касаясь другого раза касается
касается обеих \Rightarrow общая касательная 2-х
окружностей. (либо внутр., либо внешн.)



$$O_1 O_2 = 12$$

$$O_2 E - ?$$

$$\triangle O_1 AE \sim \triangle O_2 BE$$

$$k = 4$$

$$\frac{O_1 E}{O_2 E} = 4$$

$$O_1 E = 4 O_2 E$$

$$O_1 E + O_2 E = 5 O_2 E = 16$$

$$O_2 E = \underline{\underline{\frac{16}{5}}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

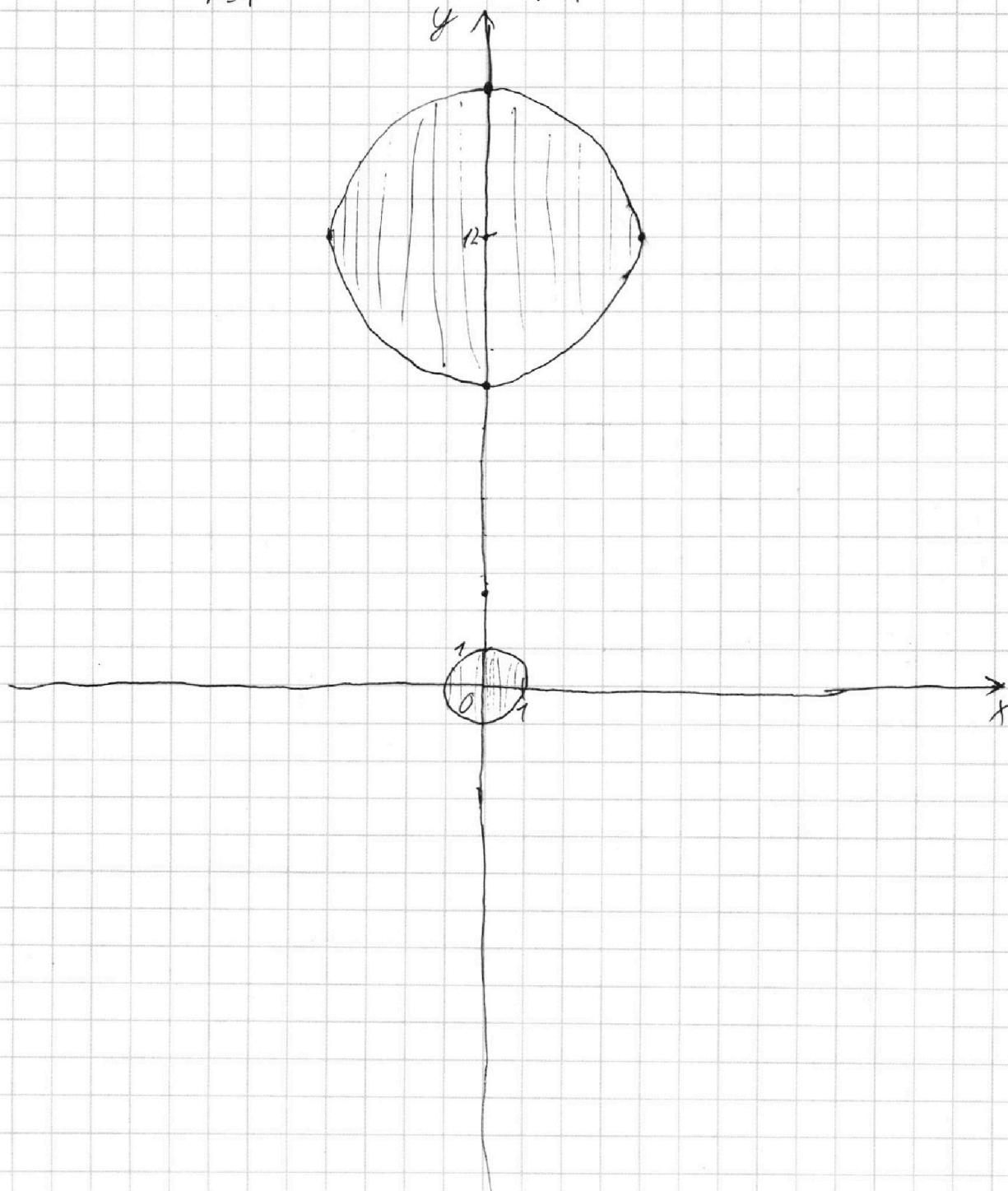
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6. $\begin{cases} ax + y - 8 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$ (1) (2)

