МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)\,(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$ab = 2^6\cdot 3^{13}\cdot 5^{11}\cdot k$, $bc = 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{13}\cdot n$, $ac = 2^{16}\cdot 3^{25}\cdot 5^{28}\cdot m \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2b^2c^2 = mnk\cdot 2^{36}\cdot 3^{59}\cdot 5^{52}$

$a^2b^2c^2$ – квадрат натур. числа, значит степени 2, 3 и 5 должны быть чётными.

$24+28 = 2\cdot 24+4 = 48+4 = 52$

У 2 и 5 степень уже чётная ~~(если не рассм-ть mnk)~~, а у 3 - нечёт. Значит, в mnk должно быть 3 в нечёт степени, а 2 и 5 – в чёт. Отсюда $\min(mnk) = 3^1\cdot 2^0\cdot 5^0 = 3$, и $\min(abc) \geq \sqrt{2^{36}\cdot 3^{60}\cdot 5^{52}} = 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{26}$ (если $mnk > 3$, то $abc = \sqrt{mnk}\cdot\sqrt{2^{36}\cdot 3^{59}\cdot 5^{52}} > 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{26}$).

~~Ответ: $2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{26}$~~ Ответ: $2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{26}$.

~~*(min(abc) = $2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{26}$ - достигается при $k=3$, $m=n=1$)~~ и

Пусть $a = 2^{x_1}\cdot 3^{y_1}\cdot 5^{z_1}$, $b = 2^{x_2}\cdot 3^{y_2}\cdot 5^{z_2}$, $c = 2^{x_3}\cdot 3^{y_3}\cdot 5^{z_3}$.

Допустим, $mnk = 3$. Тогда $m=3$, $k=3$ или $n=3$, и получаем систему:

1) $k=3$: $\begin{cases} x_1+x_2=6 \\ x_2+x_3=14 \\ x_3+x_1=16 \end{cases}$ – подходит $x_1=4$, $x_2=2$, $x_3=12$

$\begin{cases} y_1+y_2=14 \\ y_2+y_3=21 \\ y_1+y_3=25 \end{cases}$ – подх. $y_1=9$, $y_2=5$, $y_3=16$

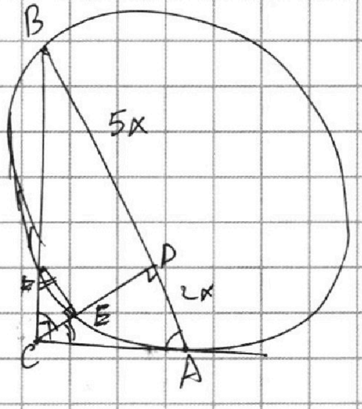
$\begin{cases} z_1+z_2=11 \\ z_2+z_3=13 \\ z_3+z_1=28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1+z_2=11 \\ z_1-z_2=15 \end{cases} \Rightarrow z_1=13$, $z_2=-2$ – не удовл усл-ию

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



Пусть $BD=5x$, тогда $AD=2x$
$\left(\frac{AB}{BD}=1{,}4=\frac{7}{5} \Rightarrow AB=7x,\ BD=5x\right)$.

$AB \parallel EF \Rightarrow \angle CEF = 90^\circ$ $(CD \perp AB)$.

$\angle BCD = \angle CAB$. Значит, $\triangle ACD \sim \triangle CFE \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \left(\frac{AC}{CF}\right)^2$. (1)

Применим факт о том, что высота в прям. треуг., опущ. на гип-у, делит гип-у в отн-ии квадр-ов катетов:

$\frac{AC^2}{CB^2} = \frac{AD}{BD} = \frac{2}{5}$ (2). Запишем степень т. C отн-но данной

окр.: $\operatorname{deg} C = AC^2 = CF \cdot CB \Rightarrow \frac{AC^2}{CB^2} = \frac{CF}{CB} \Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{2}{5}$. (3)

Поскольку $CD^2 = AD \cdot BD$, то $CD = \sqrt{10}\,x \Rightarrow AC^2 = AD^2 + CD^2 = 14x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \sqrt{14}\,x \Rightarrow \sin\angle A = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \Rightarrow \sin\angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \cdot 7x = \sqrt{35}\,x$.

