МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)\,(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

продолжение

Пример: $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 10$, $m_1 = 7$, $m_2 = 4$, $m_3 = 11$

$q_1 = 21$, $q_2 = 0$, $q_3 = 22$

Тогда $a = 2^4 3^7 5^{21}$

$b = 2^3 3^4 5^0$

$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{22}$

$a \cdot b = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{21} : 2^7 3^{11} \cdot 5^{14}$

$b \cdot c = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{22} : 2^{13} 3^{15} \cdot 5^{18}$

$a \cdot c = 2^{14} \cdot 3^{18} \cdot 5^{43} : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

Следовательно, $a \cdot b \cdot c = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Ответ: $a \cdot b \cdot c_{min} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab : 2^{7} \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$
$bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$
$ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

$abc \to min$; $abc - ?$
$a, b, c \in \mathbb{N}$

n_1 - кол-во 2, на которое делится число a
n_2 - кол-во 2, на которое делится число b
n_3 - кол-во 2, на которое делится число c
m_1 - кол-во 3, на которое делится число a
m_2 - кол-во 3, на которое делится число b
m_3 - кол-во 3, на которое делится число c
q_1 - кол-во 5, на которое делится число a
q_2 - кол-во 5, на которое делится число b
q_3 - кол-во 5, на которое делится число c

Тогда: $\begin{cases} n_1 + n_2 \geq 7 \\ + \begin{cases} n_2 + n_3 \geq 13 \\ n_1 + n_3 \geq 14 \end{cases} \end{cases}$, $n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{N}$

$2n_1 + 2n_2 + 2n_3 \geq 34$
$n_1 + n_2 + n_3 \geq 17 \to n_1 + n_2 + n_3 = 17$ (нужно min)

$+ \begin{cases} m_1 + m_2 \geq 11 \\ m_2 + m_3 \geq 15 \\ m_1 + m_3 \geq 17 \end{cases}$

$2m_1 + 2m_2 + 2m_3 \geq 43$
$m_1 + m_2 + m_3 \geq 21,5 \to m_1 + m_2 + m_3 = 22$ (нужно min)

$+ \begin{cases} q_1 + q_2 \geq 14 \\ q_2 + q_3 \geq 18 \\ q_1 + q_3 \geq 43 \end{cases}$

$2q_1 + 2q_2 + 2q_3 \geq 75$
$q_1 + q_2 + q_3 \geq 37,5 \to q_1 + q_2 + q_3 = 38$ (нужно min)

Но тогда $q_2 \leq -5$, чего быть не может. $\to q_1 + q_2 + q_3 \neq 38$
Значит $q_1 + q_3 \geq 43$. Чтобы $q_1 + q_2 + q_3 \to min$
$q_1 + q_3 = 43$
$q_2 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

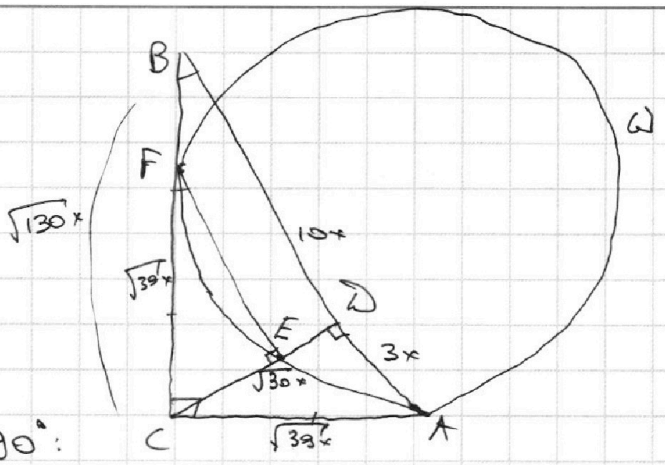
1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Дано: ABC - прямоуг. $\triangle$
CD - высота
$AB \parallel EF$
$AB : BD = 13 : 10$
$E, F, A \in \omega$

Найти: $\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$ - ?



Решение:

① т.к. $\angle C = 90°$:

$CD = \sqrt{AD \cdot BD}$

$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$, $AB = BD + AD$ $\}$ $\rightarrow$ $3BD = 10AD$

Пусть $AD = 3x$, тогда $BD = 10x$

$CD = \sqrt{3x \cdot 10x} = \sqrt{30}x$

② $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \sqrt{30}x = \frac{3\sqrt{30}}{2}x^2$

③ т.к. $AB \parallel EF$: $\angle CFE = \angle CBD$ (соотв. углы при прямых AB и EF и секущей CB)

Рассмотрим $\triangle CFE$ и $\triangle CBD$:
$\angle C$ - общий
$\angle CFE = \angle CBD$
$\downarrow$
$\triangle CFE \sim \triangle CBD$ (2 угла)

④ $AC = CF$ (отрезки касательных из т. C)

$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{39}x$ (из $\triangle ACD$); $CF = \sqrt{39}x$

$CB = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{130}x$ (из $\triangle CDB$)

$k_{под. \triangle CFE \text{ и } \triangle CBD} = \frac{CF}{CB} = \frac{\sqrt{39}x}{\sqrt{130}x} = \sqrt{\frac{3}{10}}$

⑤ из ③ и ④ $\rightarrow$ $CE = k \cdot CD = \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \sqrt{30}x = 3x$

$EF = k \cdot BD = \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot 10x = \sqrt{30}x$

$\angle CEF = \angle CDB = 90°$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

продолжение

⑥ $S_{\Delta CEF} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \sqrt{30}x = \frac{3\sqrt{30}}{2}x^2$

⑦ $\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta CEF}} = \frac{3\sqrt{30}x^2 \cdot 2}{2 \cdot 3\sqrt{30}x^2} = 1$

Ответ: $\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta CEF}} = 1.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$. Пусть $y = \arccos x \to x \in [-1;1]$

Разделим на 5 обе части и применим ф-ию cos.

$y \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$\to 5\arccos x \in [0; \frac{5\pi}{2}]$

$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$

$0 \le \frac{3\pi}{2} + x \le \frac{5\pi}{2}$

Значения синуса и косинуса совпадают при аргументах, равных $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ и $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$; $n \in Z$, $k \in Z$

$-\frac{3\pi}{2} \le x \le \pi$

$-1 \le \sin x \le 1$

(оба аргумента должны быть равны либо $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, либо $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$)

① $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$.