$r=1$

$r=4$

2 реш.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4. \frac{\sqrt{3x^2 - 6x + 2}}{a} - \frac{\sqrt{3x^2 + 3x + 1}}{b} = 1 - 9x$$

$$a^2 - b^2 = -9x + 1 = 1 - 9x$$

$$\cancel{a^2} - \cancel{b^2} = a^2 - b^2$$

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$a - b = (a - b)(a + b)$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0$$

$$a = b$$

$$a + b = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$a = 1 - b$$

$$1 - b \geq 0$$

$$\begin{array}{|l} 3x^2 - 6x + 2 = 0 \\ D = 36 - 24 = 12 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \\ -9x + 1 = 0 \\ 9x - 1 = 0 \\ x = \frac{1}{9} \end{array} \right\}$$

$$1 \geq \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1 \geq \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad \cancel{x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

$$x^2 + x \leq 0$$

$$x(x+1) \leq 0$$

$$1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad + \quad \begin{array}{c} + \\ \diagup \quad \diagdown \\ \frac{1}{9} \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \cancel{-1 \quad 0} \\ \cancel{1} \end{array}$$

$$\frac{1}{9} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{8}{9}}$$

$$\sqrt{3} \sqrt{\frac{8}{9}}$$

$$3 \sqrt{\frac{64}{9}}$$

$$27 \sqrt{64}$$

$$V = <$$

26

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Задача } \alpha, b, c \in \mathbb{N}$$
$$\alpha b = 2^{15} \cdot 7^{11}$$
$$b c = 2^{17} \cdot 7^{18}$$
$$\alpha c = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

Решение. Нам нужно минимальное значение
 α, b, c , поэтому найдем минимальные a, b, c .
Для минимальности

$$\alpha b = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$b c = 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$c = 2^3 \cdot 7^7 \text{ т.к.}$$

$$\alpha b^2 c = 2^{32} \cdot 7^{29}$$

$$\alpha \cancel{b} \cancel{c} = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\alpha b = 2^{15} \cdot 7^{21}$$

$$b c = 2^{17} \cdot 7^{18} - \text{не получ.} + \text{ещё } 2$$

$$\alpha c = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha b = 2^{16} \cdot 7^{21} \\ b c = 2^{17} \cdot 7^{18} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha c = 2^{23} \cdot 7^{39} \\ \end{array} \right.$$

нужно достичь
минимум 7^{10}

$$\frac{\alpha}{c} = \frac{7^3}{2}$$

$$\alpha = \frac{c \cdot 7^3}{2}$$

$$C^2 \cdot \frac{7^5}{2} = 2^{24} \cdot 7^{36}$$

$$b = 2^5 \quad \alpha = 2^{11} \cdot 7^{21}$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{18}$$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ 9 \\ \hline 676 \\ 49 \\ \hline 627 \end{array} \quad \begin{aligned} b &= 114244 + 1156 \cdot 627 = \\ &= \underline{\underline{A39056}} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \times 1156 \\ 627 \\ \hline 8092 \\ 2312 \\ 6936 \\ \hline 729812 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 724812 \\ 114244 \\ \hline 839056 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 906 \\ 906 \\ \hline 5436 \\ 8154 \\ \hline 820836 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 916 \\ \times 916 \\ \hline 5996 \\ 916 \\ \hline 8244 \\ \hline 839056 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 914 \\ \times 914 \\ \hline 3656 \\ 914 \\ \hline 8226 \\ - 835396 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 916 \\ \times 338 \\ \hline 578 \end{array}$$