(3): $\frac{CF}{CB} = \frac{2}{5} \Rightarrow CF = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{35}\,x$

(1): $\frac{AC^2}{CF^2} = \frac{14x^2}{\frac{4}{25} \cdot 35x^2} = \frac{14}{\frac{4}{5} \cdot 7} = \frac{2}{\frac{4}{5}} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$.

Ответ: $\frac{5}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

Оценка иах:

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$. $10\pi \geq 10\arccos(\sin x) \geq 0 \Rightarrow \boxed{-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}}$

$(9\pi - 2x \geq 0,$
$9\pi - 2x \leq 10\pi)$

Для $\forall \alpha \in [-1;1]$ верно: $\arccos\alpha = \frac{\pi}{2} - \arcsin\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 10\arccos(\sin x) = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right)\cdot 10 = 5\pi - 10\arcsin(\sin x)$.

Получаем:

$10\arcsin(\sin x) - 2x = -4\pi$

1) Если $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, то $10\arcsin(\sin x) = 10x$, и имеем:

$10x - 2x = -4\pi$, $8x = -4\pi$, $x = -\frac{\pi}{2}$. $\in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

2) Если $\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2}$, то имеем: $10\arcsin(\sin x) = 10\arcsin(\sin(\pi - x)) =$

$= 10\pi - 10x$, и имеем:

$10\pi - 12x = -4\pi \Rightarrow 12x = 14\pi$, $x = \frac{14\pi}{12} = \frac{7\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

3) Если $\frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{5\pi}{2}$, то $\sin x = \sin(x - 2\pi)$, и получаем:

$10x - 20\pi - 2x = -4\pi$; $8x = 16\pi$, $x = 2\pi$. $\in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

4) Если $\frac{5\pi}{2} < x \leq \frac{7\pi}{2}$, то $\sin x = \cancel{\sin(\pi - x - 2\pi)}\ \cancel{\sin(-x + \pi)}\ \sin(3\pi - x)$, и имеем:

$30\pi - 10x - 2x = -4\pi$; $-12x = -34\pi$, $x = \frac{34\pi}{12} = \frac{17\pi}{6}$. $\in \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$

5) Если $\frac{7\pi}{2} < x \leq \frac{9\pi}{2}$, то $\sin x = \sin(x - 4\pi)$, и:

$10x - 40\pi - 2x = -4\pi$; $8x = 36\pi$, $x = \frac{36\pi}{8} = \frac{9\pi}{2}$. $\in \left(\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$.

$x < -\frac{\pi}{2}$ или $x > \frac{9\pi}{2}$ не подх. (см. выше)

Ответ: $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{6}$; 2π; $\frac{9\pi}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