$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \stackrel{?}{=} \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi n}{5}\right)$

$\sin\frac{\pi}{4} \ne \cos\left(\frac{7\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}\right)$. Т.к. $x \in [-\frac{3\pi}{2}; \pi] \to n = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$

$\sin\frac{\pi}{4} \ne \cos\left(\frac{7\pi}{20}\right)$

② $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$

$\sin\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right) \stackrel{?}{=} \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi k}{5}\right)$, т.к. $x \in [-\frac{3\pi}{2}; \pi] \to n = -1$, $x = -\frac{3\pi}{4}$

$\sin\frac{5\pi}{4} \ne \cos\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{3\pi}{20}\right)$

$\sin\frac{5\pi}{4} \ne \cos\left(\frac{3\pi}{20}\right)$ → больше нигде не могут совпадать значения синуса и косинуса → нет решений

Ответ: нет решений.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 & (1) \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 & (2) \end{cases}$$

Из (2): $x^2+14x+y^2+45=0$ или $x^2+y^2-9=0$

$(x+7)^2+y^2=4$

$x^2+y^2=9$

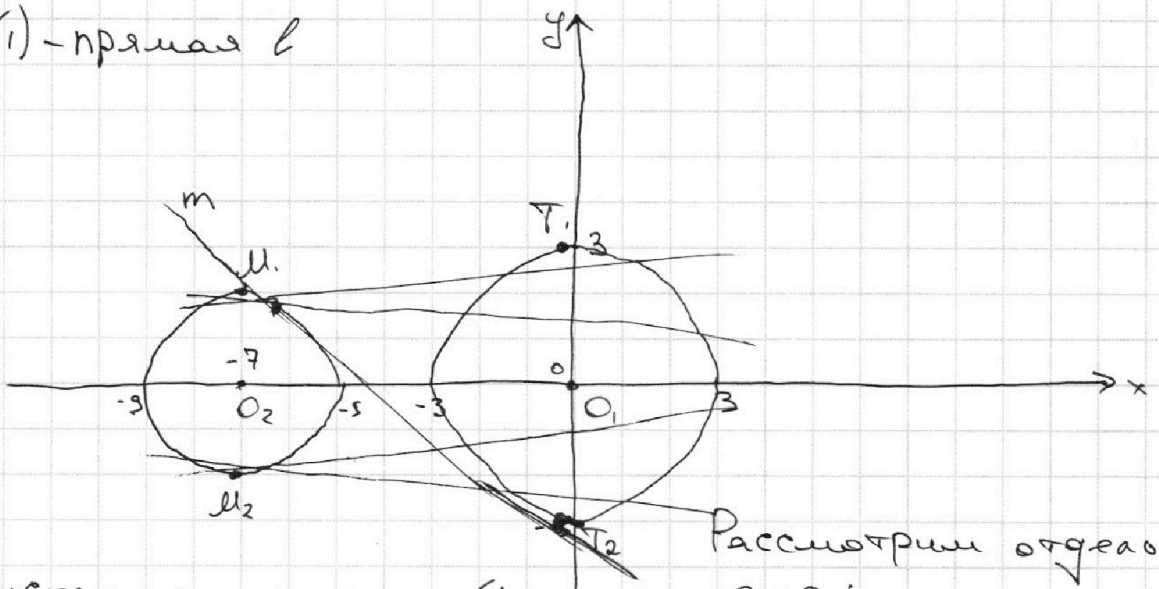
$O_1(-7;0)$ – окружность

$R_1=2$

$O_2(0;0)$ – окружность

$R_2=3$

(1) – прямая l



Система имеет 4 решения тогда и только тогда, когда ~~окр~~ прямая пересекает каждую окружность дважды.

Рассмотрим отдельно $a=0$:

$x=7b$ – вертикальная прямая $\Rightarrow$ max – 2 решения

То есть надо рассмотреть предельные случаи секущих (касательные) к каждой окружности

① к меньшей окружности

~~$d(O_1;l)=R_1$~~ $d(O;l)=2R_1$

$$\left|\frac{-7-7b}{\sqrt{1+9a^2}}\right|=2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

продолжение

$$\left|-\frac{7}{2}(1+b)\right| = \sqrt{1+9a^2}$$

$f(x)$ = парабола ветвями вверх

$$\begin{cases} 1+b \le 0 \Rightarrow b \le -1 \\ \frac{49}{4} + \frac{49}{2}b + \frac{49}{4}b^2 = 1+9a^2 \end{cases} \rightarrow \frac{49}{4}b^2 + \frac{49}{2}b + \frac{49}{4} - 9a^2 - 1 = 0$$

Чтобы было решение D должен быть ≥ 0

$$D = \frac{49^2}{4} - 4 \cdot \frac{49}{4}\left(\frac{49}{4} - 9a^2 - 1\right) = \frac{49}{4}\left(\frac{49}{4} - 49 + 36a^2 + 4\right) \ge 0$$

$$7(9a^2+1) \ge 0$$

D всегда > 0

Чтобы b было ≤ -1

Надо, чтобы $f(-1) \le 0$:

$$\frac{49}{4} - \frac{49}{2} + \frac{49}{4} - 9a^2 - 1 \le 0$$

$9a^2 + 1 \ge 0$ – всегда

② k большей окружности:

$d(O_2; \ell) = R_2$

$$\left|\frac{-7b}{\sqrt{1+9a^2}}\right| = 3$$

$$\left|-\frac{7}{3}b\right| = \sqrt{1+9a^2}$$

$$\begin{cases} \frac{49b^2}{9} = 1+9a^2 \rightarrow b = \pm\sqrt{\frac{9+81a^2}{49}} \\ b \le -1 \end{cases}$$

при $\forall a$: $b = -\sqrt{\frac{9+81a^2}{49}}$

Но m – общая касательная (со своим „a")

И картинка симметрична относит. оси $Ox \rightarrow$

если „a" – решение, то „$-a$" – тоже.

Ответ будет выглядеть следующим образом: a

$$a \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение №2-ое

$$\begin{cases} \frac{49}{4}a^2 + \frac{49}{2}ab + \frac{49b^2}{4} = 1 + 9a^2 \\ \frac{49b^2}{9} = 1 + 9a^2 \end{cases}$$

$$\frac{49}{4}a^2 + \frac{49}{2}ab + \frac{49b^2}{4} = \frac{49b^2}{9}$$

$$5b^2 + 18b + 9 = 0$$

$$D = 18^2 - 4 \cdot 9 \cdot 5 = 18(18 - 2 \cdot 5) = 144$$

$$b_{1,2} = \frac{-18 \pm 12}{10} = \begin{cases} -3 \\ -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$a^2 = \frac{\frac{49b^2}{9} - 1}{9}$$

при $b = -3$:

$$a^2 = \frac{48}{9}$$

$$a = \pm \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

при $b = -\frac{3}{5}$

$$a^2 = \frac{24}{225}$$

$$a = \pm \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

Возьмем только $a > 0$ (потом отразим):

$y = \frac{-x}{3a} + \frac{7b}{3a}$ Запишем в виде $y = px + q$

$$p = -\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{1}{4}$$

$$q = \frac{-21}{3 \cdot 4\sqrt{3}} = -\frac{21}{4}$$

$y = -\frac{1}{4}x - \frac{21}{4}$

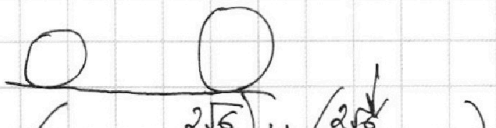
(это касат. снизу)

$$p = -\frac{7}{3 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{15}} = -\frac{5}{2\sqrt{6}}$$

