



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot k, \quad bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot n, \quad ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \cdot m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 = mnk \cdot 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$$

$a^2 b^2 c^2$  - квадрат натур. числа, значит

$$24+28 = 2 \cdot 24 + 4 = 48 + 4 = 52$$

степени 2, 3 и 5 должны быть четными.

У ~~24~~ и ~~52~~ степень уже четная ~~(если не равенство mnk)~~,

а у 3 - нечет. Значит, в mnk должно быть 3 в нечет

степени, а у 2 и 5 - в чет. Отсюда  $\min(mnk) = 3^1 \cdot 2^0 \cdot 5^0 = 3$ ,

и  $\min(abc) \geq \sqrt{2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{52}} = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$  (если

$mnk > 3$ , то  $abc = \sqrt{mnk \cdot 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}} > 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$ ).

~~Ответ:  $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$~~  Ответ:  $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$ ,

\*  $(\min(abc)) = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$  - достигается при  $k=3, m=n=1$  и

~~Пусть  $a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}, b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}, c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$~~

~~Допускаем,  $mnk = 3$ . Тогда  $m=3, k=3$  или  $n=3$ , и получаем систему~~

1)  $k=3$  ~~и~~  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_2 + x_3 = 14 \\ x_3 + x_1 = 16 \end{cases}$  ~~и~~ ~~получается~~  $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 12$

~~$\begin{cases} y_1 + y_2 = 14 \\ y_2 + y_3 = 21 \\ y_1 + y_3 = 25 \end{cases}$  - логич.  $y_1 = 9, y_2 = 5, y_3 = 16$~~

~~$\begin{cases} z_1 + z_2 = 11 \\ z_2 + z_3 = 13 \\ z_3 + z_1 = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = 11 \\ z_1 - z_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow z_1 = 13, z_2 = -2$  - не подходит~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



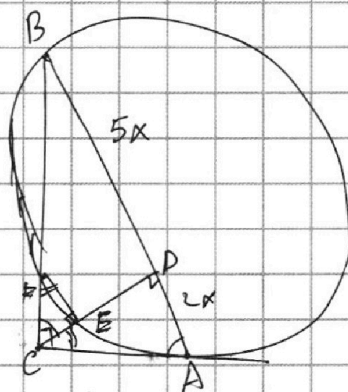
№ 2

Пусть  $BD = 5x$ , тогда  $AD = 2x$   
 $\left( \frac{AB}{BD} = 1,4 = \frac{7}{5} \Rightarrow AB = 7x, BD = 5x \right)$ .

$AB \parallel EF \Rightarrow \angle CEF = 90^\circ$  ( $CD \perp AB$ ).

$\angle BCD = \angle CAB$ . Значит,  $\triangle ACD \sim \triangle CFE \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \left( \frac{AC}{CF} \right)^2. \quad (1)$$



Применим свойство о том, что высота в произв. треугольнике делит его на два подобных, а также на отрезки в квадрате катетов:

$$\frac{AC^2}{CB^2} = \frac{AD}{BD} = \frac{2}{5} \quad (2). \quad \text{Заметим также степень т.с. отн-но диаметра}$$

$$\text{Отр: } \angle C = AC^2 = CF \cdot CB \Rightarrow \frac{AC^2}{CB^2} = \frac{CF}{CB} \Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{2}{5}. \quad (3)$$

Поскольку  $CD^2 = AD \cdot BD$ , то  $CD = \sqrt{10}x \Rightarrow AC^2 = AD^2 + CD^2 = 14x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{14}x \Rightarrow \sin \angle A = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} \Rightarrow \sin \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \cdot 7x = \sqrt{35}x.$$

$$(3): \frac{CF}{CB} = \frac{2}{5} \Rightarrow CF = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{35}x$$

$$(4): \frac{AC^2}{CF^2} = \frac{14x^2}{\frac{4}{25} \cdot 35x^2} = \frac{14}{\frac{4}{5} \cdot 7} = \frac{2}{\frac{4}{5}} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$$

Ответ:  $\frac{5}{2}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 3

Оценка как:

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \Rightarrow 10 \arccos(\sin x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2} \\ 9\pi - 2x \geq 0, \\ 9\pi - 2x \leq 10\pi \end{cases}$$

$$\text{Для } \forall x \in (-1; 1) \text{ верно: } \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \arccos(\sin x) = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) \cdot 10 = 5\pi - 10 \arcsin(\sin x)$$

Получаем:

$$10 \arcsin(\sin x) - 2x = -4\pi$$

1) Если  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , то  $10 \arcsin(\sin x) = 10x$ , и имеем:

$$10x - 2x = -4\pi, \quad 8x = -4\pi, \quad x = -\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

2) Если  $\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2}$ , то имеем:  $10 \arcsin(\sin x) = 10 \arcsin(\sin(\pi - x)) =$

$$= 10\pi - 10x, \text{ и имеем:}$$

$$10\pi - 12x = -4\pi \Rightarrow 12x = 14\pi, \quad x = \frac{14\pi}{12} = \frac{7\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

3) Если  $\frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{5\pi}{2}$ , то  $\sin x = \sin(x - 2\pi)$ , и получаем:

$$10x - 20\pi - 2x = -4\pi; \quad 8x = 16\pi, \quad x = 2\pi \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

4) Если  $\frac{5\pi}{2} < x \leq \frac{7\pi}{2}$ , то  $\sin x = \sin(\pi - x + 2\pi) = \sin(\pi - x)$ , и имеем:

$$30\pi - 10x - 2x = -4\pi; \quad -12x = -34\pi, \quad x = \frac{34\pi}{12} = \frac{17\pi}{6} \in \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$$

5) Если  $\frac{7\pi}{2} < x \leq \frac{9\pi}{2}$ , то  $\sin x = \sin(x - 4\pi)$ , и:

$$10x - 40\pi - 2x = -4\pi; \quad 8x = 36\pi, \quad x = \frac{36\pi}{8} = \frac{9\pi}{2} \in \left(\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$$

$$x < -\frac{\pi}{2} \text{ или } x > \frac{9\pi}{2} \text{ не годя. (см. выше)}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{9\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

Из 2-го ур-ия:

$$x^2 + y^2 = 25 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$x^2 + y^2 + 18y + 81 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$$

Это задает 2 окр-и с у-иemi (0;0), (0; -9) и радиусы 5 и 2 соотв.

(см. рис.).

Если  $a=0$ , то  $5x=b$ ,  $x=\frac{b}{5}$  и, очевидно,

подходящее  $b$  найдется (подход).

$b$  такое, что прямая, заданная 1-ым ур-ием пересекает обе окр-и в 2-х точках) - это  $-10 < b < 10$ .

Если  $a \neq 0$ , то из 1-го получаем

$$y = \frac{b-5x}{6a} = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a} \quad (1)$$

Рассм.  $a > 0$ . Проведем общ. кас-ую

окр-и (см. рис.). Прямая, зад ур-ием

(1) проходит ч/з т.  $(0; \frac{b}{6a})$  и  $(\frac{b}{5}; 0)$ . Если эта прямая совп.

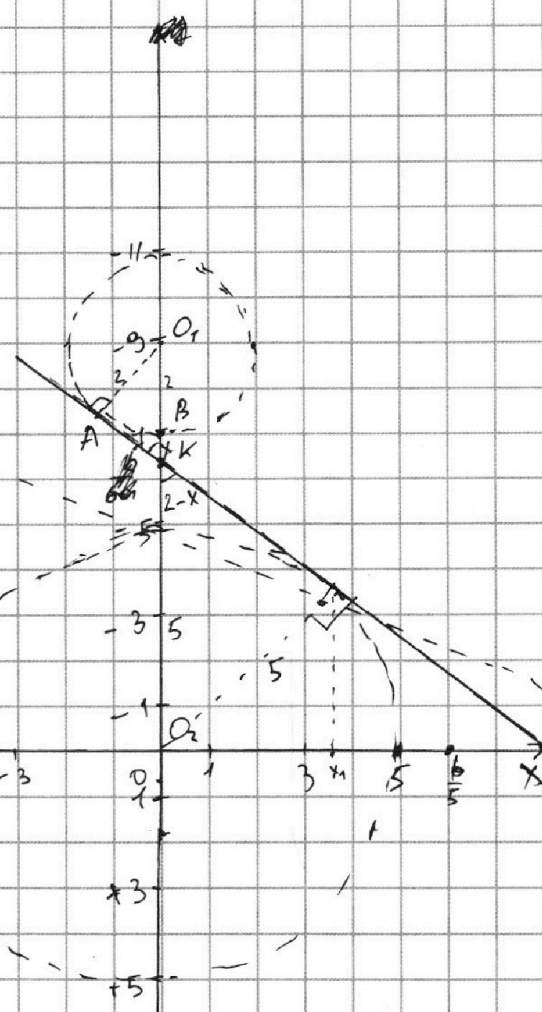
с кас-ой, то линия удовлетворяет 2. Если угол между прямой и