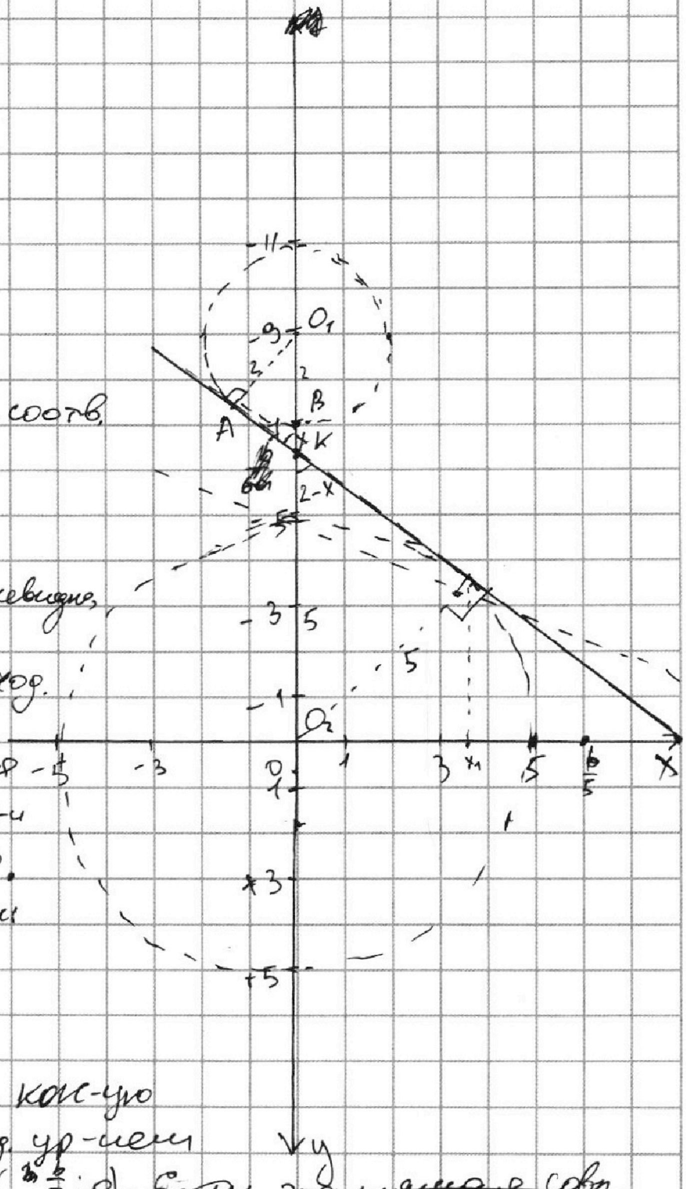
№4

Из 2-го ур-ния:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x^2+y^2+18y+77=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x^2+(y+9)^2=4 \end{array}\right.$$

Это задаёт 2 окр-и с ц-ми $(0;0)$, $(0;-9)$ и рад-ми 5 и 2 соотв. (см. рис.).



Если $a=0$, то $5x=b$, $x=\frac{b}{5}$ и, очевидно, подходящее b найдётся (подход. b такое, что прямая, задан. 1-ым ур-ем пересек-ет обе окр-и в 2-х точках) – это $-10<b<10$.

Если $a\neq 0$, то из 1-го получаем:

$$y=\frac{b-5x}{6a}=-\frac{5}{6a}x+\frac{b}{6a} \quad (1)$$

Рассм. $a>0$. Проведём общ. кас-ую окр-ей (см. рис.). Прямая, зад. ур-ем (1) проходит ч/з т. $(0;\frac{b}{6a})$ и $(\frac{b}{5};0)$. ~~Если эта прямая совп. с кас-ой, то реш-й ровно 2. Если угол м/у прямой осью x меньше для такого же угла у кас-ой, то решений не более 2-х (прямая не пер-ёт малую окр-ть)~~

~~Если $\frac{b}{5}\in(0;x_1)$, где x_1 – т. пер-ия кас-ой и оси x, то~~

Эта прямая должна пересечь обе окр. в 2-х точках.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N5

1) $\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5 \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$ - ОДЗ ур-ния 1-го.

$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3}\log_x 11 - 5.$

$\left(\log_{x^3}\frac{1}{121} = \frac{1}{3}\log_x\frac{1}{121} = \frac{1}{3}\cdot(-\log_x 121) = -\frac{2}{3}\log_x 11 = -\frac{2}{3}\frac{1}{\log_{11} x}\right)$

Пусть $a = \log_{11} x$.

$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \quad |\cdot 3a \neq 0$

$3a^5 - 18 = -2 - 15a; \quad 3a^5 + 15a - 16 = 0$

2) $\log_{11}^4\left(\frac{1}{2}y\right) + \log_{\frac{1}{2}y} 11 = \log_{(\frac{1}{2}y)^3}\left(11^{-13}\right) - 5 \Rightarrow \begin{cases} y>0 \\ y\neq 2 \end{cases}$ - ОДЗ 2-го ур.

Пусть $b = \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right)$.