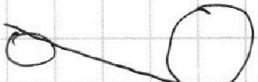
$$q = \frac{7 \cdot (-\frac{3}{5})}{3 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{15}} = \frac{-21}{2\sqrt{6}}$$

$$y = -\frac{5}{2\sqrt{6}} - \frac{21}{2\sqrt{6}}$$

(это необходимая касательная)



$a \in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$



Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_7^4 6x + 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_7^4 6x + \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2\log_7|6x|} - 4 \\ \log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2\log_7|y|} - 4 \end{cases}$$

$xy - ?$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$

$\log_7|6x| = \log_7 6x$

$\log_7|y| = \log_7 y$

(т.к. $x, y > 0$ по ОДЗ)

Пусть $\log_7 6x = t$, а $\log_7 y = p$,

тогда:

$$\begin{cases} t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4 \quad | \cdot t \neq 0 \\ p^4 + \frac{6}{p} = \frac{5}{2p} - 4 \quad | \cdot p \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^5 + 4t - \frac{7}{2} = 0 \\ p^5 + 4p + \frac{7}{2} = 0 \end{cases}$$

Если $t = \log_7 6x$,

$x = \frac{7^t}{6}$

Если $p = \log_7 y$,

$y = 7^p$

Обозначим:

$f(t) = t^5 + 4t - \frac{7}{2}$

$f'(t) = 5t^4 + 4 > 0$

ф-ия возрастает,

следовательно имеет

1 пересечение с осью OT (1 решение уравнения: $t^5 + 4t - \frac{7}{2} = 0$)

Т.е. Найти надо $xy = \frac{7^t \cdot 7^p}{6}$

$g(p) = p^5 + 4p + \frac{7}{2}$

$g'(p) = 5p^4 + 4 > 0$

ф-ия возрастает, следовательно имеет одно пересечение с осью OP (1 решение уравнения: $p^5 + 4p + \frac{7}{2} = 0$)

Заметим, что единственным решением обоих у-ий будет $t = -p$:

$(-p)^5 + 4(-p) - \frac{7}{2} = 0$

$-p^5 - 4p - \frac{7}{2} = 0 \longrightarrow p^5 + 4p + \frac{7}{2} = 0$ - в таком случае

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

продолжение

одно уравнение превращается в другое.

Итого $t = -p$; получаем, что

$$\frac{7^t \cdot 7^p}{6} = \frac{7^p \cdot 7^p}{6} = \frac{7^p}{7^p \cdot 6} = \frac{1}{6} \rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

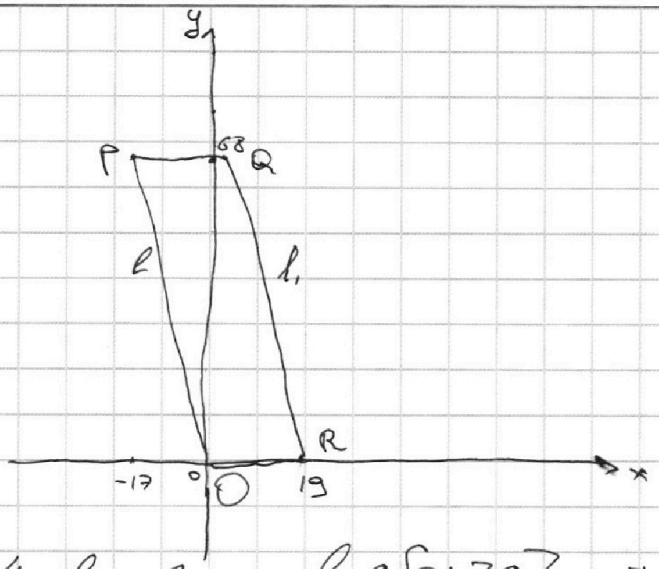
Ответ: $\frac{1}{6} = xy$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



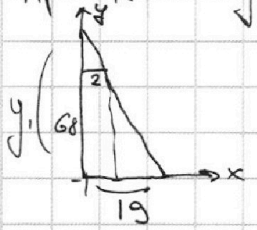
$l: y = 4x + b$, где $b \in [0; 76]$ – точка пересечения с осью Oy.

$x \in [-17; 19]$

$y \in [0; 68]$

$l_1: y = -4x + b$

при $x = 0$: $y = b$



$$\frac{68}{17} = \frac{y_1}{19} = 4 \to y_1 = 76 \to b_{max} = 76$$

$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40 \to \underbrace{4\Delta x}_{\vdots 4} + \underbrace{\Delta y}_{\vdots 4} = 40 \Big\} \to \Delta y : 4$

$\Delta x = x_2 - x_1$

$\Delta y = y_2 - y_1$

Рассмотрим $\Delta y = 4 \to \Delta x = 9 \to 11$ пар (17 случаев)

$\Delta y = 8 \to \Delta x = 8 \to 12$ пар (16 сл.) (т.к. можно соответственно переходить на 1 клетку)

$\Delta y = 12 \to \Delta x = 7 \to 13$ пар (15 сл.)

$\Delta y = 16 \to \Delta x = 6 \to 14$ пар (14 сл.)

$\Delta y = 20 \to \Delta x = 5 \to 15$ пар (13 сл.)

$\Delta y = 24 \to \Delta x = 4 \to 16$ пар (12 сл.)

$\Delta y = 28 \to \Delta x = 3 \to 17$ пар (11 сл.)

(при $\Delta y = 4$:
$y_2 = 4$
$y_1 = 0$
или
$y_2 = 8$
$y_1 = 4$
или
$y_2 = 12$
$y_1 = 4$
и т.д.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

продолжение

$\Delta y = 37 \to \Delta x = 2 \to 18$ пар (10 см)

$\Delta y = 36 \to \Delta x = 1 \to 19$ пар (9 см)

$\Delta y = 40 \to \Delta x = 0 \to 20$ пар (8 см)

Итого: $2 \cdot 11 \cdot 17 + 2 \cdot 12 \cdot 16 + 2 \cdot 13 \cdot 15 + 14 \cdot 14 + 180 + 19 \cdot 9 + 20 \cdot 8 =$

$= 2 \cdot 187 + 24 \cdot 16 + 30 \cdot 13 + 196 + 180 + 171 + 160 =$

$= 374 + 384 + 390 + 196 + 180 + 171 + 160 =$

$= 758 + 586 + 351 + 160 = 1344 + 511 = 1855$ пар точек

$1855 \cdot 2 = \begin{pmatrix} \Delta x < 0 \\ \Delta y < 0 \end{pmatrix} \to 3710$ пар точек

Ответ: ~~1855~~ 3710 пар точек.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$

$\frac{3\pi}{10} + \frac{\frac{\pi}{6} + \pi n}{5} = \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5} = \frac{\pi}{4} + \pi k$

$\frac{7\pi}{20} + \frac{\pi n}{5} = \frac{\pi}{4} + \pi k$

$\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5} = \pi k$

$\pi + 2\pi n = 10\pi k$ $\quad k, n$

$1 + 2n = 10k$

$n = \frac{10k - 1}{2} = 4.$ н.т.