осью  $x$  меньше угла такого же угла  $y$  кас-ой, то решений не

более 2-х (прямая не пересекет малую окр-ю)

Если  $\frac{b}{5} \in (0; x_1)$ , где  $x_1$  - абсцисса кас-ой и оси  $x$ , то

эта прямая должна пересечь обе окр-и в 2-х точках.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N5

$$1) \log_x^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \text{ — ОДЗ ур-ва 1-го.}$$

$$\log_x^4 x - \frac{6}{\log_x x} = -\frac{2}{3} \log_x \frac{1}{121} - 5.$$

$$\left( \log_{x^3} \frac{1}{121} = \frac{1}{3} \log_x \frac{1}{121} = \frac{1}{3} \cdot (-\log_x 121) = -\frac{2}{3} \log_x 11 \right) = -\frac{2}{3} \log_x 11 = -\frac{2}{3} \log_x \frac{1}{\log_x x}$$

$$\text{Пусть } a = \log_x x.$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \quad | \cdot 3a \neq 0$$

$$3a^5 - 18 = -2 - 15a; \quad 3a^5 + 15a - 16 = 0$$

$$2) \log_{11}^4 \left(\frac{1}{2}y\right) + \log_{\frac{1}{2}y} 11 = \log_{\left(\frac{1}{2}y\right)^3} (11^{-13}) - 5 \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y \neq 2 \end{cases} \text{ — ОДЗ ур-ва}$$

$$\text{Пусть } b = \log_{11} \left(\frac{1}{2}y\right).$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5 \quad | \cdot 3b \neq 0; \quad 3b^5 + 3 + 15b + 13 = 0$$

$$\left( \log_{\left(\frac{1}{2}y\right)^3} (11^{-13}) = -13 \cdot \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}y} (11) = -13 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} \left(\frac{1}{2}y\right)} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{b} \right)$$

$$3b^5 + 15b + 16 = 0$$

Имеем:

$$\begin{cases} 3a^5 + 15a - 16 = 0 \\ 3b^5 + 15b + 16 = 0 \end{cases} \text{ — найдем все возм. } a+b \text{ (ведь } a+b = \log_{11} \left(\frac{xy}{2}\right))$$

Пусть  $f(t) = 3t^5 + 15t$ .  $f'(t) = 15t^4 + 15 > 0$  при  $\forall t$ , значит оба ур-ва

получ. системы имеют не более 1-го реш-я (ведь система имеет вид  $\begin{cases} f(a) = 16 \\ f(b) = -16 \end{cases}$ ). При этом заметим, что  $f\left(\frac{1}{t}\right) = -f(t)$ , т.е.  $f(t)$  —

неч. ф-ция, а значения из  $f(a) = 16, f(b) = -16$  следуют  $a = -b$ ,  
а значит ед. знач-е  $a+b$  — это 0, и соотв. ед. знач-е  $\frac{xy}{2}$  — это 1  
(и  $xy = 2$ ). Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 (по формул.)

$$S_{BB_1C} = \frac{1}{2} CM \cdot BB_1 = \frac{1}{2} S_{ABC} \Rightarrow BB_1 \cdot CM = 180 \quad (CM \perp BB_1)$$

Аналогично,  $CC_1 \cdot BM = 180 \Rightarrow CC_1 \cdot BB_1 = \frac{180^2}{BM \cdot CM}$ .

