



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

$$ab = k \cdot 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$bc = l \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}, \quad l \in \mathbb{N}$$

$$ac = m \cdot 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$(abc)^2 = klm \cdot 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$$

Т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $\sqrt{klm \cdot 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}} \in \mathbb{N}$

$$2^{18} \cdot 3^{29} \cdot 5^{26} \sqrt{3klm}$$

Т.к. данные числа a, b, c удовл. данным

условиям, то при задании любого числа

на натуральное те же условия будут выполняться.

Т.к. $\sqrt{3klm} \in \mathbb{N}$, то наиб. значение равно 3 (напр. при $k=3, l=m=1$)

Д-м:

$$a = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5}$$

$$b = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{b_5}$$

$$c = 2^{c_2} \cdot 3^{c_3} \cdot 5^{c_5}$$

Если $k=3, l=1, m=1$:

$$a_2 + b_2 + c_2 = 6$$

$$a_3 + b_3 = 14$$

$$a_5 + b_5 = 11$$

$$c_2 - a_2 = 8$$

$$a_2 + c_2 = 16$$

$$2c_2 = 24$$

$$c_2 = 12$$

$$a_2 = 4 \quad \checkmark$$

$$b_2 = 2$$

$$b_2 + c_2 = 14$$

$$b_3 + c_3 = 21$$

$$b_5 + c_5 = 13$$

$$c_3 - a_3 = 7$$

$$a_3 + c_3 = 25$$

$$2c_3 = 32$$

$$c_3 = 16$$

$$a_3 = 9 \quad \checkmark$$

$$b_3 = 5$$

$$a_5 + c_5 = 28$$

$$a_5 + c_5 = 25$$

$$a_5 + c_5 = 28$$

$$c_5 - a_5 = 2$$

$$a_5 + c_5 = 28$$

$$2c_5 = 30$$

$$c_5 = 15$$

$$a_5 = 13$$

$$b_5 = -2 \quad \times$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $b_5 = -2$, т.к. $b_5 \geq 0$, то полученная система неверна.

Рассмотрим при каких k, l, m она будет правдивеей:

Из (1), (2) и (3) получаем, что либо

- 1) $a_5 + b_5$ - нечет $b_5 + c_5$ - нечет $a_5 + c_5$ - чет
- 2) $a_5 + b_5$ - чет $b_5 + c_5$ - нечет $a_5 + c_5$ - нечет
- 3) $a_5 + b_5$ - нечет $b_5 + c_5$ - чет $a_5 + c_5$ - нечет

Понятно, что при добавл. ~~к~~ к любому ур-ю

из (1), (2), (3) единичных ур-е

не имеет решений (из вышесказанного).

$$a_5 + b_5 = 12 \quad b_5 + c_5 = 13 \quad a_5 + c_5 = 29$$

$$c_5 - a_5 = 1$$

$$a_5 = 14$$

$$b_5 = -2$$

неверно

$$2c_5 = 30$$

$$c_5 = 15$$

$$a_5 + b_5 = 11$$

$$b_5 + c_5 = 14$$

$$a_5 + c_5 = 29$$

$$c_5 - a_5 = 18 \quad 3$$

$$2c_5 = 32$$

$$a_5 = 13$$

$$c_5 = 16$$

$$b_5 = -2 \quad \text{неверно.}$$

След. шаг: добавим седьматерное и единичное:
есть решение:

$$a_5 + b_5 = 13$$

$$b_5 + c_5 = 15$$

$$a_5 + c_5 = 28$$

$$a_5 = 13$$

$$c_5 = 15$$

$$b_5 = 0$$

т.е. при $k = 3 \cdot 5^2$, $l = 5^2$, $m = 1$ есть решение, что $\sqrt{3k+1}$ - целое число



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и ~~еще~~ ~~выраж~~ оно минимально, что следует
из алгоритма подбора коэффициентов.