$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5 \quad |\cdot 3b \neq 0; \quad 3b^5 + 3 + 15b + 13 = 0$

$\left(\log_{(\frac{1}{2}y)^3}\left(11^{-13}\right) = -13\cdot\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}y}(11) = -13\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\log_{11}(\frac{y}{2})} = -\frac{13}{3}\cdot\frac{1}{b}\right)$

$3b^5 + 15b + 16 = 0$

Имеем:

$\begin{cases} 3a^5 + 15a - 16 = 0 \\ 3b^5 + 15b + 16 = 0 \end{cases}$ - найдём все возм. $a+b$ (ведь $a+b = \log_{11}\left(\frac{xy}{2}\right)$)

Пусть $f(t) = 3t^5 + 15t$. $f'(t) = 15t^4 + 15 > 0$ при $\forall t$, значит оба ур-ия получ. системы имеют не более 1-го реш-я (ведь система имеет вид $\begin{cases} f(a) = 16 \\ f(b) = -16 \end{cases}$). При этом заметим, что $f(-t) = -f(t)$, т.е. $f(t)$ - нечёт. ф-ия, а значит из $f(a) = 16, f(b) = -16$ следует $a = -b$, а значит ед. знач-е $a+b$ - это 0, и соотв. ед. знач-ие $\frac{xy}{2}$ - это 1 (и $xy = 2$). Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7 [x]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N7 (продолж.)

$S_{BB_1C} = \frac{1}{2} CM \cdot BB_1 = \frac{1}{2} S_{ABC} \Rightarrow BB_1 \cdot CM = 180$ $(CM \perp BB_1)$

Аналогично, $CC_1 \cdot BM = 180 \Rightarrow CC_1 \cdot BB_1 = \frac{180^2}{BM \cdot CM}$.

$\frac{B_1M}{BM} = \frac{1}{2} = \frac{S_{B_1MC}}{S_{BMC}} \Rightarrow S_{BMC} = 2S_{B_1MC}$, $S_{BMC} = \frac{2}{3} S_{BB_1C} = \frac{1}{3} S_{BAC} =$

$= 60$. $S_{BMC} = \frac{1}{2} CM \cdot BM \Rightarrow CM \cdot BM = 120 \Rightarrow CC_1 \cdot BB_1 =$

$= \frac{180^2}{120} = \frac{180 \cdot 180}{120} = 180 \cdot \frac{18}{12} = 180 \cdot \frac{3}{2} = 270.$

$AA_1 = 30$, $CC_1 \cdot BB_1 = 270 \Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 27 \cdot 3 \cdot 100 = 8100.$

Ответ: а) 8100

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

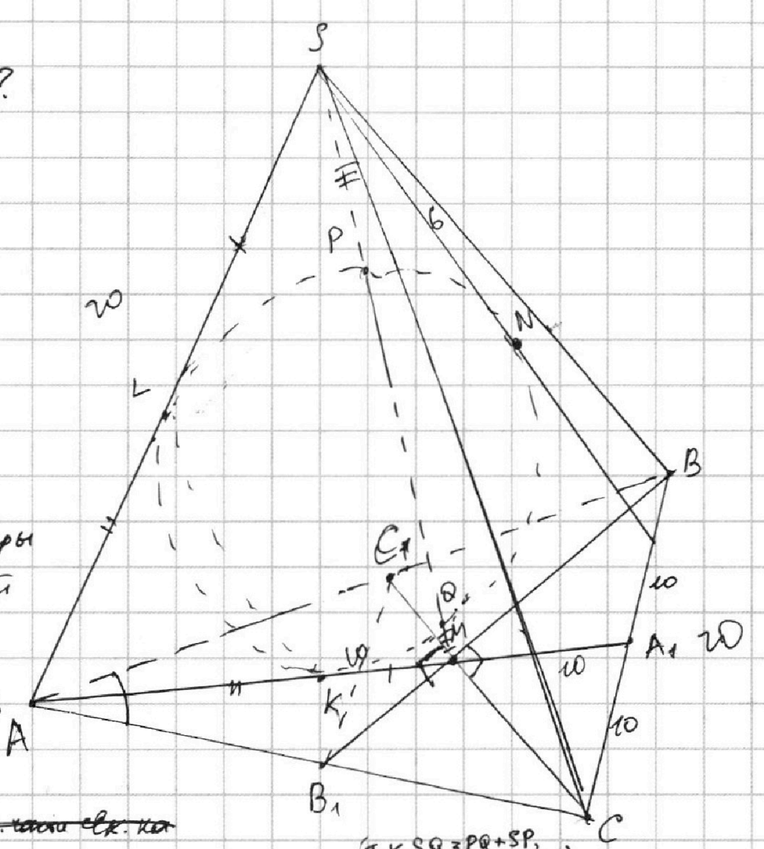
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7