$$\frac{BM}{CM} = \frac{1}{2} = \frac{S_{B_1MC}}{S_{BMC}} \Rightarrow S_{BMC} = 2S_{B_1MC}, S_{BMC} = \frac{2}{3} S_{BB_1C} = \frac{1}{3} S_{BAC} =$$

$$= 60. S_{BMC} = \frac{1}{2} CM \cdot BM \Rightarrow CM \cdot BM = 120 \Rightarrow CC_1 \cdot BB_1 =$$

$$= \frac{180^2}{120} = \frac{180 \cdot 180}{120} = 180 \cdot \frac{18}{12} = 180 \cdot \frac{3}{2} = 270.$$

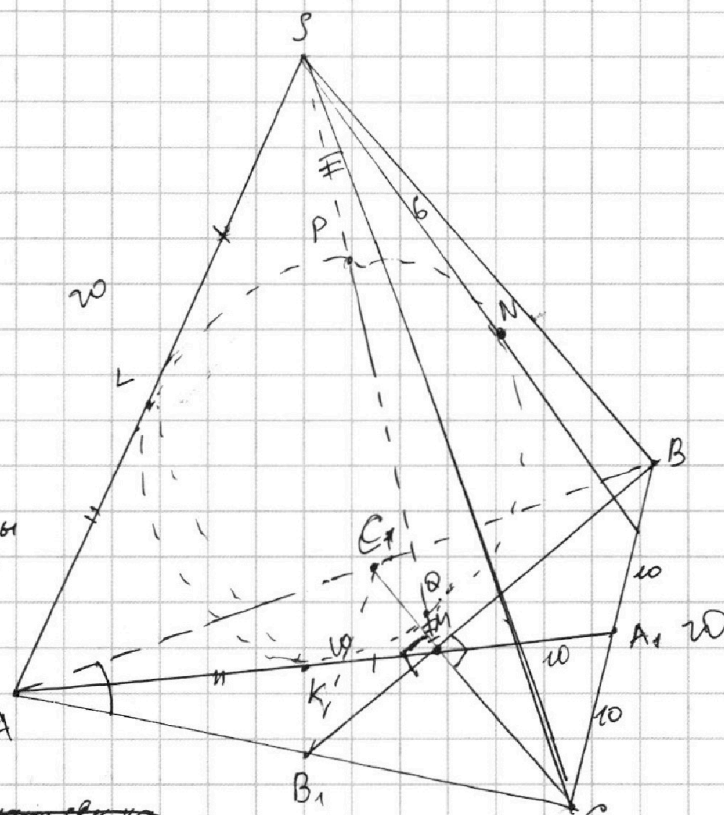
$$AA_1 = 30, CC_1 \cdot BB_1 = 270 \Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 27 \cdot 3 \cdot 100 = 8100.$$

Ответ: а) 8100

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N7  
a)  $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$



Рассм. сечение сферы  
пл-ью (ASM). В этой  
пл-и логичнее  
окр-ть, и можем  
отсюда же вывести  
ст. точек S и M:

a) ~~Т.к.  $SQ = PQ + SP$ ,  
 $MP = PQ + QA$~~

$MQ \cdot MP = MK^2$ ,  $SP \cdot SQ = SL^2$ ;  $SQ = MP$ ,  $MQ = SP \Rightarrow MK = SL$ . Как отр. кас-ых:  
 $AK = AL$ . Значит,  $AM = AS = 20$ , и  $AA_1 = \frac{3}{2} AM = 30$ .

Вспомог. знаящиеся ~~по-ой~~ длины медианы, получаем:

$AA_1^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} \Rightarrow 4 \cdot 30^2 + 20^2 = 2(AB^2 + AC^2)$ . По т. Кос.

для  $\triangle ABC$ :  $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$ , т.е.

$20^2 = 2 \cdot 30^2 + 10 \cdot 20 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC \Rightarrow 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC =$

$= 2 \cdot 30^2 - 5 \cdot 20 = 800$ .  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = 180 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = 360$ . Значит,  $\cos \angle BAC = \frac{800}{360} = \frac{80}{36} =$

$= \frac{20}{9}$ ,  $\sin \angle BAC = \frac{9}{20}$ . Заметим, что  $CA_1 = BA_1 = MA_1 = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$ . ~~Из  $\triangle BMC$~~  (  $MA_1 = 10$ , т.к.  $MA_1 = \frac{1}{2} AM$  )