Тогда мин. значение $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Ответ: $(abc)_{\min} = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

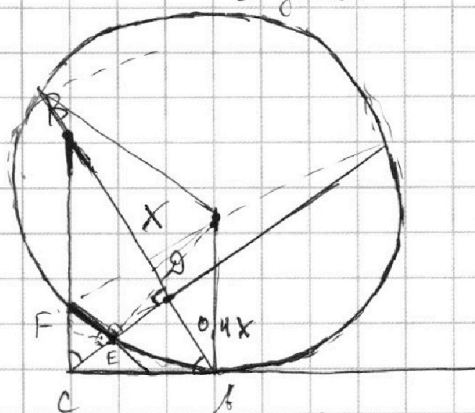
1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №2



$$\begin{aligned} CD \perp AB \\ EF \parallel AB \quad | \Rightarrow EF \perp CD \end{aligned}$$

$$\angle DCA = 90^\circ - \angle CAD$$

$$\angle BCD = 90^\circ - \angle DCA \quad | \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BCD = \angle CAD$$

след. по

$$\triangle ECF \sim \triangle DAC$$

$$CD^2 = 0,4x^2 \Rightarrow CD = x\sqrt{0,4}$$

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{CD}{0,4x} = \frac{\sqrt{0,4}}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4) \quad \frac{\pi}{2} - x \in [-3\pi; -2\pi)$$

$$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = x - \frac{\pi}{2}$$

$(2\pi; 3\pi)$

$$10(x - \frac{\pi}{2}) = 9\pi - 2x$$

$$10x - 5\pi = 9\pi - 2x$$

$$12x = 14\pi$$

$$x = \frac{14\pi}{12}$$

$$\frac{3\pi}{2} - \frac{14\pi}{12} = -\frac{14\pi}{6} = -\frac{7\pi}{3} \in (-2\frac{1}{3}\pi; -2\pi) \checkmark \text{ neg } x.$$

$$5) \quad \frac{\pi}{2} - x \in [-4\pi; -3\pi)$$

$$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$$

$$45\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$36\pi = 8x$$

$$x = \frac{9\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{2} = -4\pi \in (-4\pi; -3\pi) \checkmark \text{ neg } x.$$

Ответ: ~~$\frac{14\pi}{12}$~~ $\frac{9\pi}{2}; \frac{14\pi}{6}; 2\pi; \frac{3\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 24.

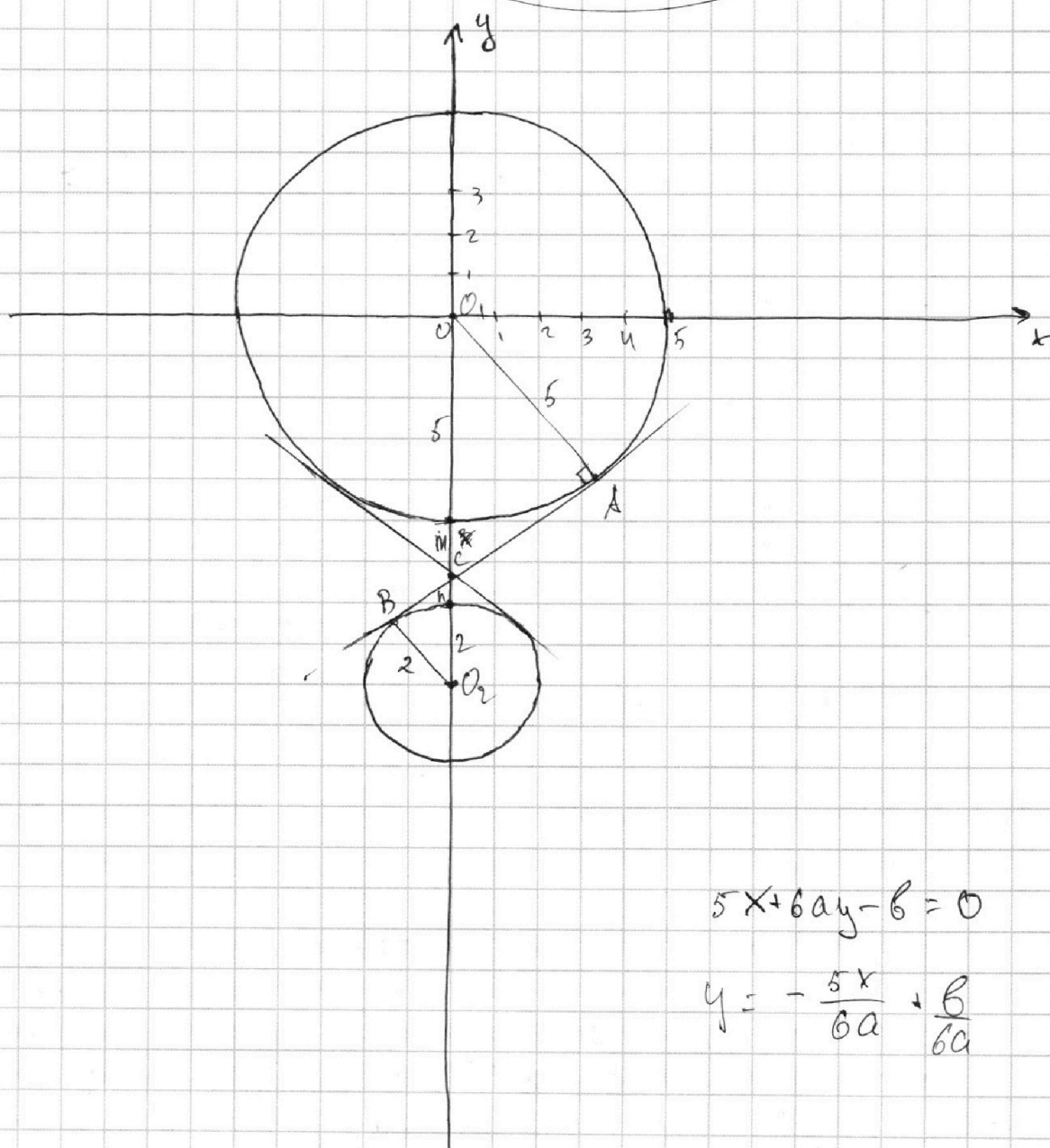
$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 25) \cdot (x^2 + y^2 + 18y + 88) = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 2^2$$