а) $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$



Рассм. сечение сферы пл-тью (ASM). В этой пл-и получается окр-ть, и можем отн-но неё написать ст. точек S и M:

а) ~~Т. о произв. вн. части ск-ка~~

(т.к. $SQ = PQ + SP$, $MP = PQ + QM$)

$MQ \cdot MP = MK^2$, $SP \cdot SQ = SL^2$; $SQ = MP$, $MQ = SP \Rightarrow MK = SL$. Как отр. кас-ых: $AK = AL$. Значит, $AM = AS = 20$, и $AA_1 = \frac{3}{2} AM = 30$.

Воспользовавшись ф-ой длины медианы, получаем:

$AA_1^2 = \frac{2(AB^2+AC^2)-BC^2}{4} \Rightarrow 4 \cdot 30^2 + 20^2 = 2(AB^2+AC^2)$. По т. кос. для $\triangle ABC$: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC$, т.е.

$20^2 = 2 \cdot 30^2 + 10 \cdot 20 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC \Rightarrow AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC =$

$= 30^2 - 5 \cdot 20 = 800$. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC = 180 \Rightarrow$

~~$\Rightarrow AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC = 360$. Значит, $ctg\angle BAC = \frac{800}{360} = \frac{80}{36} =$~~

~~$= \frac{20}{9}$, $tg\angle BAC = \frac{9}{20}$.~~ Заметим, что $CA_1 = BA_1 = MA_1 = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BMC = 90°$. ~~Из ...~~ ($MA_1 = 10$, т.к. $MA_1 = \frac{1}{2} AM$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 4

$y = \sqrt{4-x^2} - 9$

$4 + (x+2)^2 = x(x+2)$

$8 + 4x = 2x$

$x = -4$???