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 4

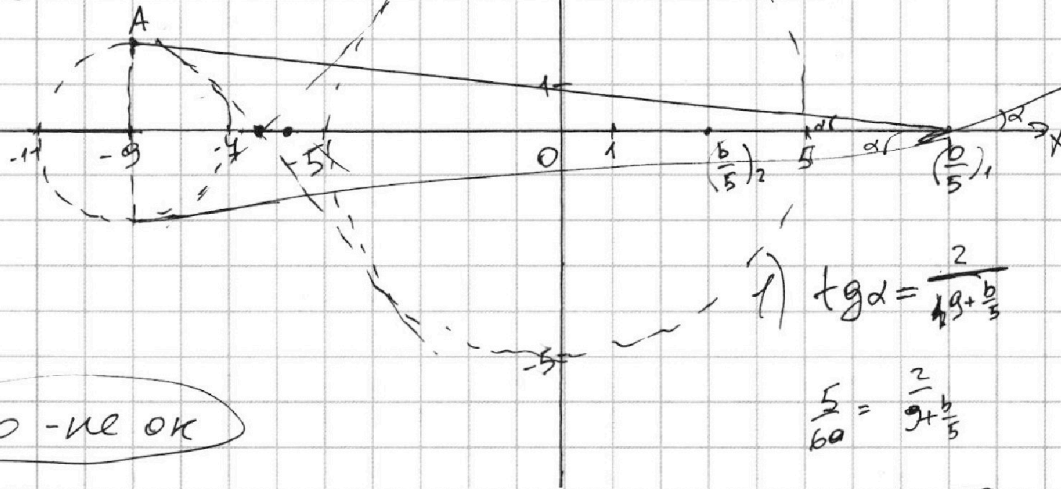
$$y = \sqrt{4-x^2} - 9$$

$$4 + (x+2)^2 = x(x+2)$$

$$8 + 4x = 2x$$

$$x = -4 \quad ???$$

$$y_1 = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1)$$



$$y_2 = \sqrt{25-x^2}$$

$$y = \sqrt{4-x^2} - 9$$

$$y = -\sqrt{25-x^2}$$

$$f'(x) = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{25-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$g'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$1) \quad \tan \alpha = \frac{2}{9 + \frac{b}{5}}$$

$$\frac{5}{60} = \frac{2}{9 + \frac{b}{5}}$$

$$45 + b = 120$$

$$60y = b - 5x, \quad y = \frac{b-5x}{60} = -\frac{5}{60}x + \frac{b}{60}$$

$$1) \quad b > \frac{2}{-25} \quad -\frac{2}{9 + \frac{b}{5}} < -\frac{5}{60} < \frac{2}{9 + \frac{b}{5}}$$

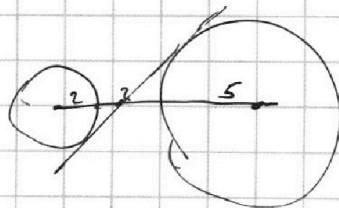
$$-2 < \frac{45+b}{60} < 2, \quad -2 < \frac{45+b}{60} < 2$$

$$45 + b > 20$$

Если  $|60| \leq 10$  - не ОК

Если  $|60| > 10$  - ОК

$$2) \quad -7 < \frac{b}{5} < -5$$



$$4 + (x+2)^2 = x \cdot (x+2)$$

$$4 + x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2x$$

$$8 + 2x = 0$$

$$x = -4$$

$$25 + (7-x)^2 = (2-x)(7-x)$$

$$25 + 49 + x^2 - 14x = 14 - 9x + x^2$$

$$5x = 70, \quad x = 14$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1 (продолж.)

2)  $n=3: x_1=4, x_2=2, x_3=1$

Как видно,  $m+k=3$  недостаточно, возникает проблема со степенями 5. Значит,  $m+k=5$ . Проблема решится, если взять  $n=2, k=2$  ( $z_1=13, z_2=0, z_3=15$ )