графическим ур-я
явл. две окр-ти



$$5x + 6ay - 6 = 0$$

$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{6}{6a}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5x + 6ay - 6 = 0$ — ур-е прямой.

Решения будет ~~тогда, когда~~ если прямая
пересечет каждую из двух ок-тей два раза.

Если $a = 0$:

$$5x = 6$$

$$x = \frac{6}{5}$$

~~Найдём~~ ~~таким~~

Система имеет 4 р-м. $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{5} < 2 \\ \frac{6}{5} > -2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ такое 6 найдётся

$a = 0$ подходит

Если $a \neq 0$:

$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{6}{6a}$$

Пар-р a задает угл. коэф. прямой, а
пар-р 6 отвечает за ее перемещение
вдоль оси OY .

Заметим, что нам нужны угл. коэф.

при которых ни при каком 6 не будет
касания с ~~одной~~ ~~одними~~ окружностями.

Найдём a , при к-х возможно такое касание:

Из рис. на графике: $\triangle CAO \sim \triangle CBO_2$ (по 3-м углам) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{5+m}{2+n} \quad \text{и} \quad 5+m+n+2=9$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решая систему, получим

$$m+n=2 \quad m=2-n$$

$$5n = 2 + 2m$$

$$5n = 2(2-n) = 4-2n$$

$$7n = 4$$

$$n = \frac{4}{7}$$

$$m = 2 - \frac{4}{7} = \frac{10}{7}$$

Тогда $\sin \angle O_1CA = \frac{5}{5+m} = \frac{5}{5+\frac{10}{7}} = \frac{5 \cdot 7}{45} = \frac{7}{9}$

tg наклона касательной при этом равен:

$$\begin{aligned} \text{tg}(90^\circ - \angle O_1CA) &= \sqrt{\frac{1}{\cos^2(90^\circ - \angle O_1CA)} - 1} = \sqrt{\frac{81}{49} - 1} = \\ &= \sqrt{\frac{81-49}{49}} = \sqrt{\frac{32}{49}} = \frac{4\sqrt{2}}{7} \end{aligned}$$