$y_1 = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$

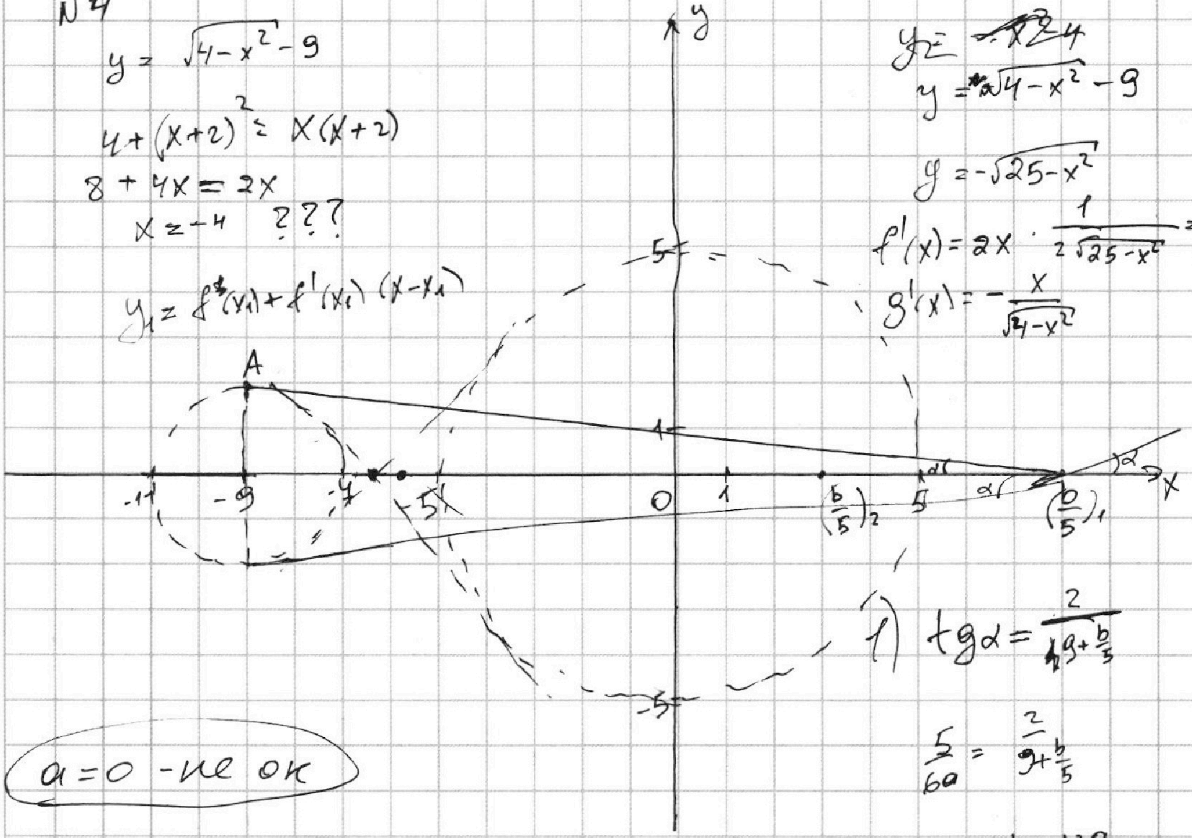
$y = \cancel{-x^2-4}$

$y = \sqrt{4-x^2} - 9$

$y = -\sqrt{25-x^2}$

$f'(x) = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{25-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$

$g'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$



1) $tg\,\alpha = \frac{2}{9+\frac{b}{5}}$

$\frac{5}{6a} = \frac{2}{9+\frac{b}{5}}$

$45 + b = 12a$

a = 0 − не ок

$6ay = b - 5x,\ y = \frac{b-5x}{6a} = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$

1) $b > -25$ $\quad -\frac{2}{9+\frac{b}{5}} < -\frac{5}{6a} < \frac{2}{9+\frac{b}{5}}$ $\quad \frac{b}{5}$

$-2 < -\frac{45+b}{6a} < 2$, $-2 < \frac{45+b}{6a} < 2$

$45 + b > 20$

Если $|6a| < 10$ − не ок

Если $|6a| > 10$ − ок

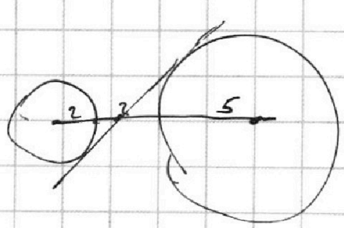
$4 + (x+2)^2 = x \cdot (x+2)$

$4 + \cancel{x^2} + 4 + 4x = \cancel{x^2} + 2x$

$8 + 2x = 0$

$x = -4$

2) $-7 < \frac{b}{5} < -5$



$25 + (7-x)^2 = (2-x)(7-x)$

$25 + 49 + x^2 - 14x = 14 - 9x + x^2$

$5x = 70,\ x = 14$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X				

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

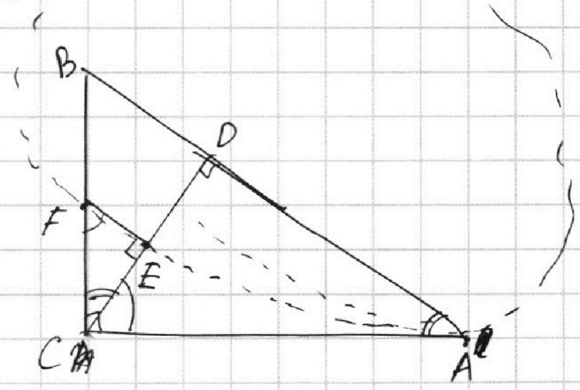
МФТИ

~~№1 (продолж.)~~

~~2) $n=3$: $x_1=4, x_2=2, x$~~

Как видно, т.к $k=3$ недостаточно, возникает проблема со степенями 5. Значит, т.к $k \vdots 5$. Проблема решится, если взять $n=2, k=2$ ($z_1=13, z_2=0, z_3=15$