$n \in N$

$k \in N$

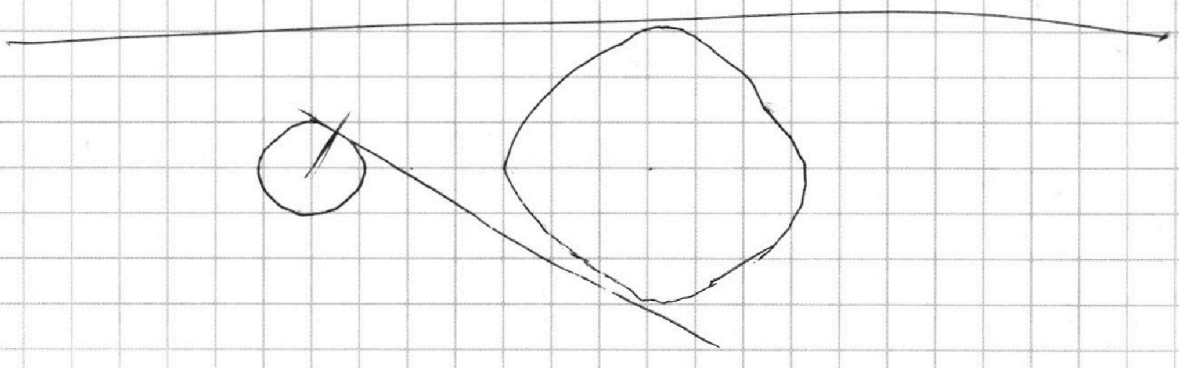
$d < 0$

$-\frac{49}{2} \pm \sqrt{7(9a^2+1)}$

$d = \frac{49}{4}$

$a = 2$

$-1 \pm \frac{2\sqrt{9a^2+1}}{49}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$

$\sin x - \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) = 0$

$\sin x - \cos\frac{3\pi}{10}$

$y = \arccos x \quad x \in [-1; 1]$

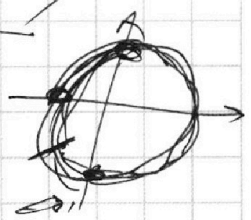
$y \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$5y \in [0; \frac{5\pi}{2}]$

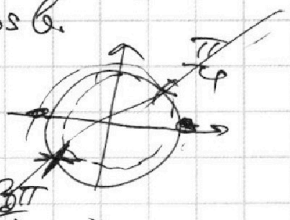
$0 < \frac{3\pi}{2} + x \le \frac{5\pi}{2} \quad / -\frac{3\pi}{2}$

$-\frac{3\pi}{2} \le x \le \pi$

$\sin x \in [-1; 1]$



$\sin\alpha = \cos\beta$



$x = -\frac{3\pi}{4}$ или $x = \frac{\pi}{4}$

$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) ? \cos\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{3\pi}{20}\right)$