Поскольку ситуация со вторым касательным

абсолютно симметрична относительно OY , то

можно сказать, что 4 решения будут возможны

при

$$\begin{cases} -\frac{5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{7} \\ -\frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7} \\ \frac{1}{a} < -\frac{24\sqrt{2}}{35} \\ \frac{1}{a} > \frac{24\sqrt{2}}{35} \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{a} > \frac{24\sqrt{2}}{35} \\ -\frac{1}{a} < -\frac{24\sqrt{2}}{35} \end{cases} \quad (**)$$

$$\begin{cases} a < -\frac{35}{24\sqrt{2}} \\ a < \frac{35}{24\sqrt{2}} \\ a > 0 \end{cases}$$

При этом $a=0$
имеем

Ответ: $a \in (-\frac{35}{24\sqrt{2}}, \frac{35}{24\sqrt{2}})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача ~ 5

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5 \\ \log_{11}^4 \left(\frac{4}{2}\right) + \log_{\frac{4}{2}}(11) = \log_{\left(\frac{4}{2}\right)^3} (11^{-15}) - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - \frac{3 \cdot 6}{3 \cdot \log_{11} x} = -\frac{2}{3 \log_{11} x} - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{11}^4 \left(\frac{4}{2}\right) + \log_{\frac{4}{2}}(11) \cdot \frac{3}{3 \log_{11} \left(\frac{4}{2}\right)} = -\frac{13}{3 \log_{11} \left(\frac{4}{2}\right)} - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{11}^4(x) - \frac{16}{3 \log_{11} x} + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{11}^4 \left(\frac{4}{2}\right) + \frac{16}{3 \log_{11} \left(\frac{4}{2}\right)} + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \log_{11}^5(x) + 15 \log_{11} x - 16 = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \log_{11}^5 \left(\frac{4}{2}\right) + 15 \log_{11} \left(\frac{4}{2}\right) + 16 = 0 & (2) \end{cases}$$

Заметим, что $f(t) = 3 \log_{11}^5(t) + 15 \log_{11} t$. $\nearrow$

Действительно: $f'(t) = 15 \cdot \log_{11}^4 t \cdot \frac{1}{t \cdot \ln 11} + \frac{15}{t \cdot \ln 11} > 0$ (при $t > 0$)

Значит, ур-я (1) и (2) имеют ~~ровно~~ ~~не более~~ одно решение, т.к. область значений $f(t) \in (-\infty; +\infty)$ на всей области определения (1) и (2):

$$3 \log_{11}^5(x) + 3 \log_{11}^5 \left(\frac{4}{2}\right) + 15 \log_{11} x + 15 \log_{11} \left(\frac{4}{2}\right) = 0 \quad (3)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 a^5 + b^5 &= (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = \\
 &= \cancel{a^5} - \cancel{a^4b} - \cancel{a^3b^2} + \cancel{a^2b^2} - \cancel{ab^4} + b^5 \\
 &= a^5 + a^4b - a^4b - a^3b^2 + a^3b^2 + a^2b^3 - a^2b^3 - ab^4 + ab^4 + b^5 \\
 \left(\log_{11} x + \log_{11} \frac{4}{2} \right) & \left(\log_{11}^4 x - \log_{11}^3 x \cdot \log_{11} \frac{4}{2} + \log_{11}^2 x \cdot \log_{11}^2 \frac{4}{2} - \log_{11} x \cdot \log_{11}^3 \frac{4}{2} + \right. \\
 & \left. + \log_{11}^4 \frac{4}{2} + 5 \right) = 0
 \end{aligned}$$

Заметим, что если $f(t_1) > 0$, то $t_1 > 1$
 , а если $f(t_2) < 0$, то $t_2 < 1$,
 т.е. $f(t) \neq 0$ и $f(1) = 0$

Но тогда x , удовл (1) $x > 1$ и $\log_{11} x > 0$,

а y удовл (2) $0 < y < 1$ и $\log_{11} \frac{4}{2} < 0$, т.е.
 $\log_{11} x \cdot \log_{11} \frac{4}{2} < 0$

Но тогда:

$$\underbrace{\log_{11}^4 x}_{>0} - \underbrace{\log_{11}^3 x \cdot \log_{11} \frac{4}{2}}_{<0} + \underbrace{\log_{11}^2 x \cdot \log_{11}^2 \frac{4}{2}}_{>0} - \underbrace{\log_{11} x \cdot \log_{11}^3 \frac{4}{2}}_{<0} + \underbrace{\log_{11}^4 \frac{4}{2}}_{>0} + 5 = 0$$

не имеет решения.