№2

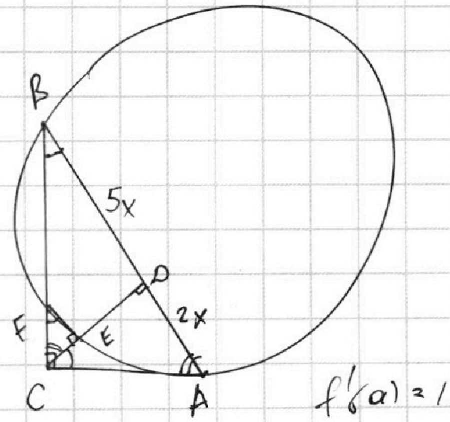


$$\frac{AB}{BD}=\frac{7}{5}$$

$$\frac{AC^2}{CB^2}=\frac{2}{5}$$

$$AC^2=CF\cdot CB \quad |: CB^2$$

$$\frac{AC^2}{CB^2}=\frac{CF}{CB}=\frac{2}{5}$$



$$CD^2=10x^2$$

$$AC^2=14x^2$$

$$CD=\sqrt{10}\,x$$

$$tg\,A=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\sin A=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$$

$f'(a)=15a^4+15$

$$\frac{BC}{AB}=\sqrt{\frac{5}{7}} \Rightarrow BC=7x\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}=\sqrt{35}\cdot x$$

№4

2: $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x^2+y^2+18y+77=0 \end{cases} \Leftrightarrow (y+9)^2-4+x^2=0 \Leftrightarrow (y+9)^2+\cancel{(x^2-4)=0}$

$x^2=4$

$$y=\pm\sqrt{4-x^2}-9$$

$a=\frac{1}{3}$: $\frac{1}{3^4}+5$

$$a+b=\log_{11}\left(\frac{xy}{2}\right)$$

$a\cancel{=\frac{1}{3^5}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1},\ b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2},\ c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$

$x_1 + x_2 = 6$
$y_1 + y_2 = 14$
$z_1 + z_2 = 11$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + x_3 = 16 \\ x_2 + x_3 = 14 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 = 6 - x_2$

$x_1 = 4,\ x_3 = 12,\ x_2 = 2$

$\begin{cases} y_1 + y_2 = 14 \\ y_1 + y_3 = 25 \\ y_2 + y_3 = 21 \end{cases}$

$ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11},\ bc = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{13},$
$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

~~$x_1 + x_2 = 3$~~

~~$y_1 = 4,\ y_2 = 10,\ y_1 = 8,\ y_2 = 6,\ y_3 = 15$~~

$\begin{cases} y_1 - y_2 = 4 \\ y_1 + y_2 = 14 \end{cases} \Rightarrow 2y_1 = 18$

$y_1 = 9,\ y_2 = 5,\ y_3 = 16$

$\begin{cases} z_1 + z_2 = 11 \\ z_1 + z_3 = 28 \\ z_2 + z_3 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = 11 \\ z_1 - z_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow 2z_1 = 11 + 15 = 26$

$z_1 = 13$

$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{11},\ b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5$

~~$a = 2^4$~~

$a : 2^4,\ b : 2^2,\ c : 2^{12}$

$a : 3^8,\ b : 3^5,\ c : 3^{17}$

$a : 5^{11},\ b : 5^0,\ c : 5^{13}$

$ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11},\ bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13},$

$ac = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28}$

$a : 2^4,\ b : 2^2,\ c : 2^{16}$

$\begin{cases} z_3 - z_1 = 2 \\ z_3 + z_1 = 28 \end{cases} \Rightarrow z_3 = 15$

$z_1 = 13$

$\begin{cases} z_2 + z_3 = 15 \\ z_1 + z_2 = 13 \\ z_1 + z_3 = 28 \end{cases} \Rightarrow$

~~$\Rightarrow \begin{cases} z_3 - z_1 = 4 \\ z_3 + z_1 = 28 \end{cases} \Rightarrow z_3 = 16$~~

~~$z_1 = 12$~~

$\begin{cases} z_1 + z_2 = 13 \\ z_2 + z_3 = 13 \\ z_1 + z_3 = 28 \end{cases} \Rightarrow z_2 = z_3$

$\begin{cases} z_3 - z_1 = 2 \\ z_1 + z_3 = 28 \end{cases} \Rightarrow z_3 = 15,\ z_1 = 13,$
$z_2 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [X] 3 [X] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N 6