$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) ? \cos\frac{3\pi}{20}$

$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{20}\right)$

$\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} = \frac{\pi}{4}$

$\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} = \frac{5\pi}{20}$

$\frac{4x}{20} = \frac{2\pi}{20}$

$x = \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$

$\frac{4x}{5} = \frac{3\pi}{10} \rightarrow x = \frac{3\pi}{8}$

$\frac{3\pi}{20} + \frac{4x}{20} = -\frac{15\pi}{20}$

$\frac{4x}{20} = -\frac{18\pi}{20}$

$x = -\frac{9}{2}\pi$

$-\frac{x\pi}{20} - \frac{2\pi n}{5}$

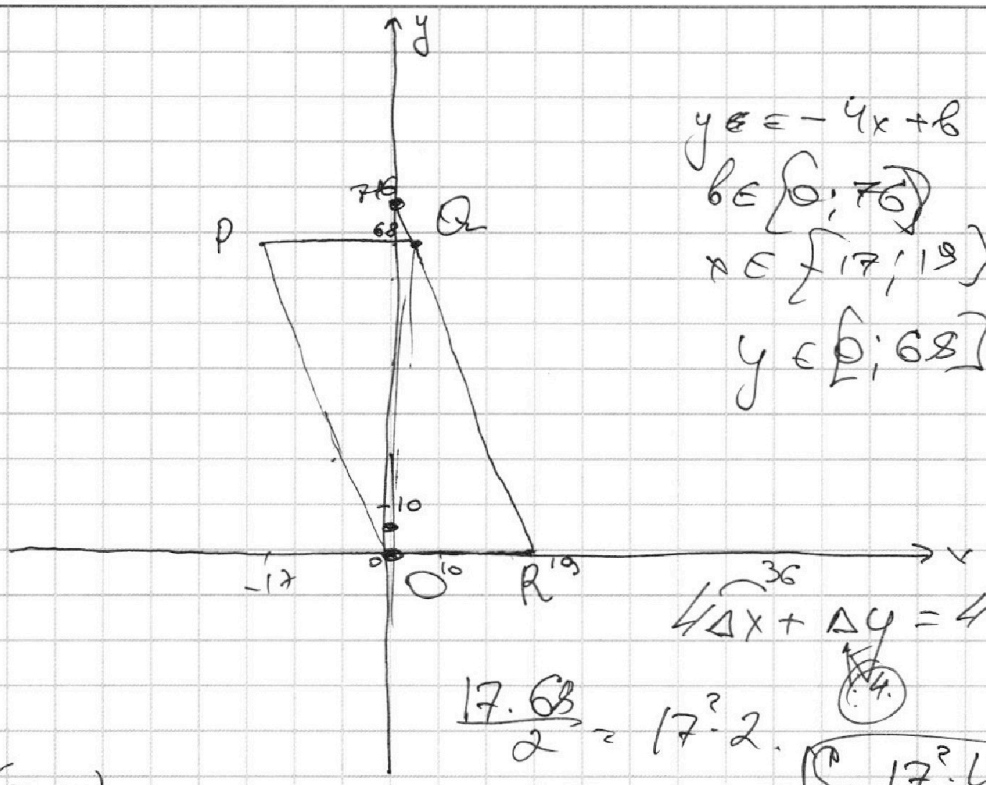
y

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$y \in -4x + b$

$b \in [0; 76]$

$x \in [17; 19]$

$y \in [0; 68]$

$4\Delta x + \Delta y = 40 \quad :4$

$\frac{17 \cdot 68}{2} = 17^2 \cdot 2$

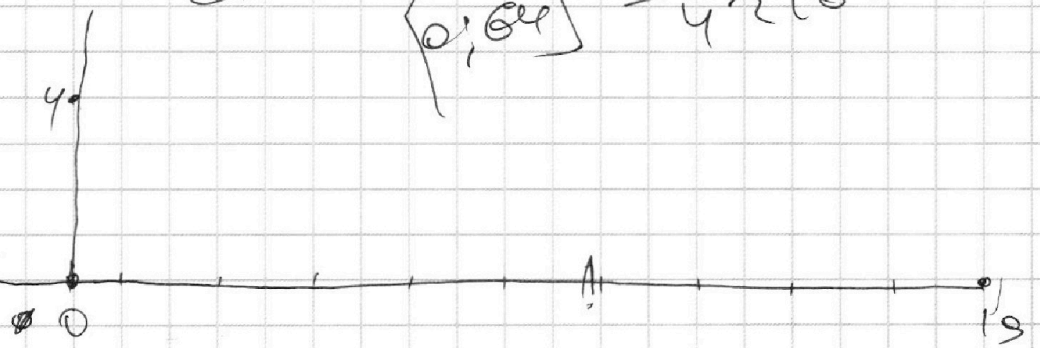
$S = 17^2 \cdot 4$

$(0;4)$

$(1;5)$

$[0; 60]$

$[0; 64]$ $\frac{64}{4} = 16 + 1$



4 $\Delta x = 9$

$(0;8)$
$+(9;18)$ } 1 пар

$8 + 19 = 171$

37
$+38$
$\overline{75}$

$2 \cdot 2 = 4$
$+16$
$\overline{20}$
$+16$
$\overline{36}$

390
$+180$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} {}^{1}380 \\ +186 \\ \hline 586 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ +171 \\ \hline 351 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {}^{1}{}^{1}758 \\ +586 \\ \hline 1344 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 354 \\ +160 \\ \hline 511 \end{array}$$

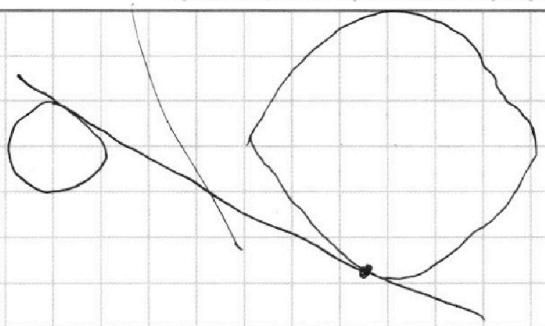
$$\begin{array}{r} \sqrt{1855} \\ \quad 2 \\ \hline 3710 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x+3ay-7b=0$

$\frac{7}{2}(1+b)=\sqrt{1+8a^2}$

$\frac{49}{4}+\frac{49}{2}b+\frac{49}{4}b^2=1+8a^2$

$\frac{49}{9}b^2=1+9a^2$

$\frac{49}{4}+\frac{49}{2}b+\frac{49}{4}b^2=\frac{49}{9}b^2 \quad |\cdot 36$

$49\cdot 9+49\cdot 18b+49\cdot 9b^2=49\cdot 4b^2$

$49\cdot 5b^2+49\cdot 18b+9=0$

$5b^2+18b+9=0$

$D=18\cdot 18-4\cdot 9\cdot 5=18(18-2\cdot 5)=18\cdot 8=144$

$b_{1,2}=\frac{-18\pm 12}{5\cdot 2}=\begin{cases}\frac{-18-12}{5}=\frac{-6}{2}=-3\\ \frac{-18+12}{5}=\frac{-6}{10}\end{cases}$

$a^2=\frac{\frac{49}{9}b^2-1}{9}$

$-6:$

$\frac{\frac{49}{9}\cdot 36-9}{9}=\frac{49\cdot 36-9}{81}=9(49\cdot 4-1)$

$a^2=\frac{196}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$-\frac{6}{5}$: $a^2 = \frac{\frac{49}{9}b^2 - 1}{9} = \frac{\frac{49 \cdot 36}{9 \cdot 25} - \frac{25}{25}}{9} =$

$= \frac{196 - 25}{9 \cdot 25} = \frac{171}{9 \cdot 25}$

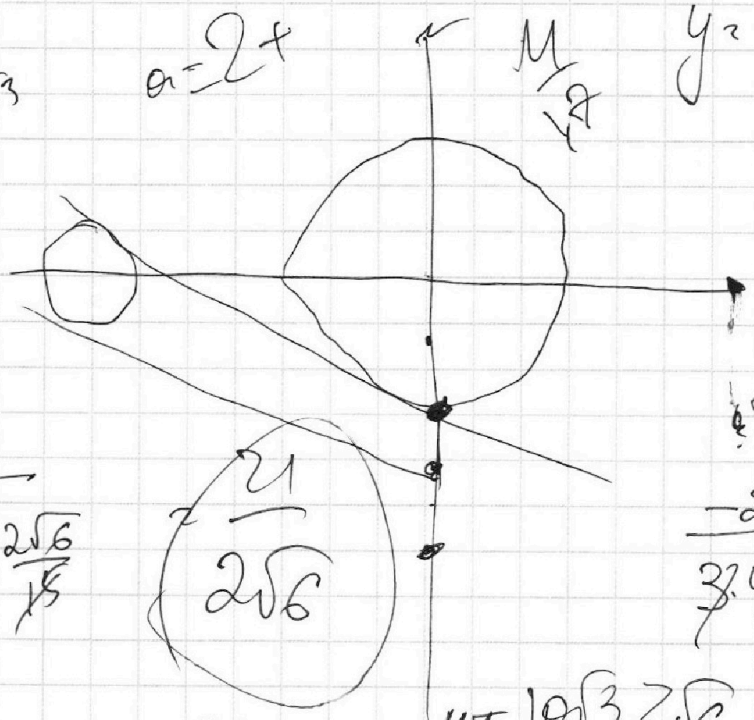
$a = \frac{14}{3}$; $b = -6$

$a = \frac{\sqrt{171}}{15}$; $b = -\frac{6}{5}$

$y = \frac{-x + 76}{3a}$

$y = \frac{76}{3a}$

$a = 2$



$\frac{21}{5 \cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{15}}$

$\frac{21}{2\sqrt{6}}$

$\frac{21}{2\sqrt{6}}$

$\frac{-21}{3 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3}}$ = $\frac{-21}{4\sqrt{3}}$

$10\sqrt{3} > 2\sqrt{6}$

$20\sqrt{3}$ $2\sqrt{6}$

$\frac{17}{+\frac{4}{6,8}} = 21$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