В силу знания $\log_{11} x + \log_{11} \frac{4}{2} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{xy}{2} = 1 \Rightarrow xy = 2$$

В силу существования и единственности

решений ур-в (1) и (2), а также в силу
 необходимости ~~решения~~ существования решения
 у ур-в (3), ~~мы~~ получим, что пр-е $xy = 2$
 единственное возможное.

Ответ: 2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача ~ 6.

$$b(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$$

Всего $k(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$

$$(b+k)(x_2 - x_1) = 48$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

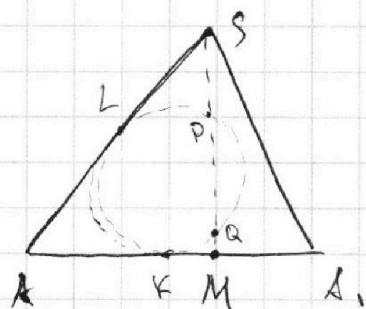
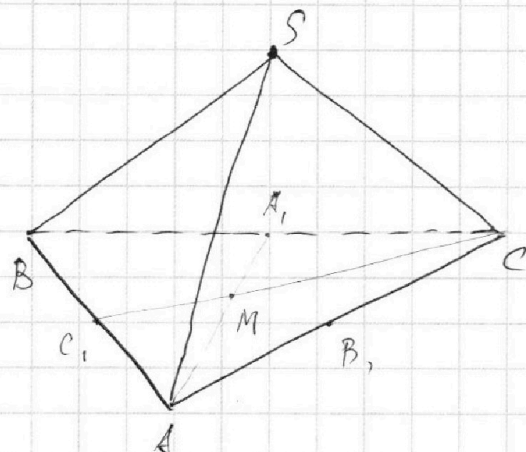
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 7