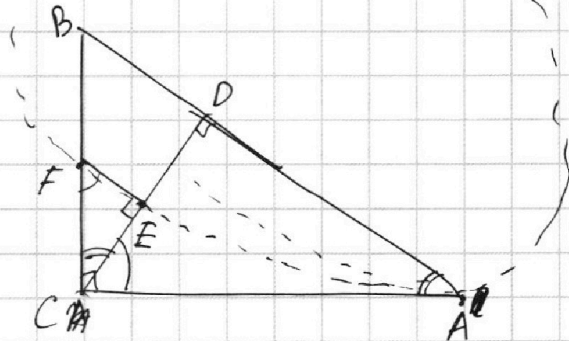
N2

$$\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{AC^2}{CB^2} = \frac{2}{5}$$

$$AC^2 = CF \cdot CB \quad | : CB^2$$

$$\frac{AC^2}{CB^2} = \frac{CF}{CB} = \frac{2}{5}$$



$$CD^2 = 10x^2$$

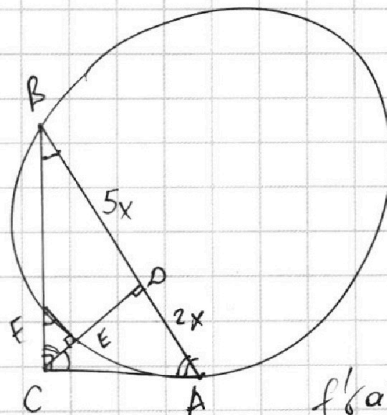
$$AC^2 = 14x^2$$

$$CD = \sqrt{10}x$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{17}} \Rightarrow BC = 7x \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{17}} = \sqrt{35} \cdot x$$



$$f(a) = 15a^4 + 15$$

N4

$$2: x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0 \Leftrightarrow (y+9)^2 - 4 + x^2 = 0 \Leftrightarrow (y+9)^2 + x^2 = 4$$

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2} - 9$$

$$a+b = \log_{11}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$a = \frac{1}{3} : \frac{1}{3} + 5$$

$$a = \frac{16}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}, b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}, c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ y_1 + y_2 = 14 \\ z_1 + z_2 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + x_3 = 16 \\ x_2 + x_3 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 - x_2 \\ x_2 + (6 - x_2) + x_3 = 14 \end{cases}$$

$$x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 2$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 14 \\ y_1 + y_3 = 25 \\ y_2 + y_3 = 21 \end{cases}$$

$$ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}, bc = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{13}, ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$x_1 + x_2 = 6$$

$$y_1 = 4, y_2 = 10, y_3 = 11$$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = 4 \\ y_1 + y_2 = 14 \end{cases} \Rightarrow 2y_1 = 18$$

$$y_1 = 9, y_2 = 5, y_3 = 16$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 11 \\ z_1 + z_3 = 28 \\ z_2 + z_3 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = 11 \\ z_1 - z_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z_1 = 11 + 15 = 26 \\ z_1 = 13 \end{cases}$$

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{11}, b = 2^{22} \cdot 3^5 \cdot 5$$

$$a = 2^4$$

$$a: 2^4, b: 2^2, c: 2^{12}$$

$$ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}, bc = 2^{14} \cdot 3^{24} \cdot 5^{13}$$

$$a: 3^8, b: 3^5, c: 3^{17}$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28}$$

$$a: 5^1, b: 5^0, c: 5^{13}$$

$$a: 2^4, b: 2^2, c: 2^6$$

$$\begin{cases} z_2 + z_3 = 15 \\ z_1 + z_2 = 13 \\ z_1 + z_3 = 28 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z_3 - z_1 = 2 \\ z_3 + z_1 = 28 \end{cases} \Rightarrow z_3 = 15$$

$$z_1 = 13$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_3 - z_1 = 4 \\ z_3 + z_1 = 28 \end{cases} \Rightarrow z_3 = 16$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 13 \\ z_2 + z_3 = 13 \\ z_1 + z_3 = 28 \end{cases} \Rightarrow z_2 = z_3$$

$$\begin{cases} z_3 - z_1 = 2 \\ z_1 + z_3 = 28 \end{cases} \Rightarrow z_3 = 15, z_1 = 13, z_2 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 6

1)  $x_2 > x_1, y_2 > y_1$

$y_2 - y_1 = a, a, b \in \mathbb{N}$

$x_2 - x_1 = b$

$6b + a = 48$

$a = 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48$

- $(0; 8), (6; 7), (12; 6), (18; 5), (24; 4), (30; 3), (36; 2), (42; 1), (48; 0)$