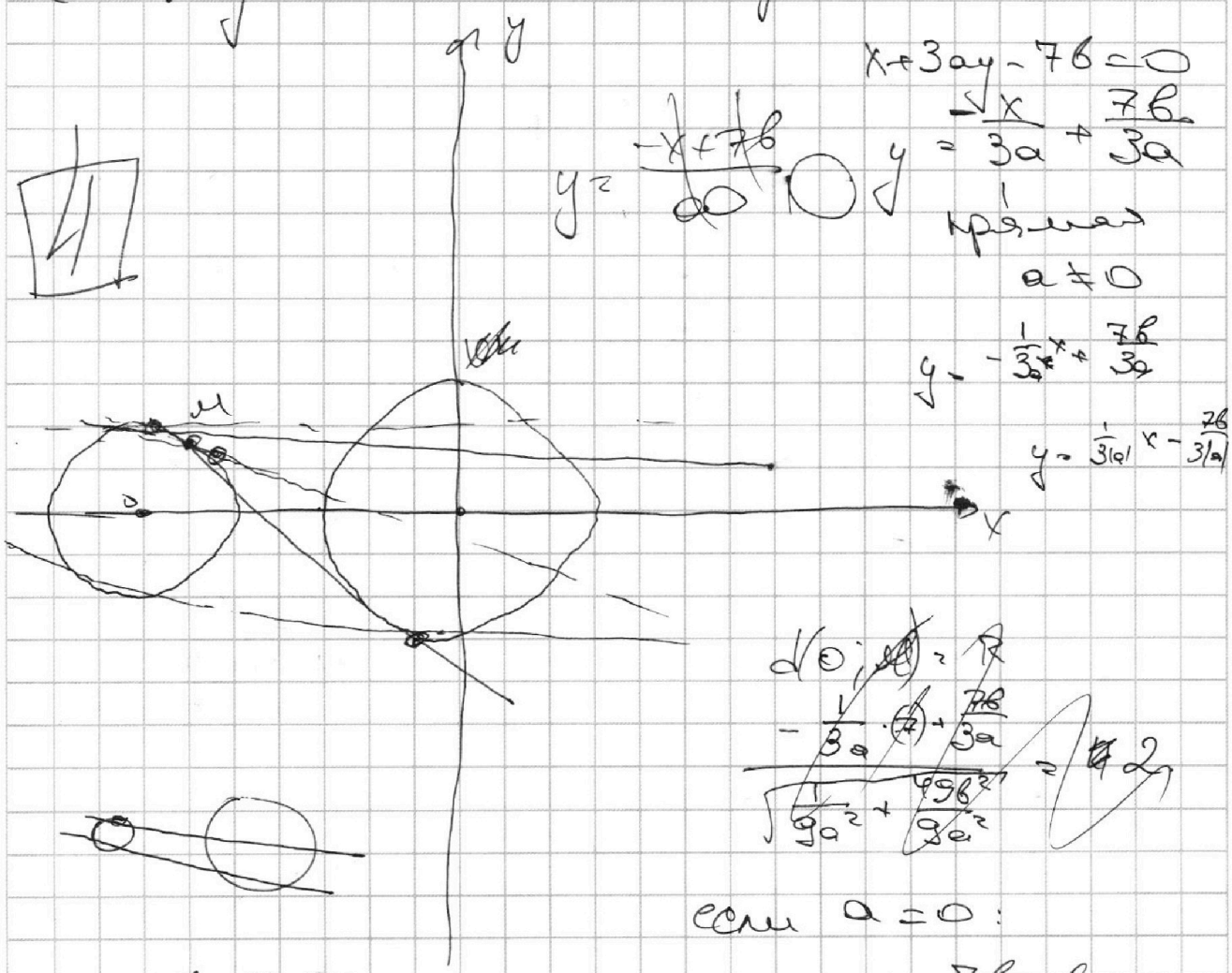
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4) $\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ x^2+14x+y^2+45=0 \end{cases}$ или $x^2+y^2=9$

$(x+7)^2+y^2=-45+49=4$ $\quad x^2+y^2\le 9$



$x+3ay-7b=0$

$y=\frac{-x+7b}{3a}$ ✓

$y=\frac{x}{3a}+\frac{7b}{3a}$

прямая

$a\neq 0$

$y=-\frac{1}{3a}x+\frac{7b}{3a}$

$y=\frac{1}{3|a|}x-\frac{7b}{3|a|}$

$d(O,\ell)=R$

$\frac{\left|-\frac{1}{3a}\cdot 0+\frac{7b}{3a}\right|}{\sqrt{\frac{1}{9a^2}+\frac{1}{9a^2}}}=2$

если $a=0$:

$x=7b$ — вертикальная прямая

$\frac{|7+7b|}{\sqrt{49b^2+1}}=2$

$7+7b=2\sqrt{49b^2+1}$

$7(1+2b+b^2)=2(49b^2+1)$

$7+14b+7b^2=98b^2+2$

$91b^2-14b-5=0$ $\quad D>0$

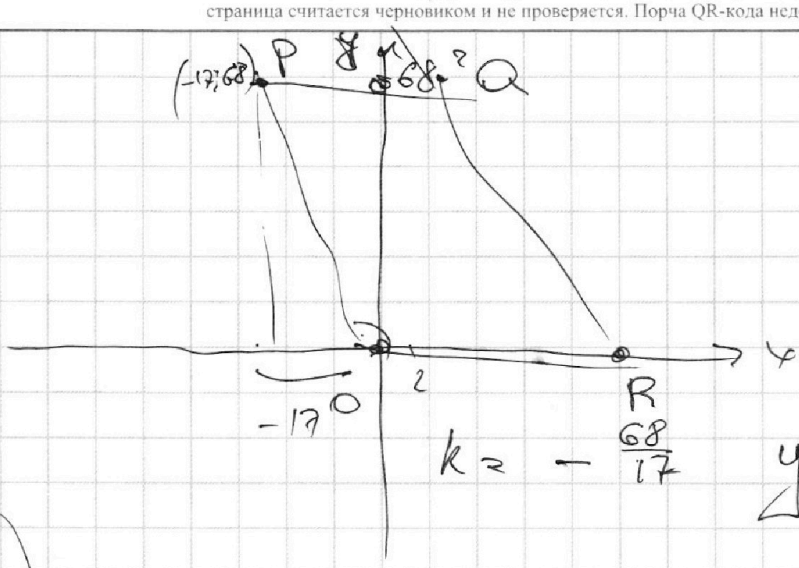
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

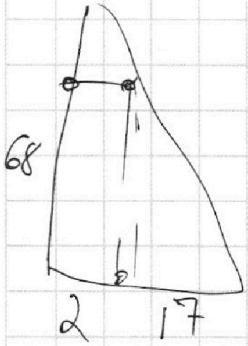
МФТИ

6)



$k = -\frac{68}{17}$ $\quad y = -\frac{68}{17}x + b$

$b \in [0; 76]$



$\frac{17}{68} = \frac{19}{y} \to y = \frac{19 \cdot 68}{17} = 19 \cdot 4 = 76$

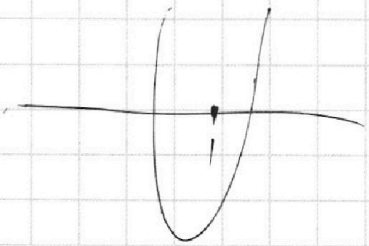
$y = -4x + b$

$b \in [0; 76]$

$y \in [0; 68]$

$x \in [-17; 19]$

$4\Delta x + \Delta y = 40$



$\delta(-1) \le 0$

$\frac{49}{4} - \frac{49}{2} + \frac{49}{4} - 9a^2 + 1 < 0$

$9a^2 + 1 > 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-7-7b = 2\frac{\sqrt{49b^2+1}}{3a}$$

$$\frac{-7(1+b)\cdot 3a}{2} = \sqrt{49b^2+1} \quad /\,^2 \qquad (1+b)3a \le 0$$

$$\frac{49}{4}9a^2(1+2b+b^2) = 49b^2+1$$

$$D = \left(\frac{49}{4}\cdot 9a^2\right)^2 - 4\left(\frac{49}{4}\cdot 9a^2\right)\left(-\frac{49}{4}\cdot 9a^2+1\right) > 0$$