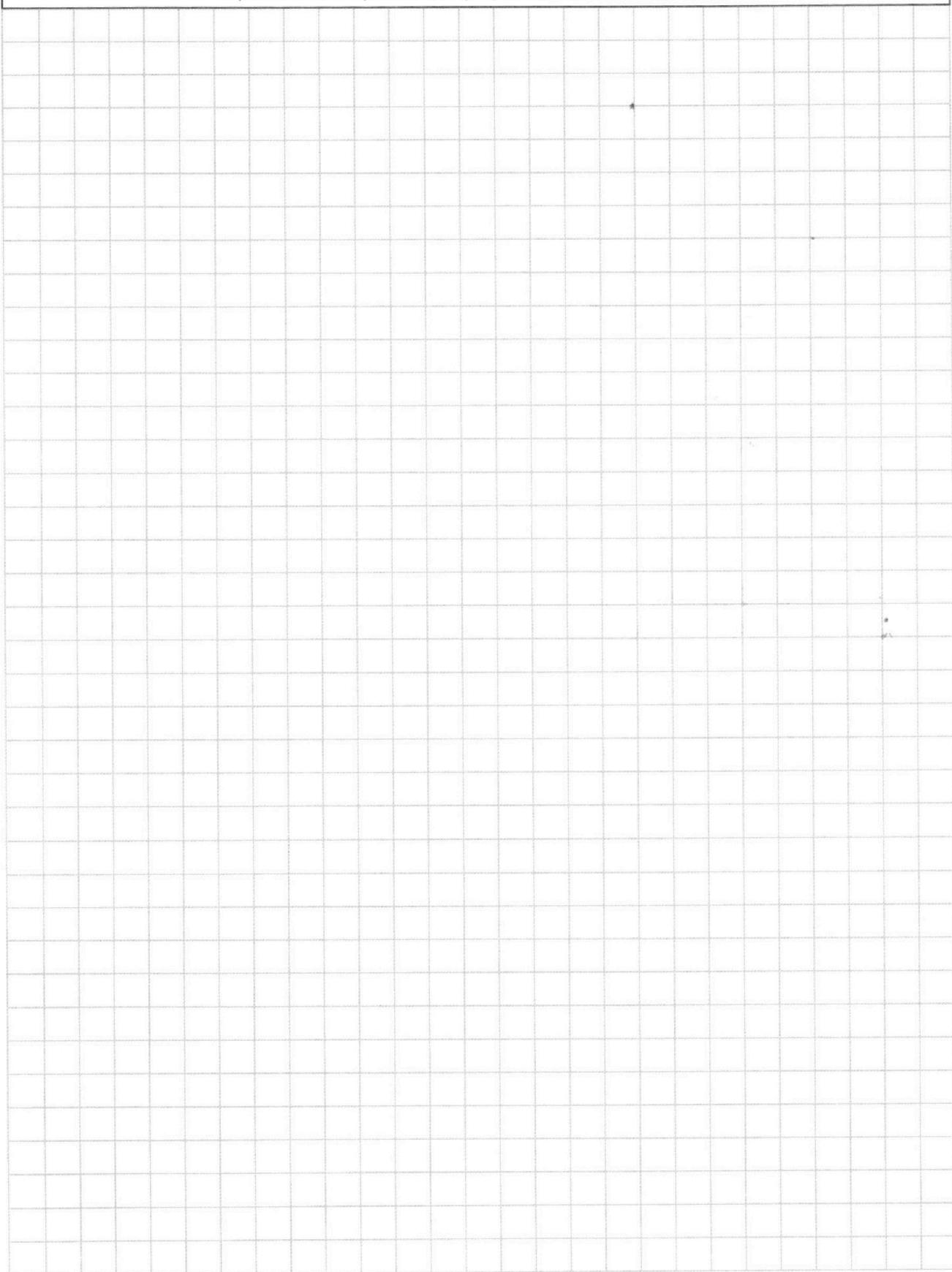
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

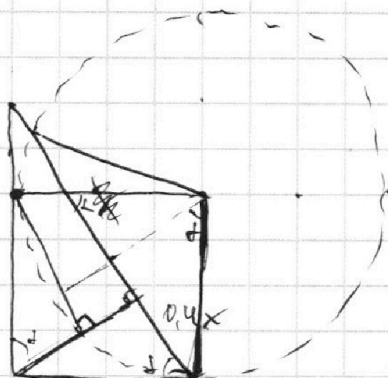
5
☐

6
☐

7
☐

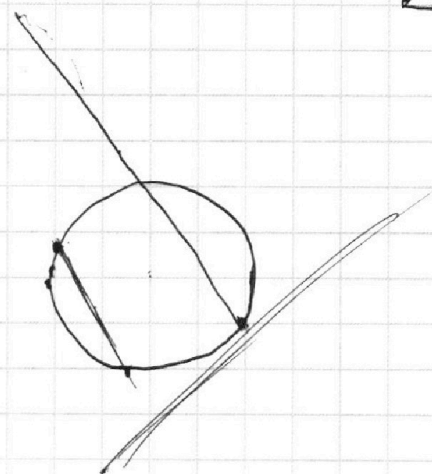
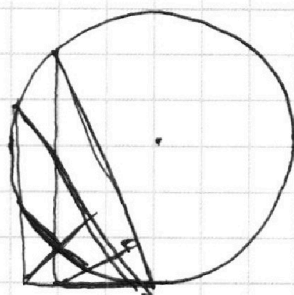
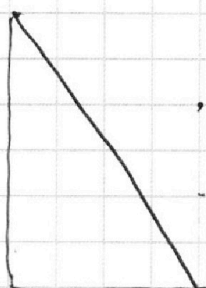
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{R}{0,4x} = \frac{x}{R}$$
$$\therefore R^2 = 0,4x^2$$
$$R = x\sqrt{0,4}$$

$$f_{gr} = \frac{R}{0,4x} = \frac{\sqrt{0,4}}{0,4} = \frac{1}{\sqrt{0,4}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{10}}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