$(0; 8): y_2 = y_1$

$x_2 - x_1 = 8$

$92 \cdot C_{18}^{10} \cdot C_{18}^{10}$

~~$(6; 7): C_{92}^6 \cdot C_{18}^7$~~

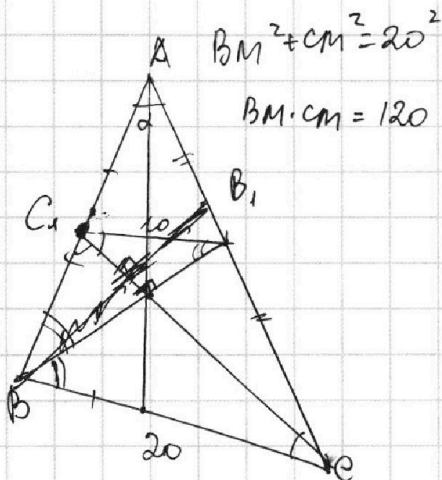
~~$(12; 6): C_{92}^{12} \cdot C_{18}^6$~~

$C_{92}^{10} \cdot C_{18}^{10} + C_{92}^6 \cdot C_{18}^7 + C_{92}^{12} \cdot C_{18}^6$

$BB_1 \cdot CC_1 = \frac{180^2}{BM \cdot CM}$

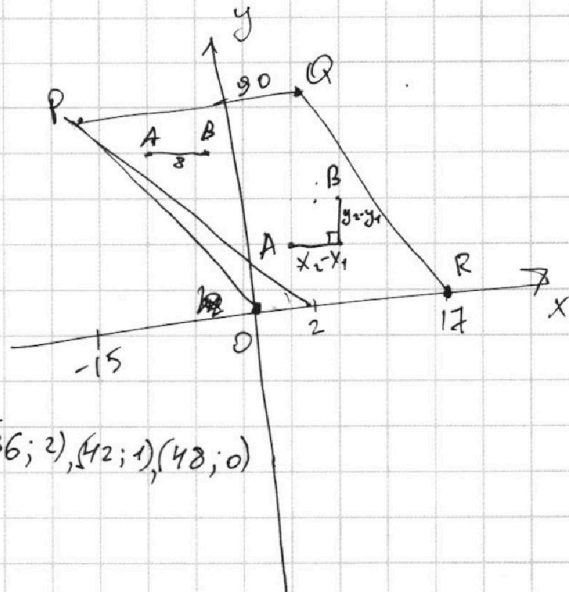
$BM \cdot CM$

$m^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$



$S_{BCC_1} = \frac{1}{2} BM \cdot CC_1 = \frac{1}{2} \cdot 180$   
 $BM \cdot CC_1 = 180$

~~$BB_1$~~



$a = 2^4$

$b = 2^2$

$c = 2^{12}$

$a = 5^{12}$

$c = 5^{16}$

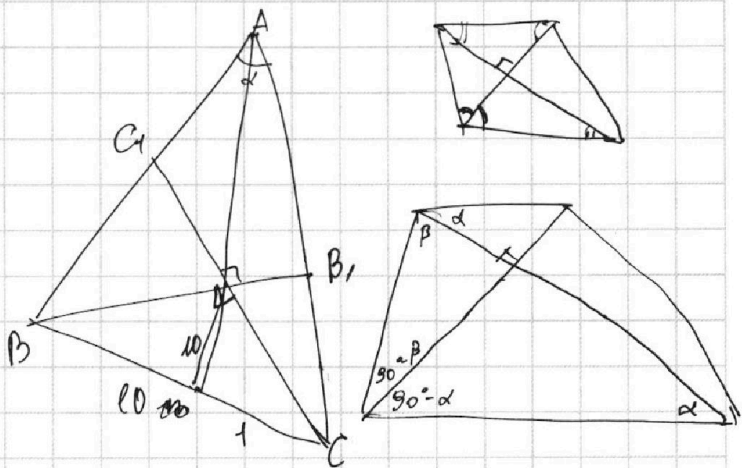
$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$

~~$17$~~

- 1 2 3 4 5 6



~~$BB_1$~~

$S_{BB_1C} = \frac{1}{2} CM \cdot BB_1 = \frac{1}{2} S_{ABC}$

$= \frac{1}{2} \cdot 180$

$CM \cdot BB_1 = 180$