$$\frac{49\cdot 9a^2}{4}\cdot 2 - 4\left(1-\frac{49\cdot 9a^2}{4}\right)$$

$$\frac{1}{2}\cdot 49\cdot 9a^2 + 49\cdot 9a^2 - 4 > 0$$

$$\frac{3}{2}\cdot 49\cdot 9a^2 > 4 \quad /\cdot 2 : 5$$

$$a^2 > \frac{8}{3\cdot 49\cdot 9}$$

$$\frac{-7b}{\sqrt{1+9a^2}} = 3$$

$$-21b = \sqrt{1+9a^2} \qquad b \le 0$$

$$441b^2 \ge 1+9a^2$$

$$(-7-7b)2 = \sqrt{1+9a^2}$$

$$-14-14b = \sqrt{1+9a^2}$$

$$1+b \le 0$$

$$b \le -1$$

$$196+14^2\cdot 2b+196b^2 \ge 1+9a^2$$

$$196b^2+14^2\cdot 2b+196-9a^2-1 = 0$$

$$D = 14^2\cdot 2^2 - 4\cdot 14^2\cdot(4^2-9a^2-1) > 0$$

$$4\cdot 49\cdot 196 - 196 + 9a^2 + 1 > 0$$

$$9a^2+1 > 0$$

решений есть

$b =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{-7b}{\sqrt{1+9a^2}} = 3$

$-\frac{7b}{3} = \sqrt{1+9a^2} \quad | \cdot$ ~~b~~ $b \le 0$

$\frac{49b^2}{9} = 1+9a^2$

$49b^2 - 9 - 81a^2 = 0$

$D = 49^2 + 4 \cdot 49 \cdot 9 = 49(49+36) = 49 \cdot 85$

$\sqrt{49 \cdot 85} = 7\sqrt{85}$

$b = \frac{49 \pm 7\sqrt{85}}{98} = \frac{7 \pm \sqrt{85}}{14}$

$b \le 0 \Rightarrow b = \frac{7-\sqrt{85}}{14}$

$7 - \sqrt{85} = -196$

$49 + 16 = 65$

$196 - 65 = 131$

$9a^2 \ge 131$

$a \in (-\infty; -\frac{\sqrt{131}}{3}] \cup [\frac{\sqrt{131}}{3}; +\infty)$

4

$\frac{-2-7b}{\sqrt{1+9a^2}} = 2$

$-\frac{7}{2}(1+b) = \sqrt{1+9a^2}$

$\frac{49}{4} + \frac{49}{2}b + \frac{49}{4}b^2 = 1+9a^2 \quad | + b \le 0$

$b \le -1$

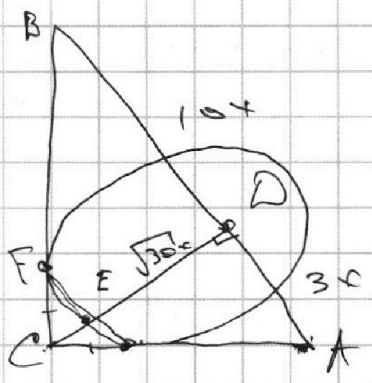
$D = \frac{49^2}{4} - 4 \cdot \frac{49}{4}\left(\frac{49}{4} - 9a^2 - 1\right) > 0$

$\frac{49}{4} - 49 + 36a^2 + 4 > 0$

$49 - 49 \cdot 4 + 36a^2 + 16 > 0$

$36a^2 - 131 > 0$

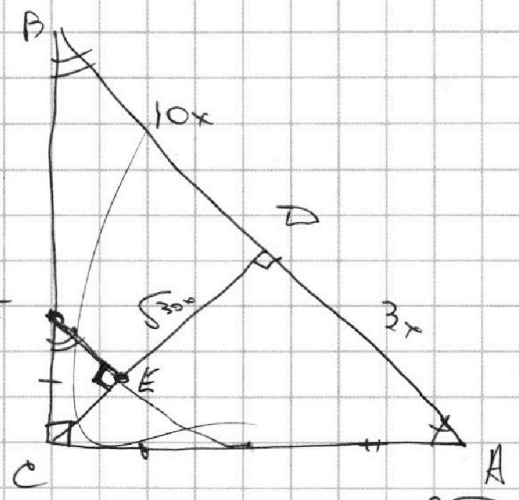
$a \in (-\infty; -\frac{\sqrt{131}}{6}) \cup (\frac{\sqrt{131}}{6}; +\infty)$



$7(9a^2 \ge 1)$

AB ∥ EF

$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$



$S_{\triangle ACD} = \frac{3\sqrt{30}x^2}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

⑤ $\begin{cases} \log_7^4 6x - 2\log_{6x}^2 7 = \log_{36x^2} 343^4 \\ \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2} 7^5 - 4 \end{cases}$

$\begin{cases} x>0 \\ x\neq \frac{1}{6} \\ y>0 \\ y\neq 1 \end{cases}$

$-2-\frac{3}{2}=-\frac{7}{2}$

$+6+\frac{5}{2}$

$-\frac{1}{2}$

$\log^4_7(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2\log_7(6x)} - 4$

$\log_{36x^2} 7^3 = \frac{3}{2}\log_{6x} 7$

$\log_7(6x) = t$

$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} \quad | \cdot t$

$t^5 = \frac{3}{2}+2 = \frac{7}{2}$

$t \to \log_7(6x) = \sqrt[5]{\frac{7}{2}} \to 6x = \sqrt[5]{\frac{7}{2}}$

5

D: $\frac{7}{2}$

$\pm 1; \pm 7$

$\pm 1; \pm 2$

$t^5 - 2 = \frac{3}{2} - 4t$

$t^5 + 4t = \frac{7}{2} \to t^5 + 4t - \frac{7}{2} = 0$

$\log^4_7 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2\log_7 y} - 4$

$p = \log_7 y$

$p^4 + \frac{6}{p} = \frac{5}{2p} - 4 \quad | \cdot p$

$7^t = 6x \to x = \frac{7^t}{6}$

$p^5 + 6 = \frac{5}{2} - 4p$

$6 - \frac{5}{2}$

$f(t): t^5 + 4t - \frac{7}{2} = 0$

$p^5 + 4p + \frac{7}{2} = 0$

$p = t$

$f'(x) = 5t^4 + 4 \to t = \pm\sqrt[4]{\frac{4}{5}}$

$\begin{cases} t^5 + 4t - \frac{7}{2} = 0 \\ t>0 \\ t<1 \end{cases}$

$1 + 4 - \frac{7}{2} = 3,5 = \frac{7}{2}$

$\frac{7}{4}$

$p = -t$?