1) $x_2 > x_1,\ y_2 > y_1$

$y_2 - y_1 = a \qquad a, b \in N$

$x_2 - x_1 = b$

$6b + a = 48$

$a = 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48$

$(0;8), (6;7), (12;6), (18;5), (24;4), (30;3), (36;2), (42;1), (48;0)$

$(0;8):\ y_2 = y_1$

$x_2 - x_1 = 8$

$92 \cdot C_{18}^{10}$

~~$(6;7): C_{92}^{6} \cdot C_{18}^{7}$~~

~~$(12;6): C_{92}^{12} \cdot C_{18}^{6}$~~

$C_{92}^{1} \cdot C_{18}^{10} + C_{92}^{6} \cdot C_{18}^{7} + C_{92}^{12}$

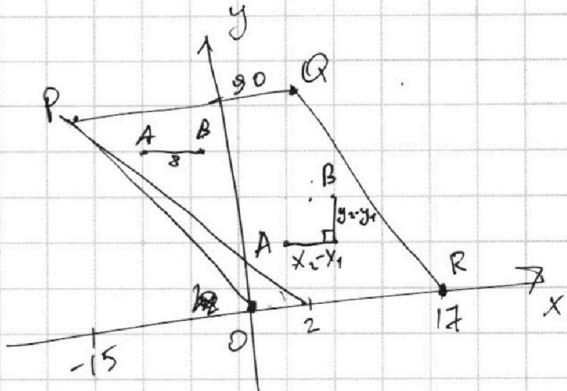
$a : 2^4$

$b : 2^2$

$c : 2^{12}$

$a : 5^{12}$

$c : 5^{16}$



$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$

$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$

$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$

C_{17}^{10}

1 2 3 4 5 6

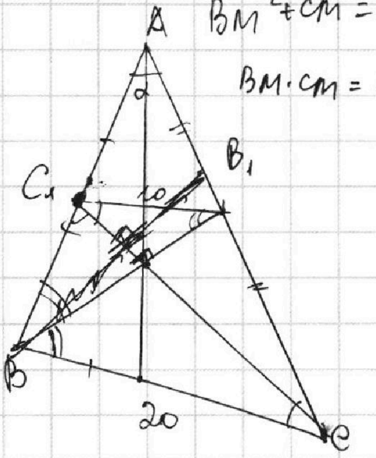
$BB_1 \cdot CC_1 = \dfrac{180^2}{BM \cdot CM}$

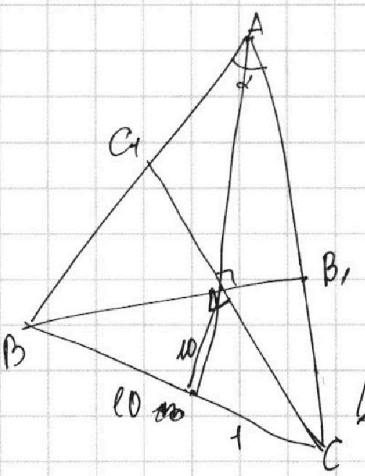
$BM \cdot CM$

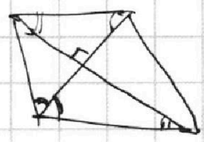
$m^2 = \dfrac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$

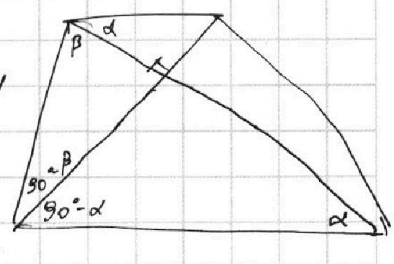
$BM^2 + CM^2 = 20^2$

$BM \cdot CM = 120$









$S_{BCC_1} = \frac{1}{2} BM \cdot CC_1 = \frac{1}{2} \cdot 180$

$BM \cdot CC_1 = 180$

$S_{BB_1C} = \frac{1}{2} CM \cdot BB_1 = \frac{1}{2} S_{ABC} =$

$= \frac{1}{2} \cdot 180$

$CM \cdot BB_1 = 180$