$-p^5 - 4p - \frac{7}{2}$

$\frac{7}{7^2} \cdot \frac{7}{7}$

$\frac{7^t \cdot 7^p}{7^{-p} \cdot 7^p} = \frac{7^{-p} \cdot 7^p}{7^{-p} \cdot 7^p} = \frac{7^p}{7^p \cdot 7^{\frac{7}{4}}} = \frac{1}{7^{\frac{7}{4}}}$

$t_2 = p$

$-t^5 - 4t + \frac{7}{2} = 0$

$t^5 + 4t - \frac{7}{2} = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab : 2^7 3^{11} 5^{14}$

$bc : 2^{13} 3^{15} 5^{18}$

$ac : 2^{14} 3^{17} 5^{43}$

$a = n_1 m_1 q_1$

$b = n_2 m_2 q_2$

$c = n_3 m_3 q_3$

$$\begin{cases} n_1 + n_2 = 7 \\ n_2 + n_3 = 13 \\ n_1 + n_3 = 14 \end{cases}$$

$n_1 + n_2 + n_3 = \frac{20+14}{2} = 17$

$2^{17} 3^{23} 5^{39}$

$m_3 = \frac{43}{2} - 11 = \frac{21}{2}$

$m_1 = \frac{43}{2} - 15 = \frac{13}{2}$

$m_2 = \frac{43}{2} - 17 = \frac{9}{2}$

$a^2 b^2 c^2 : 2^{17 \cdot 2} 3^{43} 5^{25 \cdot 2}$

$abc : 2^{17} 3^{\frac{43}{2}} 5^{\frac{75}{2}} = 2^{17}$

ab^2c 2^{20} 3^{26} 5^{32}

$\frac{11+15+17}{2}$ 21/22

$= \frac{26+17}{2} = \frac{43}{2}$

$q_1 + q_2 + q_3 = \frac{14+18+43}{2}$

$= \frac{32+43}{2} = \frac{75}{2}$

37/38

39

4 6 5

3 5 9

10 11 25

$2^{17} 3^{22}$

$a \cdot b : 14$

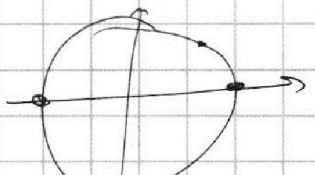
$b \cdot c : 18$

$abc : 5$

$\arccos(\sin x) = \frac{\frac{3\pi}{2} + x}{5}$

$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{5}\right)$

$\sin x = \cos\frac{3\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{10}$



$\sin x \in [0; \pi]$

$-1 \le \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{5} \le 1 \quad | \cdot 5$

$-5 \le \frac{3\pi}{2} + x \le 5 \quad | - \frac{3\pi}{2}$

$-5 - \frac{3\pi}{2} \le x \le 5 - \frac{3\pi}{2}$

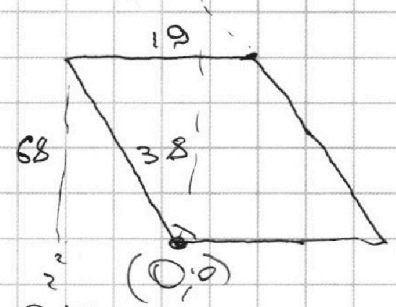
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\cos(5\arccos(\sin x)) = \cos\frac{3\pi}{2}\cos x + \sin\frac{3\pi}{2}\sin x$



$\sqrt{68^2+19^2} = 19\sqrt{3+1} = 19\cdot 2$

$y = -4x + b$

$4x - y - b = 0$

$b \in [0; 76]$

$x \in [17; 19]$

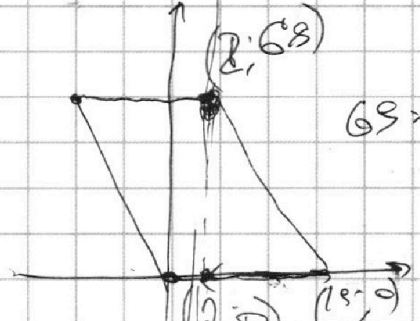
$y \in [0; 68]$

$\Delta x + \Delta y = 40 \quad | \cdot 2^3 5$

$\Delta x : 2 \quad \Delta y : 5$

$\Delta x : 2\cdot 5 = 10$

$\Delta y : 2^3 \cdot 5 = 40$



$17 \cdot 68 \cdot \frac{1}{2} = 17^2 \cdot 2 \cdot 2$

6
5
11

22

---

abc

$a_2 = b_2 = 1$

$c_3 - a_3 = 4$

$x + x + 4 \geq 13$

	2	3	5
a	4	8,5	19,5
b	3	4,5	0
c	10	10,5	43
	17	22	43

$1+2 \geq 14$

$2+3 \geq 18$

$3+4 = 43$

$c_5 - a_5 = 4$

$a_5 + c_5 \geq 43$

$t + t + 4 = 43$

$t \geq \frac{39}{2} = 19{,}5$

23,5

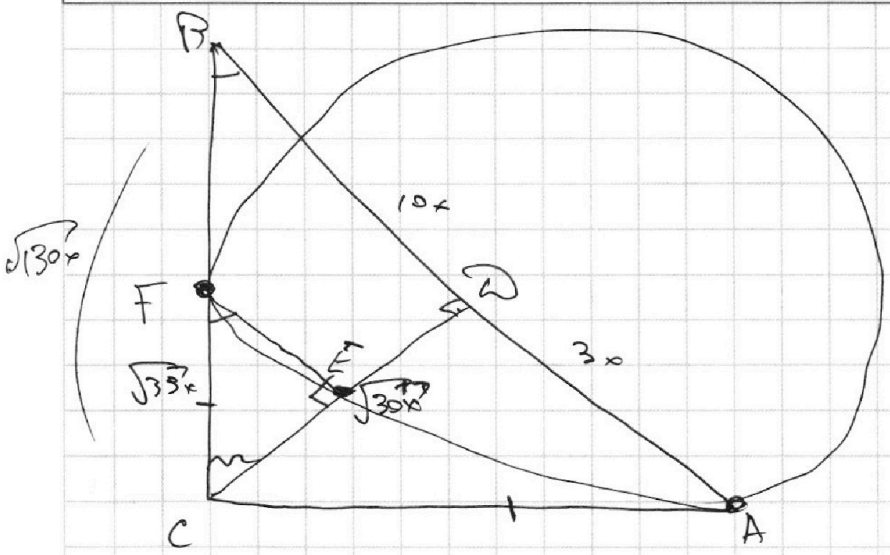
$2^{17} 3^{22} 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2

$AC = \sqrt{30x + 9x} = \sqrt{39}x$

$CB = \sqrt{30x + 100x} = \sqrt{130}x$

$k = \frac{CF}{CB} = \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{130}} = \sqrt{\frac{3}{10}}$

$CE = \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \sqrt{30}x = \sqrt{\frac{90}{10}}x = 3x$

$EF = \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot 10x = \sqrt{\frac{3 \cdot 10^2}{10}}x = \sqrt{30}x$

$S_{ACEF} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \sqrt{30}x = \frac{3\sqrt{30}}{2}x^2$

$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \sqrt{30}x = \frac{3\sqrt{30}}{2}x^2$

$\Big\} : \frac{1}{1}$?

$10BD + 10AD = 13BD$